

OBSAH

1 Pasívne odpory	2
1.1 Šmykové trenie pri posuvnom pohybe. Adhézia	2
1.1.1 Súčiniteľ šmykového trenia, súčiniteľ adhézie	5
1.2 Šmykové trenie rotujúcich telies	5
1.2.1 Čapové trenie v radiálnom čape	6
1.2.2 Čapové trenie v axiálnom čape	8
1.3 Valivý odpor	9
1.4 Trenie vlákien na valcovej ploche	10
1.5 Tuhosť (neohybnosť) lán	12
RIEŠENÉ PRÍKLADY.....	13

1 PASÍVNE ODPORY

Idealizované hmotné objekty, o akých sme pri riešení úloh uvažovali doposiaľ, t. j. dokonalé hladké telesá s dokonale hladkými väzbami, sa môžu vzájomne po sebe pohybovať bez akéhokoľvek odporu. Reakcia vždy pôsobí v mieste dotyku v smere normály k dotykovej ploche.

Povrch reálnych hmotných objektov je drsný a pri vzájomnom kontakte sa telesá viac alebo menej deformujú. V dotykových plochách vznikajú silové účinky, ktoré bránia ich vzájomnému pohybu – tzv. *pasívne odpory*.

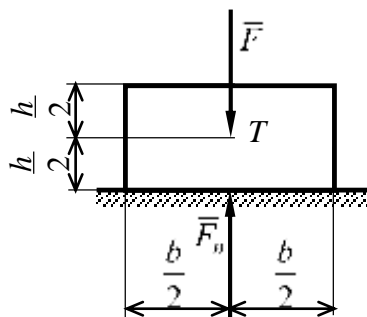
V dôsledku pôsobenia pasívnych odporov nastáva rovnováha hmotných objektov za iných silových pomerov, ako pri uvažovaní idealizovaných hmotných objektov. Mechanické sústavy (stroje, strojové zariadenia) sú schopné vyvíjať pracovnú činnosť až po prekonaní pasívnych odporov medzi jednotlivými, navzájom sa dotýkajúcimi členmi mechanickej sústavy. Znižuje sa tak užitočná práca silových účinkov pôsobiacich na mechanickej sústavu a tiež životnosť niektorých prvkov tejto sústavy. Snahou je znížiť vplyv pasívnych odporov čo najviac. V niektorých prípadoch je však vplyv pasívnych odporov nevyhnutný (chôdza), resp. strojové zariadenie plní svoju funkciu na princípe pôsobenia pasívnych odporov (brzdy, trecie spojky, jazda vozidiel).

Pasívne odpory sú dané:

- charakterom povrchu (drsnosťou) v dotykových plochách hmotných objektov – teleso sa šmyka po podložke - *šmykové trenie*,
- väzbami atómov v dotykových plochách,
- plastickou a elastickou deformáciou vo väzbách hmotných objektov – teleso sa valí po podložke – *odpor pri valení*, resp. *valivé trenie*,
- kombináciou už uvedených príčin – *tuhosť lán*.

1.1 ŠMYKOVÉ TRENIÉ PRI POSUVNOM POHYBE. ADHÉZIA

Pri zaťažení telesa uloženého na drsnej vodorovnej podložke len zvislým zaťažením \vec{F} vzniká normálová reakcia \vec{F}_n (obr. 1.1). Tieto dve sily sú v rovnováhe $\vec{F} + \vec{F}_n = \vec{0}$. Teleso a podložka sú navzájom v relatívnom pokoji. Drsnosť podložky sa neprejaví.



Obrázok 1.1

Ak sú dva dotýkajúce sa hmotné objekty navzájom v relatívnom pohybe, resp. pokoji ako špeciálnom prípade pohybu (napr. posuv tuhého telesa po drsnej podložke), pôsobí v mieste ich dotyku odpor, ktorý sa označuje ako *sila vonkajšieho trenia*. *Trenie* je fyzikálny jav, ktorého

prejavom je *trecia sila* vznikajúca v dôsledku drsnosti povrchu telies v kontaktných plochách. V prípade posuvného pohybu tuhého telesa po drsnej podložke je výsledná reakcia medzi telesom a podložkou daná spoločným účinkom normálovej reakcie od podložky a trecej sily. Pri zaťažení telesa 2 uloženého na drsnej vodorovnej podložke 1 (obr. 1.2a) je výsledná zaťažujúca sila \bar{F} odklonená od vertikály o uhol α . Výsledná reakcia \bar{R} musí byť na základe rovnováhy dvoch síl $\bar{F} + \bar{R} = \bar{0}$ odklonená o rovnaký uhol α .

Horizontálna zložka \bar{F}_H sily \bar{F} , ktorá má snahu uviesť teleso do pohybu – vyvoláva vznik *tangenciálnej –dotyčnicovej reakcie* \bar{F}_T .

Ak zväčšujeme silu \bar{F}_H , potom pri určitej veľkosti \bar{F}_{H0} je vyvolaná maximálna dotyčnicová reakcia \bar{F}_{T0} (obr. 1.2b). V tomto okamihu zvierá nositeľka výslednej zaťažujúcej sily, a súčasne aj reakcie, s normálou tzv. *trecí uhol* φ_0 a platí:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{F_{T0}}{F_n} = f_0, \quad (1.1)$$

kde f_0 je koeficient statického trenia (koeficient trenia za pokoja, resp. súčiniteľ adhézie), F_{T0} je maximálna hodnota dotyčnicovej reakcie, teda $F_T \leq F_{T0}$.

Rovnomerný pohyb telesa ($\bar{v} = \text{konšt.}$) nastane pri polohe výslednej reakcie určenej trecím uhlom φ (obr. 1.2c), pre ktorý platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_t}{F_n} = f, \quad (1.2)$$

kde f je koeficient šmykového trenia, F_t je trecia sila.

Zo vzťahu (1.1) vyplýva

$$F_{T0} = f_0 \cdot F_n \quad (1.3)$$

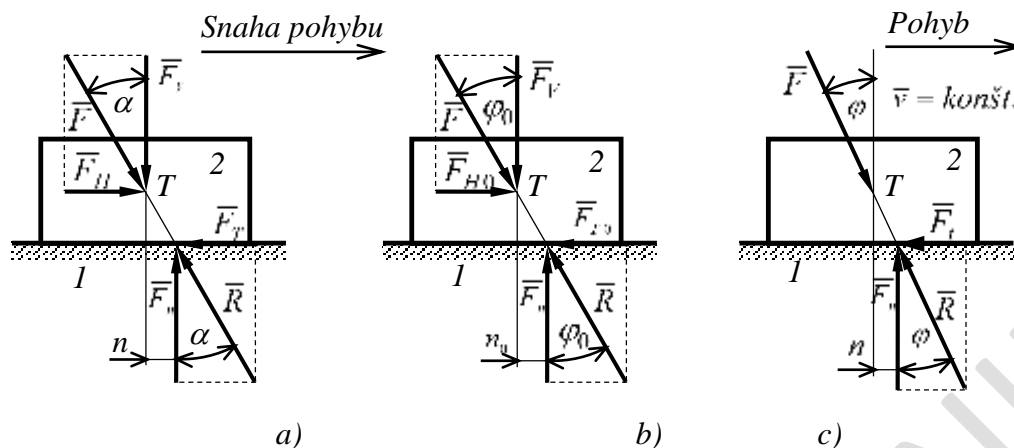
a zo vzťahu (1.2)

$$F_t = f \cdot F_n \quad (1.4)$$

Vzťahy (1.3) a (1.4) sú tzv. *Coulombove vzťahy* pre šmykové trenie a platia pre čisté a suché dotýkajúce sa plochy.

Na vyvolenie pohybu treba väčšiu silu ako na jeho udržanie. Preto sila \bar{F}_t , ktorá pôsobí proti rovnomernému, priamočiaremu pohybu telesa po podložke, je o niečo menšia, ako sila \bar{F}_{T0} nevyhnutná na uvedenie toho istého telesa do pohybu z pokojového stavu.

$$F_{T0} > Ft, \text{ a tiež } f_0 > f, \text{ resp. } \operatorname{tg} \varphi_0 > \operatorname{tg} \varphi.$$



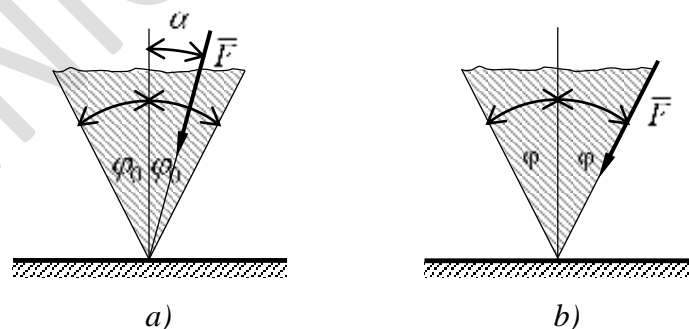
Obrázok 1.2

Poznámka: Pri analytickom riešení, predpokladáme ľubovoľné orientácie neznámych síl. Orientáciu dotýčnicovej reakcie, resp. trecej sily, ktorá vyjadruje odpor proti pohybu, predpokladáme vždy proti možnému alebo skutočnému pohybu.

Podľa vzájomnej väzby dotyku dvoch telies rozlišujeme tieto prípady:

- $F_{T0} = f_0 F_n$, čo je maximálna dotýčnicová zložka reakcie tesne predtým, ako nastane vzájomný pohyb telies,
- $F_t = f F_n$, čo je trecia (šmyková) sila pri relatívnom pohybe telies,
- $F_T < f_0 F_n$, čo je dotýčnicová zložka reakcie pri relatívnom pokoji telies, ktorú nazývame aj tangenciálna sila.

Nakoľko pohyb sa môže konať v rovine na obidve strany, výslednica vonkajšieho zaťaženia \bar{F} (podobne aj výsledná reakcia \bar{R}) môže byť odklonená od normály na obe strany maximálne o trecí uhol (obr. 1.3). Trecie uhly vymedzujú tzv. trecí výsek, resp. pre plošný pohyb trecí kužel.



Obrázok 1.3

- Pokiaľ výslednica vonkajších síl pôsobí vo vnútri alebo na hranici trecieho výseku (obr. 1.3a) $\alpha \leq \varphi_0$, teleso je v rovnováhe, t. j. v relatívnom pokoji, ak bolo v relatívnom pokoji aj pred zaťažením.

Ak je teleso v rovnováhe pri relatívnom pohybe, potom výslednica vonkajších síl je odklonená o uhol φ (obr. 1.3b). Ak výslednica vonkajších síl je odklonená o uhol väčší ako φ , teleso

nebude v rovnováhe, bude konať zrýchlený pohyb, ak bude odklonená o uhol menší ako φ , pohyb telesa bude spomalený.

1.1.1 Súčiniteľ šmykového trenia, súčiniteľ adhézie

Súčiniteľ šmykového trenia f ako aj súčiniteľ adhézie f_0 sú vo všeobecnosti závislé od trecích materiálov a podmienok ich dotyku. V rozhodujúcej miere ich hodnotu ovplyvňuje:

- *druh materiálu* v trecích plochách pohybujúcich sa telies,
- *kvalita* trecích plôch (charakter povrchu určený spôsobom opracovania) a stupeň ich zabehnutia,
- *mastenie* a jeho aplikácia v šmykovej väzbe.

V menšej miere má na súčiniteľ šmykového trenia a súčiniteľ adhézie vplyv:

- *merný (kontaktný) tlak* v dotykových plochách
- *teplota* trecích telies, resp. ich dotykových plôch,
- *tvar* dotykových plôch,
- *technológia* spracovania materiálu,
- *relatívna šmyková rýchlosť* v dotykových plochách (len pre f).

Súčiniteľ šmykového trenia a adhézie sa určuje väčšinou experimentálnymi metódami. Pre bežnú technickú prax sa berú do úvahy len najpodstatnejšie vplyvy, a to druh materiálu, mastenie trecích plôch, príp. ich opracovanie. Kvalita dotýkajúcich sa plôch sa pohybom a časom mení. Trecie plochy sa trením vyhladzujú a za určitý čas ich činnosti dosiahnu rovnaký charakter povrchu, nezávislý od spôsobu opracovania. Takéto trecie väzby potom nazývame *zabehané väzby* a súčiniteľ šmykového trenia a súčiniteľ adhézie sa nakoniec ustáli na menšej hodnote, ako bola pôvodná. Pre praktickú potrebu musíme vedieť ako je možné, v súvislosti s požiadavkami na funkciu trecej väzby, súčiniteľ šmykového trenia znížiť alebo naopak zvýšiť. Jeho veľkosť je v zásade možné ovplyvniť *mastením* trecích plôch. Potom *trenie* môžeme rozdeliť:

- *technické suché trenie*,
- *trenie s medzivrstvou* alebo aj *kvapalinové*, kde hrúbka tejto vrstvy je väčšia, ako súčet maximálnych výšok nerovností oboch kontaktných povrchov,
- *zmiešané trenie, polosuché*, kde hrúbka mastiva nestačí oddeliť od seba obidva kontaktné povrchy.

1.2 ŠMYKOVÉ TRENIE ROTUJÚCICH TELIES

Určité časti otáčajúcich sa telies (hriadeľov) sú špeciálne upravené v miestach, v ktorých je teleso pomocou ložísk upevnené k rámu. Tieto časti nazývame *čapy*. Proti zmyslu otáčania čapov uložených v ložiskách vzniká v dotykových plochách odpor, ktorý nazývame *čapové trenie*. Pojmom *čapové trenie* označujeme šmykové trenie otáčajúcich sa telies a všetko čo bolo uvedené v kapitole 1.1 o šmykovom trení a adhézii, zostáva v platnosti aj tu. Sila šmykového trenia má smer dotýčnice k obvodu čapu. Odpor proti rotačnému pohybu telies je vyjadrený *trecím momentom*, resp. *momentom čapového trenia*, ktorý je závislý od rozloženia tlakov v dotykovej ploche, od vôle medzi plochami, od kvality plôch, od ich stavu (zabehané,

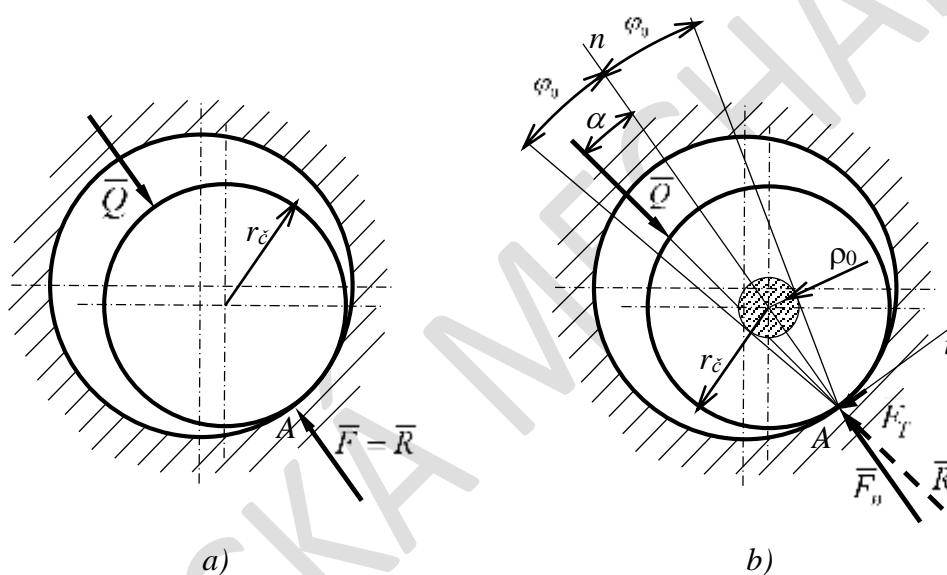
nezabehané), od druhu materiálu čapu a ložiska. Podľa smeru zaťaženia rotujúceho telesa a spôsobu jeho uloženia čapy delíme na:

- *axiálne* – zaťaženie pôsobí v osi hriadeľa,
- *radiálne* – zaťaženie pôsobí kolmo na os hriadeľa,
- kombinované – *axiálne* – *radiálne* čapy.

V statike sa budeme zaoberať len suchým trením. Výpočet reakcií v čape je približný, pretože v skutočnosti je medzi čapom a ložiskom vždy vrstva maziva.

1.2.1 Čapové trenie v radiálnom čape

Riešme idealizovaný rovinný prípad, keď všetky zaťažujúce aj reakčné sily ležia v jednej rovine kolmej na os rotácie. V dôsledku nevyhnutnej vôle medzi čapom a ložiskom sa plochy dotýkajú teoreticky v jednom bode, označme ho A (obr. 1.4).



Obrázok. 1.4

Dokonale hladká väzba v radiálnom čape nie je schopná prenášať sily, ktoré majú k osi otáčavý účinok (obr. 1.4a). Reakcia \bar{R} prechádza stredom čapu. Platí podmienka rovnováhy

$$\bar{Q} + \bar{R} = \bar{0}$$

V prípade reálnej väzby je reakcia vplyvom drsnosti odchýlená o uhol α . Rovnováha čapu môže nastať aj vtedy, keď zaťažujúca sila \bar{Q} neprechádza stredom čapu, ale jej nositeľka musí ležať v trecom výseku a prechádzať bodom A . Preto oblasťou, ktorou musí prechádzať zaťažujúca sila \bar{Q} aby bola možná rovnováha za pokoja, je kružnica o polomere

$$\rho_0 = r_\xi \sin \varphi_0,$$

kde r_ξ je polomer čapu (obr. 1.4b). Túto kružnicu nazývame *treťou kružnicou*. Pri reálnej väzbe môže byť reakcia v mieste dotyku pri rovnováhe za pokoja odchýlená maximálne o uhol $\alpha \leq \varphi_0$.

Pri pôsobení hnacieho momentu M_h sa hriadeľ otáča. Ak je $\omega = \text{konšt.}$, bude sila \bar{Q} a moment M_h v rovnováhe so silou \bar{R} pôsobiacou v mieste dotyku A. Jej tangenciálna zložka $F_t = f F_n$ je orientovaná proti zmyslu relatívnej rýchlosti bodu A čapu (obr. 1.5a). Reakčné účinky výhodne nahradíme reakciou \bar{R} v strede čapu a momentom M_{ζ} , ktorý sa nazýva *momentom čapového trenia* (obr. 1.5b).

Veľkosť momentu čapového trenia je daná vzťahom:

$$M_{\zeta} = F_t r_{\zeta} = r_{\zeta} R \sin \varphi = r_{\zeta} f_{\zeta} R = R \rho, \quad (1.5)$$

kde súčiniteľ (koeficient) čapového trenia f_{ζ} je definovaný vzťahom

$$f_{\zeta} = \sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}}$$

a polomer trecej kružnice vzťahom

$$\rho = r_{\zeta} f_{\zeta}, \text{ pričom pre } f \ll 1 \text{ je približne } f_{\zeta} = f.$$

Pri *analytickom riešení* reakciu \bar{R} nahradzujeme zložkami \bar{R}_x, \bar{R}_y . Potom jej veľkosť je

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

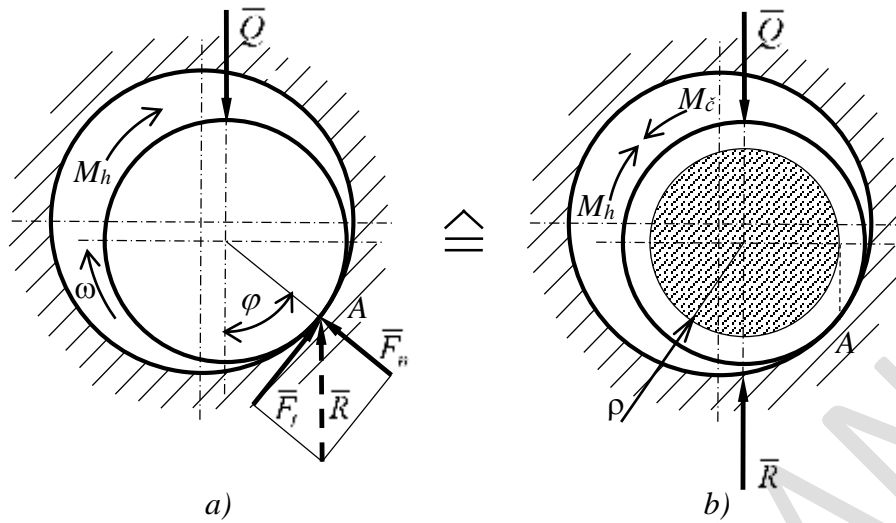
a vzťah pre veľkosť čapového trenia

$$M_{\zeta} = r_{\zeta} f_{\zeta} \sqrt{R_x^2 + R_y^2}. \quad (1.6)$$

Takéto vyjadrenie komplikuje riešenie sústavy lineárnych rovnovážnych rovníc v dôsledku jeho nelinearity vzhľadom na neznáme R_x a R_y . Preto hodnotu druhej odmocniny často nahradzujeme tzv. *Ponceletovým vzťahom*

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 0,96R_x + 0,4R_y.$$

Tento výraz platí, ak je $R_x > R_y$. Pre $R_x < R_y$ zameníme číselné koeficienty. Ktorá z oboch zložiek R_x, R_y bude väčšia, treba odhadnúť, alebo rozhodnúť podľa predbežného riešenia bez uvažovania pasívnych odporov.

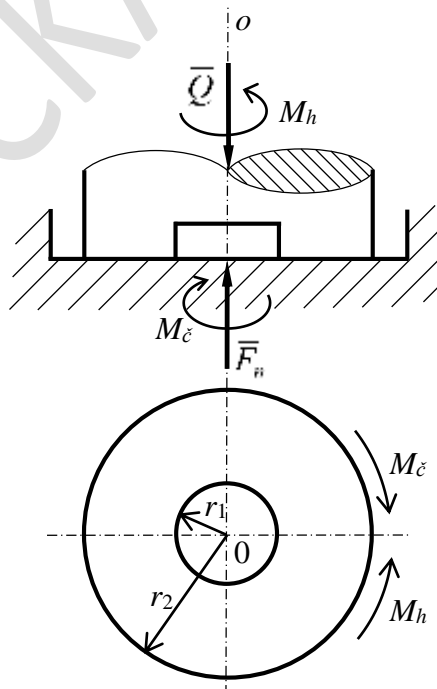


Obrázok 1.5

1.2.2 Čapové trenie v axiálnom čape

Axiálne čapy sú zaťažené silou \bar{Q} v smere osi o a hnacím momentom M_h pôsobiacim okolo osi o (obr. 1.6). Predpokladáme suché trenie. Platia tu *Coulombove zákony*. Moment čapového trenia, ktorý vzniká pri vzájomnom pohybe dotykových plôch ako reakcia na pôsobenie vonkajšieho zaťaženia, závisí od rozloženia memného tlaku v spoločnej dotykovej ploche. Axiálne čapy v tejto súvislosti rozdeľujeme na:

- nezabehané – zriedkavý pohyb s malými uhlami natočenia čapu,
- zabehané – častý pohyb s úplnými otáčkami.



Obrázok 1.6

Axiálny čap nezabehaný

Dotykové plochy v nezabehaných čapoch dosadajú na seba všade rovnako. Rozloženie merného tlaku medzi čapom a ložiskom považujeme preto za rovnomerné na celej dotykovej ploche. Veľkosť momentu čapového trenia v *nezabehanom axiálnom čape* určíme podľa vzťahu

$$M_{\varepsilon} = \frac{2}{3} Q f \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} \quad (1.7)$$

V prípade plného čapu s polomerom $r_2 = r_{\varepsilon}$, $r_1 = 0$ je

$$M_{\varepsilon} = \frac{2}{3} Q f r_{\varepsilon}, \quad (1.8)$$

kde $f_{\varepsilon} = \frac{2}{3} f$ je *súčiniteľ čapového trenia nezabehaného čapu*.

Axiálny čap zabehaný

Tlak v tomto prípade nie je rozložený rovnomerne po dotykovej ploche. Pri pohybe sa materiál opotrebuje. Opotrebenie závisí od dráhy dotykových bodov, ktoré sa s polomerom zväčšuje a od merného tlaku.

Veľkosť momentu čapového trenia v zabehanom axiálnom čape je

$$M_{\varepsilon} = Q f \frac{r_2 + r_1}{2} \quad (1.9)$$

V prípade plného čapu s polomerom r_{ε} ($r_1 = 0$, $r_2 = r_{\varepsilon}$)

$$M_{\varepsilon} = \frac{1}{2} Q f r_{\varepsilon}, \quad (1.10)$$

kde $f_{\varepsilon} = \frac{1}{2} f$ je *súčiniteľ čapového trenia zabehaného čapu*.

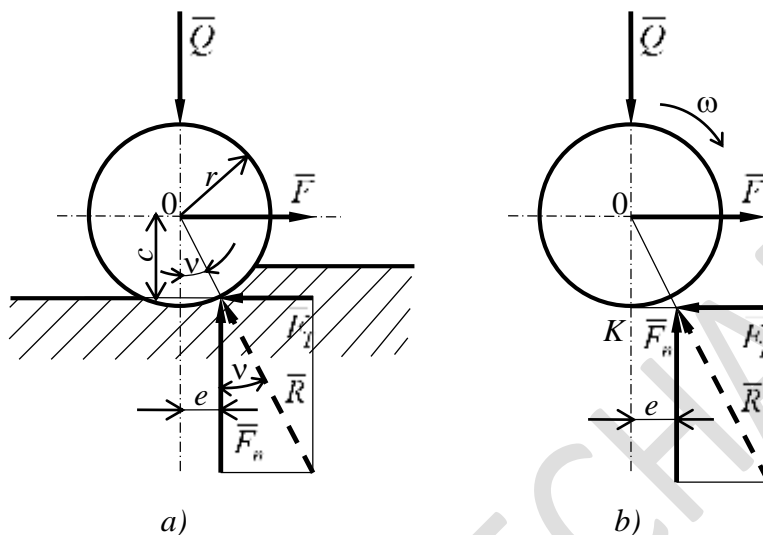
1.3 VALIVÝ ODPOR

Pri *valení telies* dochádza k odporu proti pohybu, ktorý sa nazýva *valivý odpor*. Podstata tohto druhu pasívneho odporu je iná, ako pri šmykovom trení. Valivý odpor vzniká v dôsledku toho, že telesá nie sú dokonale tuhé, ale pri vzájomnom dotyku sa obidve telesá deformujú. Pri valení sa pred valcom vytvára vlna materiálu, v dôsledku čoho sa pôsobisko reakcie posúva v smere pohybu (*obr. 1.7a*).

Reakcia \bar{R} podložky je posunutá o vzdialenosť e [mm], o tzv. *rameno valivého odporu*. Určuje sa experimentálne. Pre väčšinu materiálov je uhol ν veľmi malý, preto vzdialenosť c môžeme uvažovať približne rovnú polomeru r .

Odpor pri valení sa dá potom vyjadriť tzv. *momentom valivého odporu* M_v , ktorý pôsobí proti relatívnemu otáčaniu.

$$M_v = F_n e$$



Obrázok 1.7

Aby mohlo valenie nastať, je nutný drsný styk medzi telesami, ktoré sa odvalujú, t. j. musí tu byť možnosť vzniku dotyčnicovej reakcie \bar{F}_T , ktorá však musí spĺňať podmienku valenia

$$F_T \leq F_n f_0 = F_{T0} \quad (1.11)$$

Pri nesplnení tejto podmienky sa z valivej väzby stane väzba všeobecná, v mieste dotyku nastáva relatívny pohyb, ktorému odpovedá trecia sila

$$F_t = f F_n$$

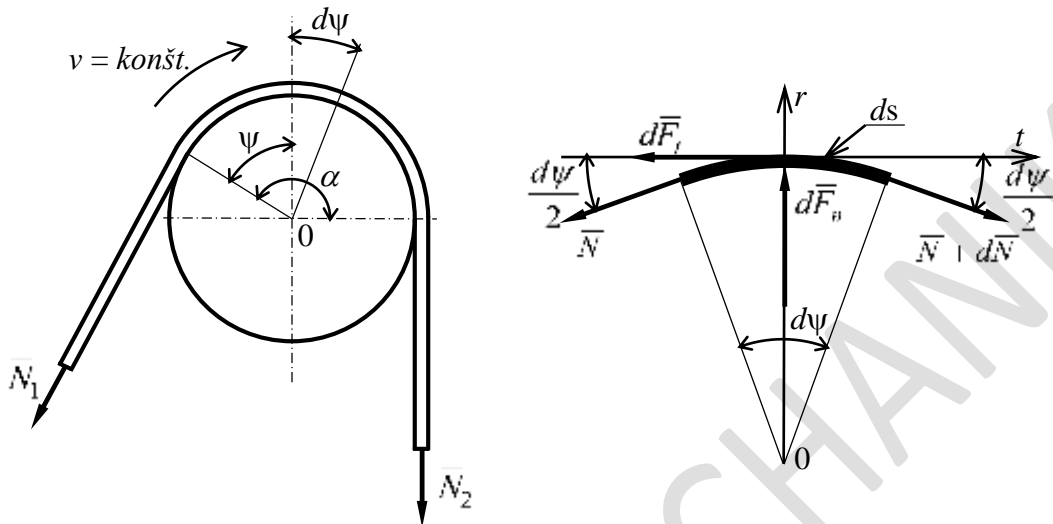
Dotyčnicová reakcia nie je pasívnym odporom, jej výkon je nulový, lebo jej pôsobisko má nulovú rýchlosť. \bar{F}_T je vždy orientovaná *proti možnému ušmyknutiu*, to znamená, že môže byť orientovaná proti smeru valenia alebo aj v smere valenia. Jej veľkosť a orientáciu dostaneme zo statických podmienok rovnováhy.

1.4 TRENIE VLÁKIEN NA VALCOVEJ PLOCHE

Pri pohybe *vlákién* (ocelových pásov, lán, remeňov, atď.) po drsnej valcovej ploche vzniká špeciálny prípad šmykového trenia, ktoré nazývame *trenie vlákién (pásov, lán)*. *Vláknové trenie* vzniká aj vtedy, ak sú dotykové plochy vlákna a valca v relatívnom pokoji (remeňové prevody), t. j. je potrebné, aby trecia sila prenášala určitý krútiaci moment z jedného hriadeľa (remenicu) na druhý (druhú remenicu).

Predpokladajme nepredžiteľné, nehmotné, dokonale ohybné vlákno, vedené cez pevnú valcovú plochu ľubovoľného tvaru (*obr. 1.8*). Vlákno je v mieste okamihu dotyku, resp. jeho oddelenia od povrchu hnacieho kolesa namáhané tangenciálnymi silami \bar{N}_1 a \bar{N}_2 . Zaujímá nás vzťah

medzi osovými silami \bar{N}_2 a \bar{N}_1 pri pohybe vlákna konštantnou rýchlosťou \bar{v} . Ak má nastať pohyb hnaného člena, musí platiť $N_1 < N_2$. Závislosť medzi silami \bar{N}_1 , \bar{N}_2 určíme zo statickej rovnováhy elementu ds .



Obrázok 1.8

Podmienky rovnováhy pre vybraný element ds v smere radiálnom r a tangenciálnom t

$$\sum F_{ir} = 0: \quad dF_n - N \sin \frac{d\psi}{2} - (N + dN) \sin \frac{d\psi}{2} = 0 \tag{1.12}$$

$$\sum F_{it} = 0: \quad (N + dN) \cos \frac{d\psi}{2} - N \cos \frac{d\psi}{2} - dF_t = 0$$

$$dF_t = f dF_n$$

Nakoľko uhol $\frac{d\psi}{2}$ je veľmi malý, je:

$$\cos \frac{d\psi}{2} \doteq 1, \quad \sin \frac{d\psi}{2} \doteq \frac{d\psi}{2}$$

Pri zanedbaní malých veličín druhého rádu majú rovnice rovnováhy tvar

$$\begin{aligned} dF_n - N d\psi &= 0 \\ dN - dF_t &= 0 \\ \hline dF_t &= f dF_n \end{aligned} \tag{1.13}$$

Riešením rovníc (1.13) dostaneme

$$\frac{dN}{N} = f d\psi,$$

z čoho po integrácii po celej dĺžke dotyku vlákna s valcovou plochou

$$\int_{N_1}^{N_2} \frac{dN}{N} = f \int_0^\alpha d\psi$$

čiže pre $N_1 < N_2$ platí

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{\alpha f}, \quad \text{resp.} \quad N_2 = N_1 e^{\alpha f}. \quad (1.14)$$

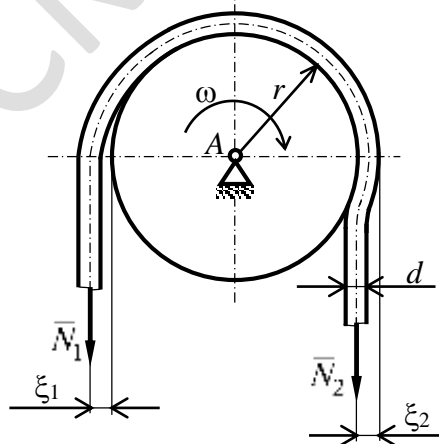
Uhol α je *uhol opásania* (vyjadrený v radiánoch).

Odvođený vzťah (1.14) je známy pod názvom *Eulerov vzťah* a má mnohostranné použitie v technickej praxi. Ak ide o zabezpečenie proti šmykaniu (remeňové, lanové prevody) v tomto prípade namiesto f berieme koeficient f_0 a sily vo vlákne musia spĺňať podmienku

$$\frac{N_2}{N_1} \leq e^{\alpha f_0} \quad (1.15)$$

1.5 TUHOŠŤ (NEOHYBNOSŤ) LÁN

Dokonale ohybné lano sa navíja na kladku po dotýčnici. Skutočné lano kladie odpor proti navíjaniu aj proti odvíjaniu. Vplyvom nedokonalnej ohybnosti vlákien (lán) sa pri navíjaní rameno sily \bar{N}_1 zväčší o hodnotu ξ_1 , pri odvíjaní sa rameno sily \bar{N}_2 zmenší o ξ_2 . Pri výpočte obvykle predpokladáme, že $\xi_1 = \xi_2 = \xi$, kde ξ je *rameno neohybnosti lana* (vlákna) (obr. 1.9), ktoré závisí od hrúbky (priemeru) vlákna d , polomeru kladky, príp. kola r , ich vzájomného pomeru d/r , od materiálu lana, konštrukcie, rýchlosti pohybu a prenášanej sily.



Obrázok. 1.9

Momentová podmienka rovnováhy kladky, ktorá sa voľne otáča (trenie v čape neuvažujeme):

$$\left(\sum M_i\right)_A = 0: \quad (r + \xi_1)N_1 - (r - \xi_2)N_2 = 0.$$

Ak $\xi_1 = \xi_2 = \xi$, potom

$$N_2 = N_1 \frac{r + \xi_1}{r - \xi_2} = N_1 \left(\frac{r + \xi}{r - \xi} \right)$$

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{r + \xi - \xi + \xi}{r - \xi} = 1 + \frac{2\xi}{r - \xi}$$

Nakoľko $\xi \ll r$, môžeme ξ oproti r v menovateli zanedbať. Potom

$$\frac{N_2}{N_1} = 1 + \frac{2\xi}{r} = 1 + 2\tau \quad (1.16)$$

pričom $\tau = \frac{\xi}{r}$ je tzv. *súčiniteľ neohybnosti lana*.

Hodnoty súčiniteľov ξ , resp. τ sa zisťujú experimentálne. Pre menšie rýchlosti pohybu sa *súčiniteľ neohybnosti lana* vyjadruje vzťahom

$$\tau = \chi \frac{d^2}{r},$$

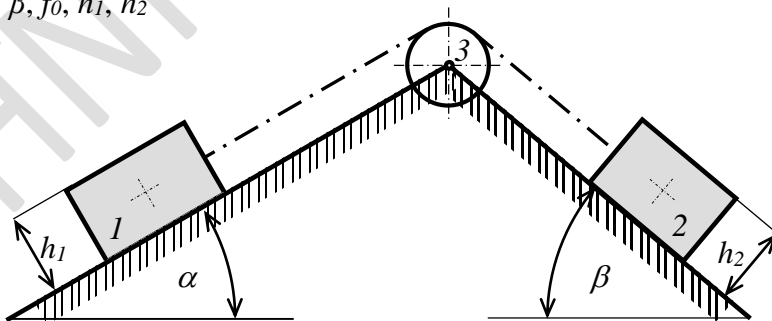
kde d - priemer lana, r - polomer kladky, χ - súčiniteľ rešpektujúci ohybové vlastnosti lana.

RIEŠENÉ PRÍKLADY

PRÍKLAD 1.1: Na naklonených rovinách sú položené dve telesá navzájom spojené dokonale ohybným lanom cez kladku 3 (obr. 1.1.1). V akom rozmedzí sa môže meniť veľkosť tiaže \bar{G}_2 telesa 2 pri zotrvaní oboch telies v rovnováhe za pokoja, ak súčiniteľ statického trenia medzi naklonenými rovinami a telesami je f_0 , tiaž telesa 1 je \bar{G}_1 a uhly sklonu naklonených rovin α a β . Vplyv pasívnych odporov na kladke zanedbajte.

Dané: $\bar{G}_1, \alpha, \beta, f_0, h_1, h_2$

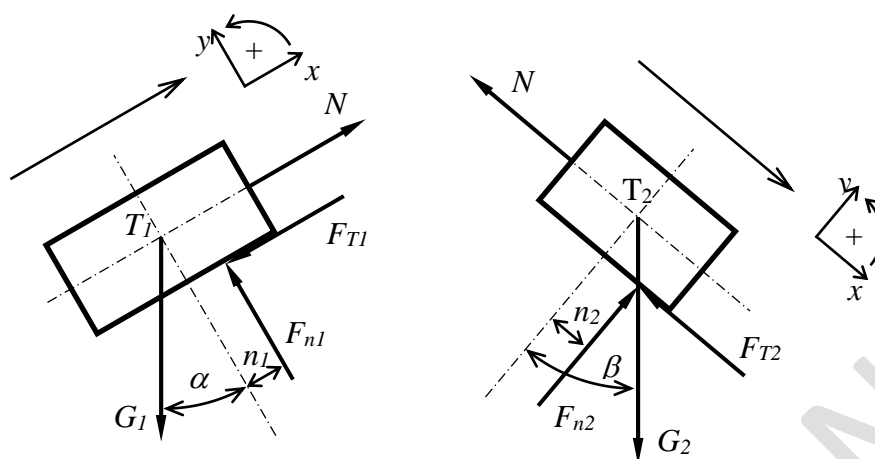
Hľadané: \bar{G}_2



Obrázok 1.1.1

Riešenie: Na sústavu telies v pokoji pôsobí rovnovážna silová sústava. Pri riešení vychádzame z podmienok rovnováhy silových sústav pôsobiacich na jednotlivé uvoľnené telesá. Hraničné hodnoty tiaže \bar{G}_2 telesa 2 nájdeme nasledovne:

- Maximálnu hodnotu tiaže \bar{G}_2 nájdeme z úvahy o tendencii pohybu sústavy znázornenej na obrázku 1.1.2 v naznačenom smere, kde teleso 2 má snahu dať do pohybu teleso 1.



Obrázok 1.1.2

Telesá 1 a 2 uvoľníme z väzieb. Väzby nahradíme väzbovými reakciami a silami od príslušných pasívnych odporov vo väzbách pôsobiacimi pri snahe telesa o pohyb v danom smere. Súradnicové sústavy zvolíme tak, aby sme dosiahli čo najjednoduchšie riešenie sústavy rovníc tvorenej príslušnými podmienkami rovnováhy.

Pre teleso 1:

Pre teleso 2:

$$\sum F_{ix} = 0: N - F_{T1} - G_1 \sin \alpha = 0 \quad (\text{a})$$

$$\sum F_{ix} = 0: -N - F_{T2} + G_2 \sin \beta = 0 \quad (\text{d})$$

$$\sum F_{iy} = 0: F_{n1} - G_1 \cos \alpha = 0 \quad (\text{b})$$

$$\sum F_{iy} = 0: F_{n2} - G_2 \cos \beta = 0 \quad (\text{e})$$

$$\sum M_{T1} = 0: -F_{T1} \frac{h_1}{2} + F_{n1} n_1 = 0 \quad (\text{c})$$

$$\sum M_{T2} = 0: -F_{T2} \frac{h_2}{2} + F_{n2} n_2 = 0 \quad (\text{f})$$

kde maximálne veľkosti dotyčnicových reakcií \bar{F}_{T1} , \bar{F}_{T2} sú dané Coulombovým vzťahom pre šmykové trenie za pokoja

$$F_{T1} = f_0 F_{n1} \quad F_{T2} = f_0 F_{n2} \quad (\text{g})$$

Z rovníc (b) a (e) vyjadríme veľkosti normálových zložiek reakcií od podložky. Z rovníc (a) a (d) veľkosti osových síl v lane.

$$F_{n1} = G_1 \cos \alpha$$

$$F_{n2} = G_2 \cos \beta$$

$$N = f_0 G_1 \cos \alpha + G_1 \sin \alpha$$

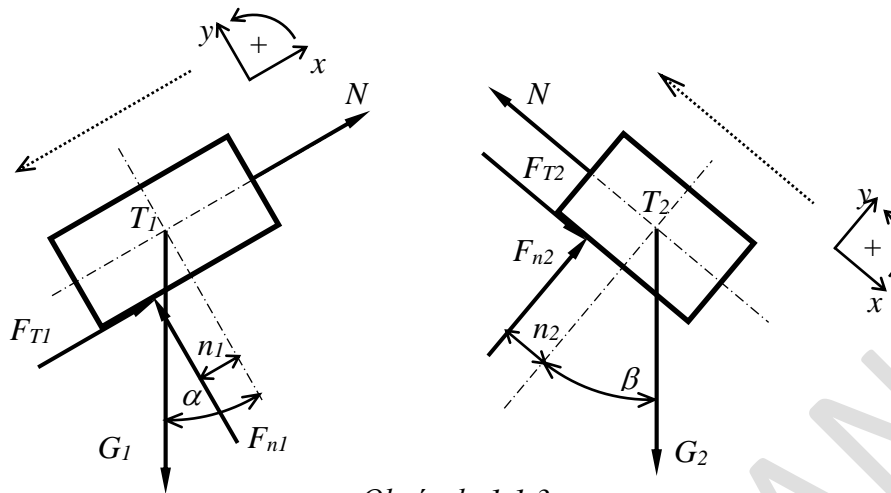
$$N = -f_0 G_2 \cos \beta + G_2 \sin \beta$$

Vo väzbe lanom medzi telesami 1 a 2 platí zákon akcie a reakcie, preto:

$$N = N \quad (\text{h})$$

$$G_1 (f_0 \cos \alpha + \sin \alpha) = G_2 (\sin \beta - f_0 \cos \beta)$$

$$G_2 \leq G_1 \frac{f_0 \cos \alpha + \sin \alpha}{\sin \beta - f_0 \cos \beta} \quad (\text{i})$$



Obrázok 1.1.3

- Minimálnu hodnotu tiaže \bar{G}_2 telesa 2 dostaneme úvahou o tendencii pohybu sústavy telies opačným smerom, kde teleso 1 má snahu ísť do pohybu teleso 2 (obr. 1.1.3):

$$\sum F_{ix} = 0: \quad N + F_{T1} - G_1 \sin \alpha = 0 \quad (j) \quad \sum F_{ix} = 0: \quad -N + F_{T2} + G_2 \sin \beta = 0 \quad (m)$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad F_{n1} - G_1 \cos \alpha = 0 \quad (k) \quad \sum F_{iy} = 0: \quad F_{n2} - G_2 \cos \beta = 0 \quad (n)$$

$$\sum M_{T1} = 0: \quad F_{T1} \frac{h_1}{2} - F_{n1} n_1 = 0 \quad (l) \quad \sum M_{T2} = 0: \quad F_{T2} \frac{h_2}{2} - F_{n2} n_2 = 0 \quad (o)$$

kde maximálne veľkosti dotyčnicových reakcií F_{T1} , F_{T2} sú dané Coulombovým vzťahom pre šmykové trenie za pokoja:

$$F_{T1} = f_0 F_{n1} \quad F_{T2} = f_0 F_{n2} \quad (p)$$

Z rovníc (k) a (n) vyjadríme veľkosti normálových zložiek reakcií od podložky. Z rovníc (j) a (m) veľkosti osových síl v lane.:

$$F_{n1} = G_1 \cos \alpha \quad F_{n2} = G_2 \cos \beta$$

$$N = -f_0 G_1 \cos \alpha + G_1 \sin \alpha \quad N = f_0 G_2 \cos \beta + G_2 \sin \beta$$

Vo väzbe lanom medzi telesami 1 a 2 platí zákon akcie a reakcie, preto

$$N = N$$

$$G_1(-f_0 \cos \alpha + \sin \alpha) = G_2(\sin \beta + f_0 \cos \beta)$$

$$G_2 \geq G_1 \frac{\sin \alpha - f_0 \cos \alpha}{\sin \beta + f_0 \cos \beta} \quad (r)$$

Sústava telies zotrúva v pokoji, ak veľkosť tiaže telesa 2 sa bude pohybovať v rozmedzí

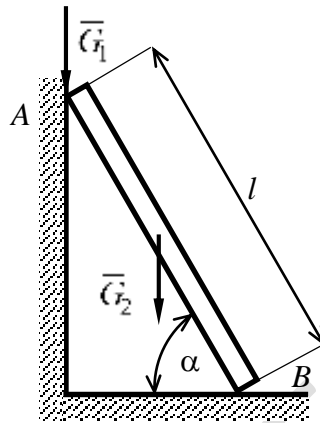
$$G_1 \frac{\sin \alpha - f_0 \cos \alpha}{\sin \beta + f_0 \cos \beta} \leq G_2 \leq G_1 \frac{\sin \alpha + f_0 \cos \alpha}{\sin \beta - f_0 \cos \beta}.$$

PRÍKLAD 1.2: Rebrík je opretý o zvislú stenu a vodorovnú rovinu (obr. 1.2.1). Pod akým minimálnym uhlom α k vodorovnej rovine je potrebné rebrík umiestniť, aby po ňom človek o tiaži \bar{G}_1 mohol vystúpiť do bodu A ? Dané sú tiaž rebríka \bar{G}_2 , dĺžka l , súčiniteľ statického trenia v bode A má hodnotu f_{0A} a v bode B hodnotu f_{0B} .

Riešenie: Rebrík, ako teleso v rovine, je viazaný v bodoch A a B väzbami opretím. Má jeden stupeň voľnosti pohybu. Pri zaťažení telesa vonkajšou silou môže preto nastať rovnováha telesa za pokoja len vplyvom statického trenia a to iba v určitej polohe.

Dané: \bar{G}_1 , \bar{G}_2 , l , f_{0A} , f_{0B}

Hľadané: α



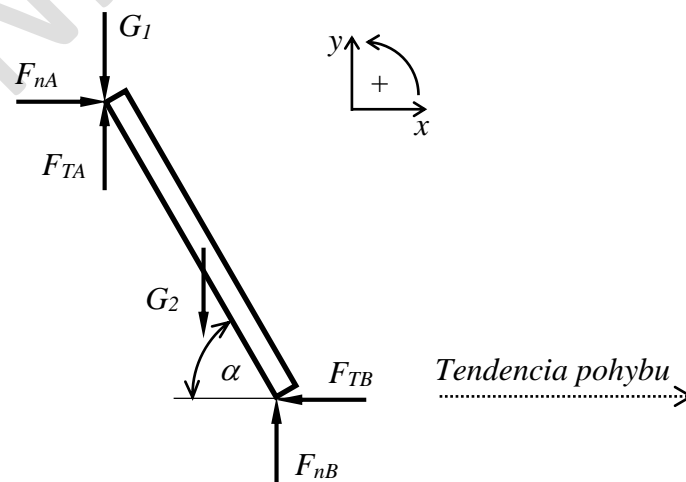
Obrázok 1.2.1

Teleso uvoľníme z väzieb. Ich účinky nahradíme väzbovými reakciami a príslušnými dotyčnicovými reakciami orientovanými proti tendencii pohybu telesa v naznačenom smere (obr. 1.2.2). Podmienky rovnováhy pre uvoľnený rebrík s naznačenou tendenciou pohybu:

$$\sum F_{ix} = 0: \quad F_{nA} - F_{TB} = 0 \quad (a)$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad F_{nB} + F_{TA} - G_1 - G_2 = 0 \quad (b)$$

$$\sum M_{iA} = 0: \quad -G_2 \frac{l}{2} \cos \alpha + F_{nB} l \cos \alpha - F_{TB} l \sin \alpha = 0 \quad (c)$$



Obrázok 1.2.2

kde maximálna hodnota dotýčnicových reakcií F_{TA} a F_{TB} je určená Coulombovým vzťahom

$$F_{TA} = f_{0A} F_{nA}, \quad F_{TB} = f_{0B} F_{nB} \quad (d)$$

Riešením rovníc (a), (b), (c), vzhľadom na vzťahy (d) dostaneme:

$$F_{nA} = F_{TB} = f_{0B} \cdot F_{nB}$$

$$f_{0A} f_{0B} F_{nB} + F_{nB} - G_1 - G_2 = 0 \Rightarrow F_{nB} = \frac{G_1 + G_2}{f_{0A} f_{0B} + 1}$$

Úpravou a dosadením F_{nB} do (c) dostávame:

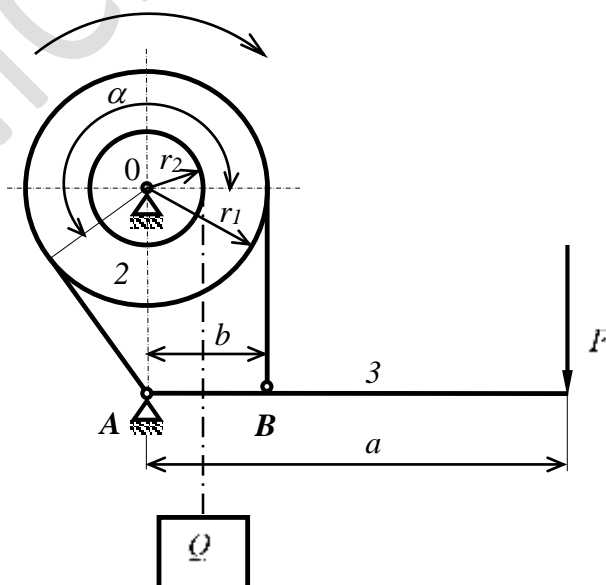
$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\left(\frac{G_1 + G_2}{f_{0A} f_{0B} + 1} \right) - G_2 \frac{1}{2}}{f_{0B} \frac{G_1 + G_2}{f_{0A} f_{0B} + 1}}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\left(\frac{G_1 + G_2}{f_{0A} f_{0B} + 1} \right) - G_2 \frac{1}{2}}{f_{0B} \frac{G_1 + G_2}{f_{0A} f_{0B} + 1}}$$

PRÍKLAD 1.3: Na lane navinutom na liatinovom bubne jednoduchšej pásovej brzdy o polomere $r_2 = 100 \text{ mm}$ je zavesené bremeno o hmotnosti $m_Q = 500 \text{ kg}$ (obr. 1.3.1). Polomer brzdového kotúča je $r_1 = 500 \text{ mm}$, ramená páky $a = 1500 \text{ mm}$, $b = 500 \text{ mm}$. Aká veľká sila na páke udrží bremeno v rovnováhe, ak je opásanie rovné 0,6 obvodu a súčiniteľ trenia pre oceľový pás na liatinovom bubne je $f = 0,18$.

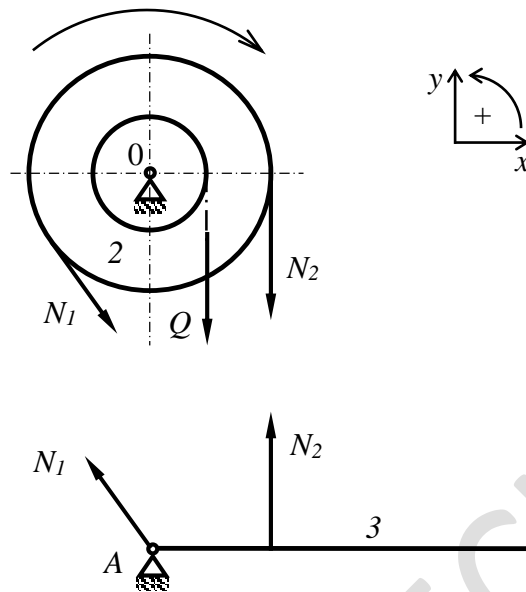
Dané: m_Q, r_1, r_2, a, b, f

Hľadané: \bar{F}



Obrázok 1.3.1

Riešenie: Pri pásových brzdách sa využíva trenie vlákna na valcovej ploche. Brzdový kotúč je obopnutý pásom, ktorý sa napína pákou. Pretože trenie v čapoch páky a bubna nie je dané, neberieme ho pri riešení do úvahy.



Obrázok 1.3.2

Pre výpočet veľkosti sily \bar{F} , ktorá má udržať bremeno o tiaži \bar{Q} v rovnováhe (rovnomernom pohybe) a vnútorných síl \bar{N}_1 a \bar{N}_2 stačí uvoľniť bubon a páku len čiastočne (obr. 1.3.2), pretože pre výpočet hľadaných síl nám postačia momentové podmienky rovnováhy bubna (a) a páky (b) a Eulerov vzťah vyjadrujúci vzájomnú závislosť veľkostí síl \bar{N}_1 a \bar{N}_2 (d).

Pre čiastočne uvoľnený bubon 2 a páku 3 napíšeme momentové podmienky rovnováhy

$$\sum M_{i0} = 0: \quad N_1 r_1 - N_2 r_1 - Q r_2 = 0 \quad (\text{a})$$

$$\sum M_{iA} = 0: \quad N_2 b - F a = 0 \quad (\text{b})$$

Veľkosť tiaže vypočítame

$$Q = m_Q g = 500 \cdot 9,81 = 4905 \text{ N} \doteq 5000 \text{ N} . \quad (\text{c})$$

Medzi veľkosťami síl \bar{N}_1 a \bar{N}_2 vo vzťahoch (a), (b) je vzájomná závislosť daná Eulerovým vzťahom. Pri danom zmysle otáčania bubna platí, že

$$N_1 > N_2 \quad \text{potom} \quad N_1 = N_2 e^{f \alpha} . \quad (\text{d})$$

kde uhol opásania α vyjadrený v radiánoch bude: $\frac{\alpha}{2\pi} = 0,6 \Rightarrow \alpha = 1,2\pi$.

Riešením rovníc (a), (b) dostaneme

$$N_2 e^{f \alpha} r_1 - N_2 r_1 = Q r_2 \Rightarrow N_2 = Q \frac{r_2}{r_1 (e^{f \alpha} - 1)} .$$

Z rovnováhy na páke vyplýva

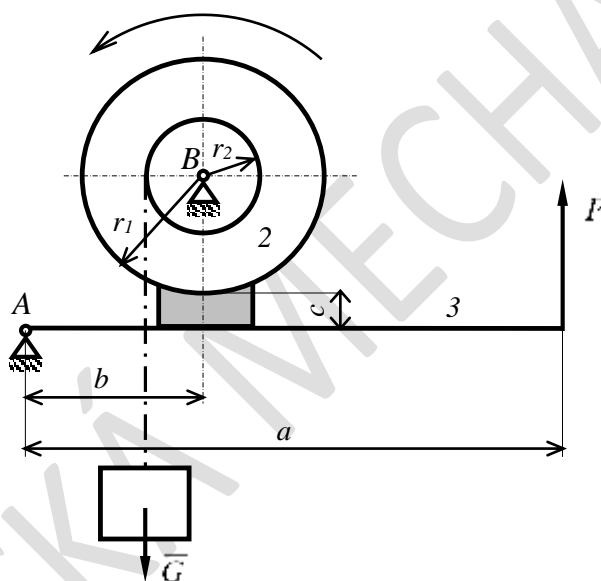
$$F = N_2 \frac{b}{a} = Q \frac{b r_2}{a r_1 (e^{f\alpha} - 1)} \quad [N].$$

Po dosadení číselných hodnôt: $N_2 = 1030 \text{ N}$, $N_1 = 2030 \text{ N}$, $F = 343 \text{ N}$.

PRÍKLAD 1.4: Na liatinovom bubne polomeru $r_2 = 100 \text{ mm}$ jednočelust'ovej brzdy je navinuté lano s bremenom o tiaži $G = 4 \text{ kN}$ (obr. 1.4.1). Vypočítajte veľkosť sily \bar{F} , ktorou musíme pôsobiť na konci páky pri rovnomernom spúšťaní bremena. Polomer brzdového kotúča $r_1 = 600 \text{ mm}$, ramená páky $a = 1200 \text{ mm}$, $b = 300 \text{ mm}$, $c = 100 \text{ mm}$, súčiniteľ šmykového trenia medzi bubnom a čelust'ou je $f = 0,4$.

Dané: $\bar{G}, r_1, r_2, a, b, c, f$

Hľadané: \bar{F}

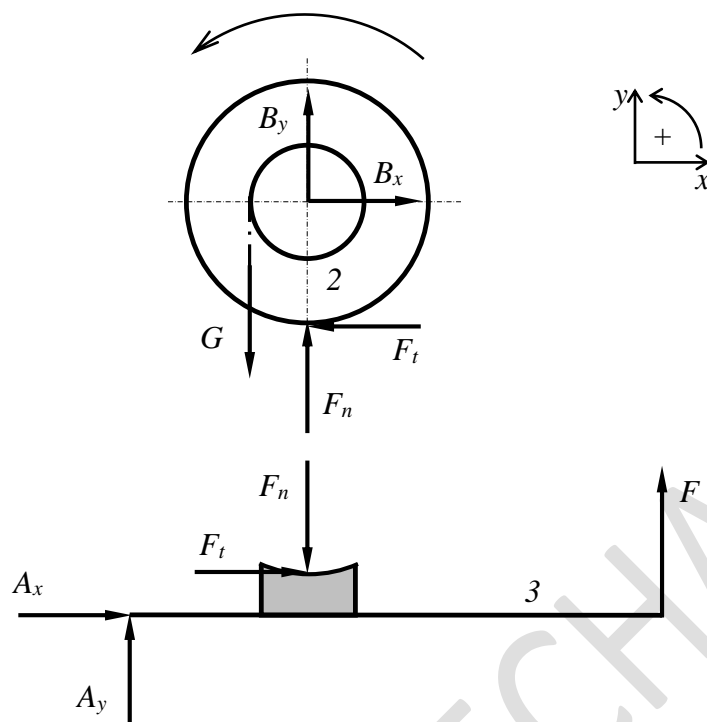


Obrázok 1.4.1

Riešenie: Jednočelust'ová brzda na obr. 1.4.1 predstavuje sústavu dvoch telies: brzdového kotúča (s bubnom) 2 a páky (s čelust'ou) 3. Pri riešení vychádzame z rovnováhy síl pôsobiacich na jednotlivé členy sústavy. Uvoľníme bubon a páku (obr. 1.4.2), ktoré v danom prípade predstavujú telesá v rovine. Väzby nahradíme príslušnými reakciami. Pri riešení môžeme zanedbať čapové trenie v čapoch A a B a neohybnosť lán, pretože sú veľmi malé a tiaž bubna a páky.

Pri uvoľňovaní je dôležité správne určiť orientáciu reakcií, zvlášť u reakcií od pasívnych odporov, ktoré pôsobia proti orientácii pohybu. Preto je vhodné v prípade vnútorných väzieb začať vždy uvoľnením pohyblivého člena sústavy. V našom prípade je to bubon 2, ktorý je pomocou čapu v bode B viazaný k rámu a vykonáva rotačný pohyb. Pôsobí naň tiaž závažia \bar{G} , reakcia v kĺbe \bar{B} a vo vnútornej väzbe medzi bubnom a pákou normálová reakcia \bar{F}_n a trecia sila \bar{F}_t vytvárajúca moment proti smeru otáčania bubna.

Pri zachovaní rovnováhy platí v každej vnútornej väzbe zákon akcie a reakcie. Potom sily \bar{F}_n a \bar{F}_t pôsobiace na páku budú orientované opačne. Na páku ďalej pôsobí reakcia \bar{A} v kĺbe a sila \bar{F} .



Obrázok 1.4.2

Pre uvoľnené telesá napíšeme podmienky rovnováhy a príslušné doplnkové rovnice:

Pre teleso 2:

$$\sum F_{ix} = 0: \quad B_x - F_t = 0 \quad (\text{a})$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad B_y - G + F_n = 0 \quad (\text{b})$$

$$\sum M_{iB} = 0: \quad G r_2 - F_t r_1 = 0 \quad (\text{c})$$

Pre teleso 3:

$$\sum F_{ix} = 0: \quad A_x + F_t = 0 \quad (\text{d})$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad A_y - F_n + F = 0 \quad (\text{e})$$

$$\sum M_{iA} = 0: \quad -F_t c - F_n b + F a = 0 \quad (\text{f})$$

Doplnková rovnica: $F_t = f F_n \quad (\text{g})$

Pre výpočet veľkosti sily \bar{F} použijeme rovnice (c), (f) a doplnkovú rovnicu (g). Z rovnice (c) (momentovej podmienky rovnováhy na brzdiacom kotúči) vyplýva

$$F_t = G \frac{r_2}{r_1}.$$

Dosadením do Coulombovho vzťahu (g)

$$F_t = f F_n$$

dostávame

$$F_n = \frac{F_t}{f} = G \frac{r_2}{f r_1}$$

a po dosadení F_n do rovnice (f) je:

$$-G \frac{r_2}{r_1} c - G \frac{r_2}{f r_1} b + F a = 0 \Rightarrow F = G \frac{r_2}{r_1 a} \left(\frac{b}{f} + c \right) \quad [N]$$

Po dosadení číselných hodnôt vypočítame veľkosť sily \bar{F} : $F = 47\,222\text{ N}$.

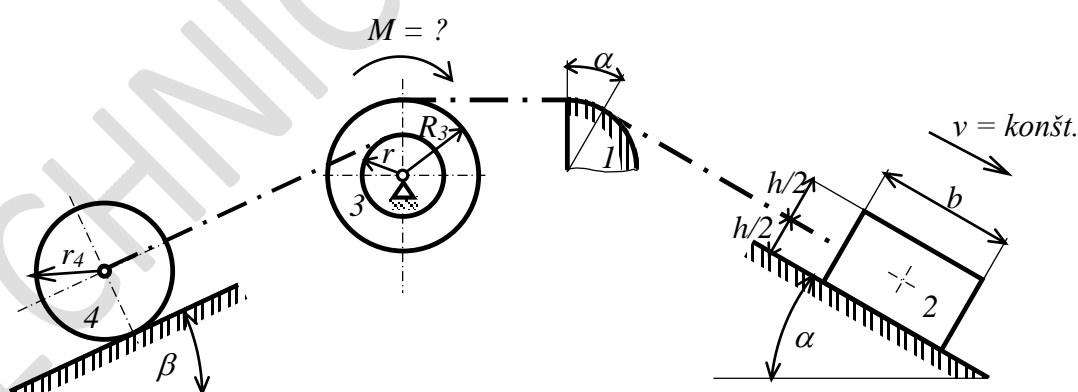
Poznámka: Ak by sme chceli určiť reakcie v bodoch A a B, použili by sme pre výpočet rovnice (a), (b), (d) a (e).

PRÍKLAD 1.5: Určte veľkosť momentu M pôsobiaceho na dvojité navíjací bubon sústavy telies podľa obr. 1.5.1 tak, aby bol zabezpečený jeho rovnomerný pohyb v naznačenom smere. Pri riešení zohľadnite všetky pasívne odpory vo väzbách.

Daná je tiaž hranola \bar{G}_2 , bubna \bar{G}_3 a tiaž valca \bar{G}_4 , rozmery b, h, R_3, r_3, r_4 , polomery čapov $r_{\varepsilon 3}, r_{\varepsilon 4}$ telies 3 a 4, koeficient šmykového trenia medzi hranolom a podložkou f_2 , koeficient šmykového trenia medzi lanom a podložkou f_1 , koeficienty čapového trenia $f_{\varepsilon 3}, f_{\varepsilon 4}$, rameno valivého odporu e , ramená neohybnosti lana ξ_1, ξ_2 pre polomery R_3 a r_3 a uhly sklonu naklonených rovín α, β .

Dané: $\bar{G}_2, \bar{G}_3, \bar{G}_4, b, h, R_3, r_3, r_4, \alpha, \beta, f_2, f_1, r_{\varepsilon 3}, r_{\varepsilon 4}, f_{\varepsilon 3}, f_{\varepsilon 4}, e, \xi$

Hľadané: M



Obrázok 1.5.1

Riešenie: Sústava telies môže vykonávať rovnomerný pohyb len pri pôsobení rovnovážnej silovej sústavy. Veľkosť momentu M určíme metódou postupného uvoľňovania z podmienok rovnováhy silových sústav pôsobiacich na jednotlivé telesá. Na obr. 1.5.2, obr. 1.5.3 a obr. 1.5.4 sú uvoľnené telesá 2, 3, 4. Účinky odstránených väzieb sú v obrázkoch nahradené

väzbovými reakciami a príslušnými účinkami (silami a momentami) od pasívnych odporov vo väzbách. Súradnicové sústavy sú zvolené tak, aby riešenie systému rovníc, ktoré dostaneme z príslušných podmienok rovnováhy, bolo čo najjednoduchšie.

Teleso 2 (obr. 1.5.2) sa posúva po naklonenej rovine smerom dolu. Pôsobí naň jeho tiažová sila \bar{G}_2 a v mieste dotyku telesa s podložkou normálová sila \bar{F}_{n2} a trecia sila \bar{F}_{t2} , ktorá je orientovaná proti smeru pohybu. Nositeľka normálovej sily \bar{F}_{n2} sa posúva v smere pohybu telesa o rameno šmykového trenia n od zvislej osi symetrie telesa. Dĺžka ramena n je jednou z neznámych pri riešení úlohy.

Telesá 2 a 3 sú spojené lanom. V dôsledku trenia lana (vlákna) na valcovej ploche osových síl \bar{N}_2 a \bar{N}_3 nie sú rovnako veľké. Vzájomný pomer veľkosti síl \bar{N}_2 a \bar{N}_3 je vyjadrený Eulerovým vzťahom (e).

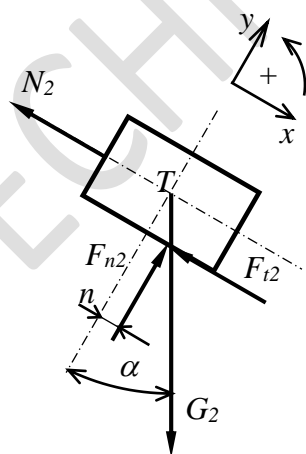
Teleso 3 (obr. 1.5.3) vykonáva rotačný pohyb. K rámu je viazané pomocou čapu A, ktorý nahradíme reakciou so súradnicovými zložkami A_x , A_y . Súčasne pri rotačnom pohybe telesa dochádza k čapovému treniu v radiálnom čape A vyjadrenému momentom čapového trenia $M_{\varepsilon 3}$ orientovanému proti smeru otáčania telesa 3.

Telesá 3 a 4 sú tiež spojené lanom. Vplyvom nedokonalkej ohybnosti lán sa mení poloha nositeľiek osových síl, ktoré v nich pôsobia vzhľadom na polohu osi rotácie. Z časti telesa 3 o polomere R_3 sa lano odvíja, kolmá vzdialenosť nositeľky sily \bar{N}_3 od bodu A daná polomerom R_3 sa zmenší o rameno neohybnosti lana ξ . Na druhú časť telesa 3 sa lano navíja, kolmá vzdialenosť nositeľky sily \bar{N}_4 od bodu A daná polomerom r_3 sa zväčší o rameno neohybnosti lana ξ .

Teleso 4 (obr. 1.5.4) sa valí po naklonenej rovine. Pôsobí naň jeho tiažová sila \bar{G}_4 , v čape B osová sila v lane \bar{N}_4 a moment čapového trenia $M_{\varepsilon 4}$, v mieste dotyku telesa 4 s podložkou normálová sila \bar{F}_{n4} a dotyčnicová sila \bar{F}_{T4} pôsobiaca proti možnému prešmyknutiu telesa. Normálová sila \bar{F}_{n4} je v dôsledku valivého pohybu od zvislej osi symetrie telesa posunutá v smere pohybu o rameno valivého odporu e .

Pre uvoľnené telesá platia podmienky rovnováhy:

Teleso 2



Obrázok 1.5.2

$$\sum F_{ix} = 0: -N_2 - F_{t2} + G_2 \sin \alpha = 0 \quad (a)$$

$$\sum F_{iy} = 0: F_{n2} - G_2 \cos \alpha = 0 \quad (b)$$

$$\sum M_{iT} = 0: -F_{t2} \frac{h}{2} + F_{n2} n = 0 \quad (c)$$

kde veľkosť trecej sily je daná Coulombovým vzťahom

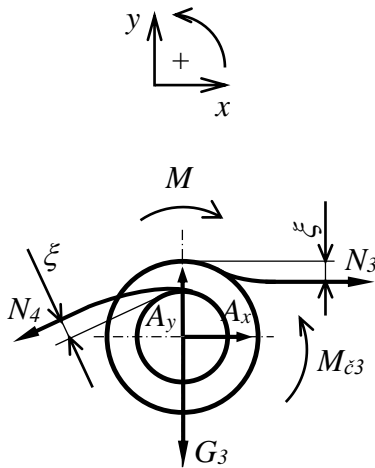
$$F_{t2} = f_2 F_{n2} \quad (d)$$

pre sily $N_2 \rangle N_3$ platí Eulerov vzťah

$$N_2 = N_3 e^{f_1 \hat{\alpha}} \quad (e)$$

$\hat{\alpha}$ je uhol opásania lana vyjadrený v radiánoch.

Teleso 3



Obrázok 1.5.3

$$\sum F_{ix} = 0: A_x + N_3 - N_4 \cos \beta = 0 \quad (f)$$

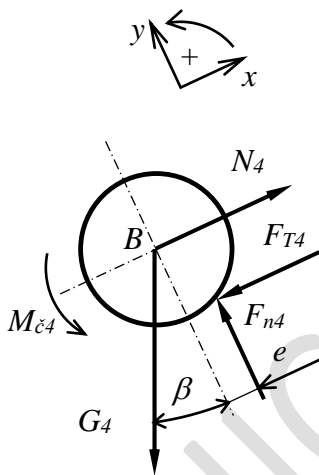
$$\sum F_{iy} = 0: A_y - N_4 \sin \beta - G_3 = 0 \quad (g)$$

$$\sum M_{iA} = 0: M_{\epsilon 3} - M - N_3 (R_3 - \xi) + N_4 (r_3 + \xi) = 0 \quad (h)$$

kde moment čapového trenia je vyjadrený vzťahom

$$M_{\epsilon 3} = r_{\epsilon 3} f_{\epsilon 3} \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad (i)$$

Teleso 4



Obrázok 1.5.4

$$\sum F_{ix} = 0: N_4 - F_{T4} - G_4 \sin \beta = 0 \quad (j)$$

$$\sum F_{iy} = 0: F_{n4} - G_4 \cos \beta = 0 \quad (k)$$

$$\sum M_{iB} = 0: M_{\epsilon 4} + F_{n4} e - F_{T4} r_4 = 0 \quad (l)$$

Pre moment čapového trenia v čape B platí

$$M_{\epsilon 4} = r_{\epsilon 4} f_{\epsilon 4} N_4. \quad (m)$$

Veľkosť momentu M a neznámych reakcií vo všetkých väzbách dostaneme riešením systému 13 rovníc o 13 neznámych.

Pre zjednodušenie výpočtu je možné výraz $\sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ vo vzťahu (i), vyjadrujúci veľkosť výslednej sily pôsobiacej v čape, nahradiť lineárnym výrazom podľa Ponceleta:

$$\sqrt{A_x^2 + A_y^2} \cong 0,4|A_x| + 0,96|A_y| \quad (n)$$

ktorý v uvedenom tvare platí pre $|A_x| > |A_y|$.

Pre prípad $|A_x| < |A_y|$ zameníme vo vzťahu (n) koeficienty:

$$\sqrt{A_x^2 + A_y^2} \cong 0,96|A_x| + 0,4|A_y| \quad (o)$$

Potom s ohľadom na vzťah (n), resp. (o) veľkosť momentu čapového trenia vyjadríme vzťahom pre približný výpočet

$$M_{\varepsilon 3} \doteq r_{\varepsilon 3} f_{\varepsilon 3} \left[0,4|A_x| + 0,96|A_y| \right] \quad (\text{p})$$

resp.

$$M_{\varepsilon 3} \doteq r_{\varepsilon 3} f_{\varepsilon 3} \left[0,96|A_x| + 0,4|A_y| \right] \quad (\text{r})$$

Približný *Ponceletov vzťah* pre vyjadrenie veľkosti reakcie v čape je dostatočne presný. Je preto výhodné použiť ho pri riešení rovnovážnych rovníc pri sústavách telies s pasívnymi odpormi.