OBSAH

1 Základné pojmy, princípy a axiómy statiky 2
1.1 Základné pojmy 2
1.1.1 Tuhé teleso 2
1.1.2 Hmotný bod 2
1.1.3 Sila a moment sily 2
1.1.4 Jednotky sily a momentu 4
1.1.5 Silové sústavy 4
1.1.6 Rozdelenie síl podľa pôsobenia 5
1.1.7 Rozklad sily, zložky sily 5
1.1.8 Varignonova – momentová veta 7
1.2 Základné princípy a axiómy Statiky 7
1.2.1 Axióma zotrvačnosti (1. Newtonov zákon) 7
1.2.2 Axióma akcie a reakcie (3. Newtonov zákon) 7
1.2.3 Axióma zachovania účinku 8
1.2.4 Axióma vektorového skladania síl 8
2 Pohyblivosť a väzby hmotných objektov 14
2.1 Väzby a väzbové reakcie 14
2.2 Stupne voľnosti pohybu a väzbová závislosť hmotných objektov 15
2.2.1 Tvarová a statická určitosť 15
2.3 Hmotný bod v rovine 16
2.3.1 Stupne voľnosti a väzbová závislosť hmotného bodu v rovine 16
2.3.2 Väzby hmotného bodu v rovine 16
2.3.3 Výnimočné prípady väzieb hmotného bodu v rovine 17
2.4 Hmotný bod v priestore 18
2.4.1 Stupne voľnosti a väzbová závislosť hmotného bodu v priestore 18
2.4.2 Väzby hmotného bodu v priestore 18
2.4.3 Výnimočné prípady väzieb hmotného bodu v priestore 20
2.5 Teleso v rovine 20
2.5.1 Stupne voľnosti a väzbová závislosť telesa v rovine 20
2.5.2 Väzby telesa v rovine 20
2.5.3 Výnimočné prípady väzieb telesa v rovine 22
2.6 Teleso v priestore 23
2.6.1 Stupne voľnosti a väzbová závislosť telesa v priestore 23
2.6.2 Väzby telesa v priestore 23
2.6.3 Výnimočné prípady väzieb telesa v priestore 24
2.7 Metodika riešenia úloh rovnováhy hmotných objektov 25

1 ZÁKLADNÉ POJMY, PRINCÍPY A AXIÓMY STATIKY

1.1 ZÁKLADNÉ POJMY

1.1.1 Tuhé teleso

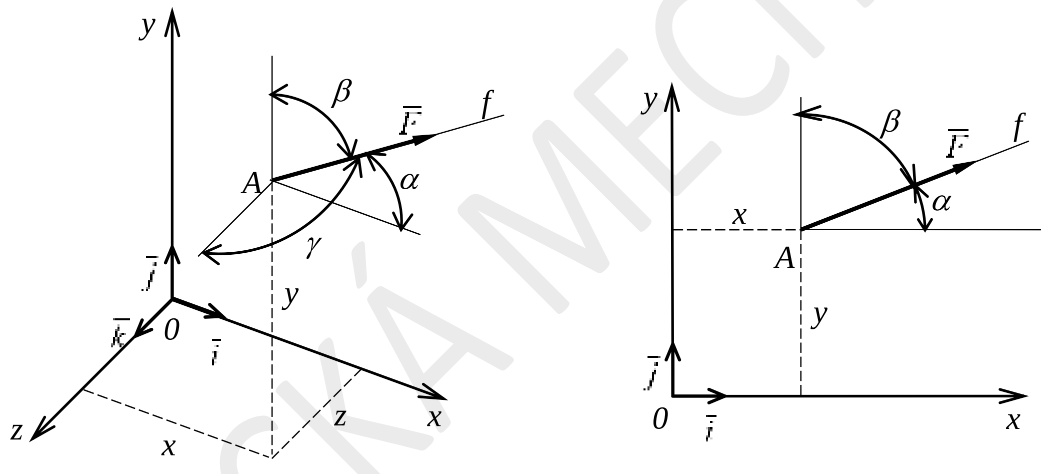
- rozumie sa dokonale tuhé teleso – teleso, útvar, v ktorom sa pri pohybe vzájomná vzdialenosť dvoch ľubovoľných bodov nemení.

1.1.2 Hmotný bod

- hmotný útvar, ktorého rozmery možno zanedbať. V statike rozumieme bod telesa, v ktorom si predstavujeme sústredenú hmotu celého telesa.

1.1.3 Sila a moment sily

Sila je základnou mierou účinku dvoch objektov. Sila je vektorová veličina. Sila *je vektor viazaný k priamke*.



a) *b)*

Obrázok 1.1

- Sila v priestore (*obr. 1.1a*) je jednoznačne určená 6 parametrami: pôsobiskom A(x, y, z) – 3 parametre, veľkosťou F – 1 parameter, polohou f a orientáciou – uhlami α, β, (γ) – 2 nezávislé parametre, keďže uhly sú navzájom viazané vzťahom

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

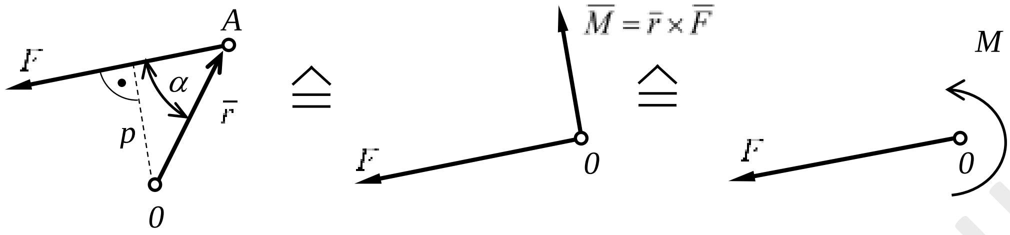
- Sila v rovine (*obr. 1.1b*) je jednoznačne určená 4 parametrami: A(x, y), F, α (β), pretože

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$$

Sila má účinok:

- *posuvný* – rovnaký na všetky body objektu, na ktorý sila pôsobí – rovný veľkosti sily,
- *otáčavý*, ktorý je iný na každý bod objektu. Veľkosť otáčavého účinku je závislá na kolmej vzdialenosti bodu od nositeľky sily a je určená momentom sily k danému bodu.

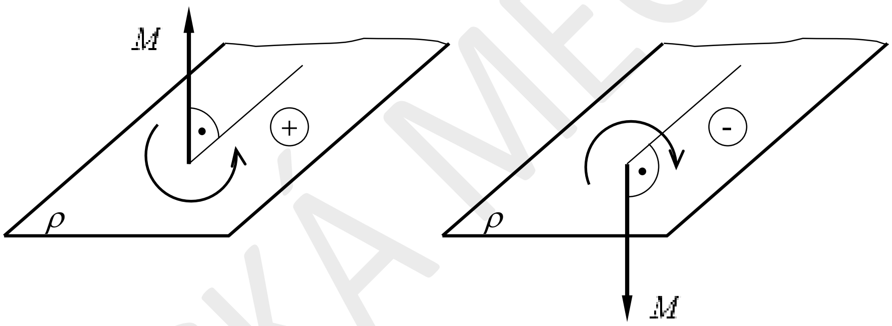
Moment sily - je vektor definovaný ako vektorový súčin $\overline{M} = \overline{r} \times \overline{F}$. Absolútna veľkosť momentu sily k ľubovoľnému bodu napr. A sa rovná súčinu sily a ramena sily – jej kolmej vzdialenosti od tohto bodu (*obr. 1.2*).



$$M = r\,F \sin\alpha = p\,F$$

Obrázok 1.2

Orientácia vektora momentu sily je daná zmyslom otáčania sily $\overline{F}$ vzhľadom k bodu *A*. Moment sily je *kladný*, ak sa otáčanie deje *proti zmyslu* otáčania hodinových ručičiek.
Vektor momentu sa znázorní ako vektor *kolmý* na rovinu otáčania. Orientácia vektora sa určí podľa *pravidla pravej ruky* (prsty pravej ruky ukazujú zmysel otáčania, palec pravej ruky ukazuje smer a zmysel vektora $\overline{M}$) (*obr. 1.3*).

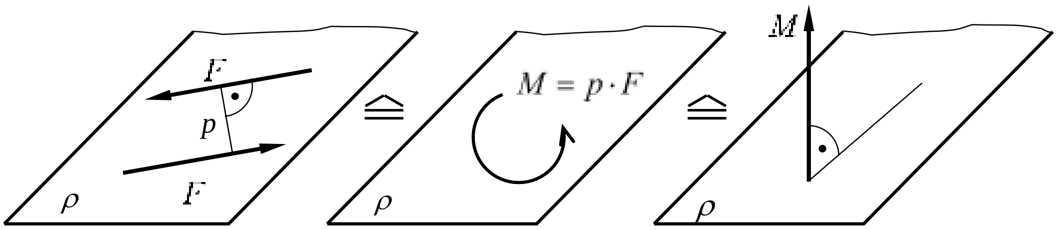


Obrázok 1.3

Silová dvojica (moment) - dve sily navzájom rovnobežné, rovnako veľké, opačne orientované, neležiace na jednej nositeľke. Silová dvojica *nemá posuvný účinok*, má len účinok otáčavý, rovný súčinu jednej zo síl a kolmej vzdialenosti medzi silami. Účinok silovej dvojice je daný jej momentom (*obr. 1.4*)

$$M = pF\ .$$

Vektor momentu silovej dvojice $\overline{M}$ je *vektor voľný*, t.j. môžeme ho v priestore ľubovoľne posúvať a je *kolmý* na rovinu pôsobenia silovej dvojice.



Obrázok 1.4

1.1.4 Jednotky sily a momentu

Hlavnou jednotkou pre silu je 1 Newton [N]. Je to sila, ktorá udelí hmotnosti 1 kg zrýchlenie $1 m.s^{-2}$, teda

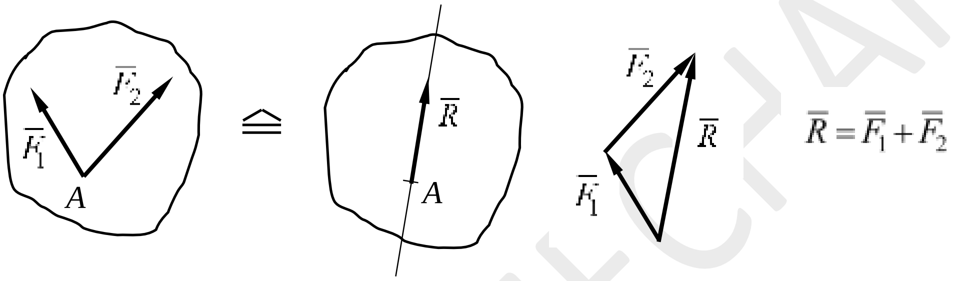
$$1\ N = 1\ kg.m.s^{-2}.$$

Hlavnou jednotkou momentu je 1 N.m [N.m].

1.1.5 Silové sústavy

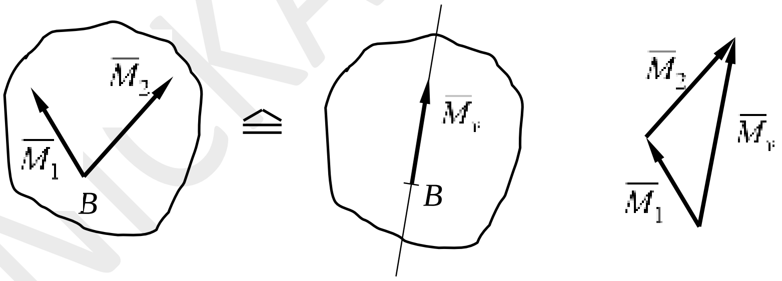
Dve a viac síl pôsobiacich na jeden objekt tvorí *silovú sústavu*.

- Ak silovú sústavu možno nahradiť jedinou silou $\overline{R}$, nazýva sa táto sila *výslednicou* danej silovej sústavy. Silová sústava má potom *posuvný účinok* v smere nositeľky výslednice $\overline{R}$ (*obr. 1.5*).

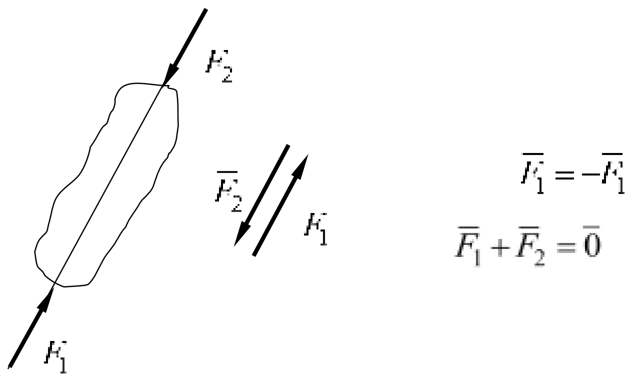


Obrázok 1.5

- Ak silovú sústavu možno nahradiť jediným momentom $\overline{M}_v$, je to tzv. *výsledný moment* danej silovej sústavy. Silová sústava má potom *otáčavý účinok* v rovine kolmej na moment $\overline{M}_v$ (*obr. 1.6*).



Obrázok 1.6



Obrázok 1.7

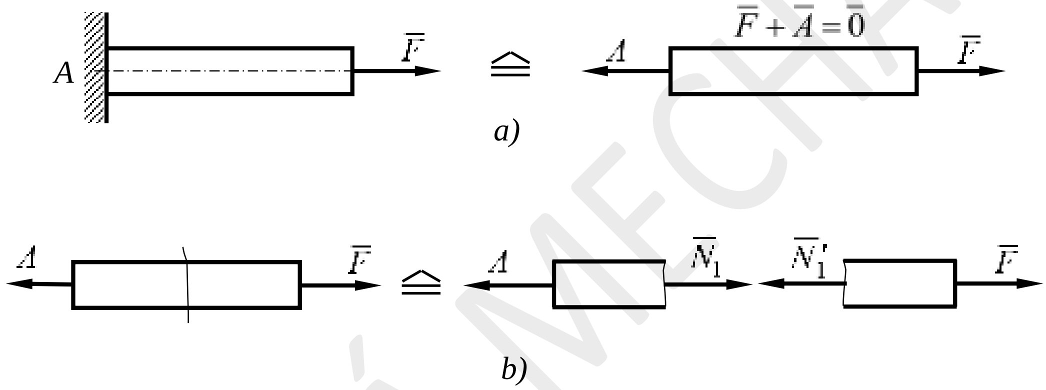
- Vo všeobecnosti má silová sústava účinok posuvný aj otáčavý.

- Silová sústava je *v rovnováhe*, ak výsledný posuvný a otáčavý účinok je nulový. Najjednoduchšou rovnovážnou silovou sústavou sú dve sily na jednej nositeľke rovnako veľké, opačne orientované (*obr. 1.7*).

1.1.6 Rozdelenie síl podľa pôsobenia

Sily delíme na:

- *vonkajšie* (*obr. 1.8a*), vyjadrujúce účinok okolitých útvarov na vyšetrovaný objekt. Sú to sily *zaťažujúce* – primárne ($\overline{F}$) a *väzbové reakcie* – sekundárne ($\overline{A}$), závislé od zaťažujúcich síl,
- *vnútorné* (*obr. 1.8b*), vyjadrujúce účinok jednej časti telesa (sústavy) na druhú ($\overline{N}_1$, $\overline{N}_1'$). Vnútorné sily sú spôsobené vonkajšími silami.

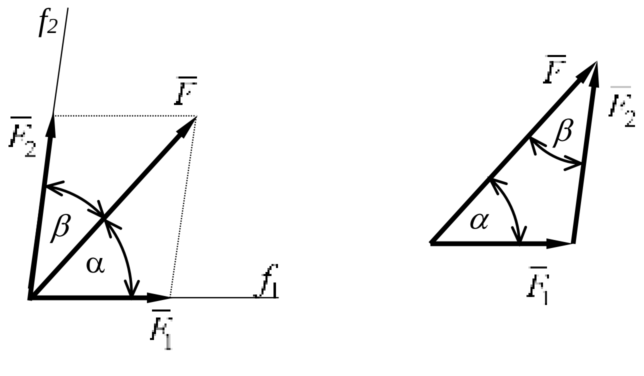


Obrázok 1.8

1.1.7 Rozklad sily, zložky sily

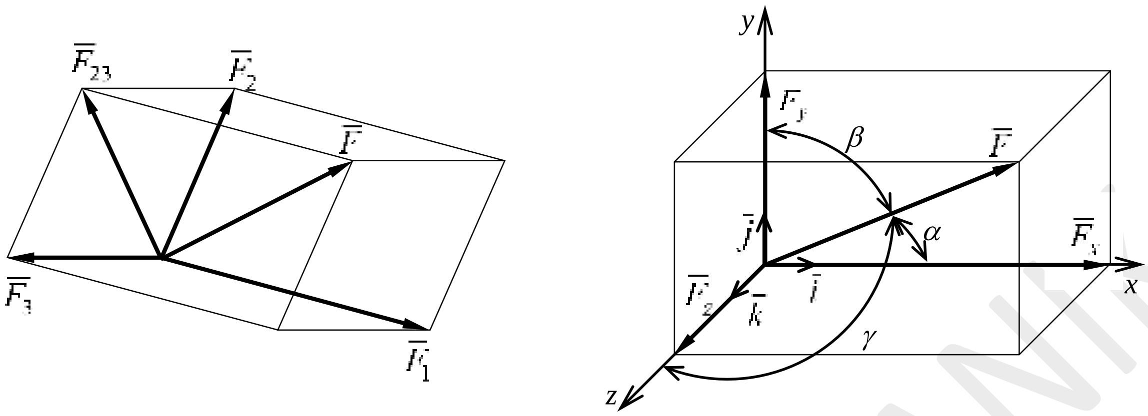
Silu $\overline{F}$ v danom bode v rovine môžeme jednoznačne rozložiť do dvoch zložiek $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$. Ak je daná sila $\overline{F}$ a smery nositeliek jej zložiek (dané uhlami α, β), môžeme určiť veľkosti jej zložiek F_1, F_2 (*obr. 1.9*). Ak je sila $\overline{F}$ výslednicou síl $\overline{F}_1$ a $\overline{F}_2$, potom

$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$$



Obrázok 1.9

V priestore je možné silu jednoznačne rozložiť do jej troch nekomplanárnych zložiek (*obr. 1.10a*)



a) *b)*

Obrázok 1.10

$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_{23}$$
$$\overline{F}_{23} = \overline{F}_2 + \overline{F}_3$$
$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$$

Ak sú zložky sily navzájom *kolmé*, môžeme do ich smerov umiestniť súradnicové osi. Označíme ich $\overline{F}_x, \overline{F}_y, \overline{F}_z$ a nazveme *pravouhlými zložkami* danej sily (*obr. 1.10b*).

$$\overline{F} = \overline{F}_x + \overline{F}_y + \overline{F}_z$$

V pravouhlej súradnicovej sústave sú veľkosti zložiek

$$F_x = \overline{F} \cdot \bar{i} = F \cos\alpha$$
$$F_y = \overline{F} \cdot \bar{j} = F \cos\beta \qquad \bar{i}, \bar{j}, \bar{k} \text{ - jednotkové vektory}$$
$$F_z = \overline{F} \cdot \bar{k} = F \cos\gamma$$

Zložky môžeme vyjadriť

$$\overline{F}_x = F_x \bar{i}$$
$$\overline{F}_y = F_y \bar{j}$$
$$\overline{F}_y = F_z \bar{k}$$

Výsledná sila je potom vyjadrená vzťahom

$$\overline{F} = F_x \bar{i} + F_y \bar{j} + F_z \bar{k} \,.$$

Ak poznáme veľkosti zložiek sily, jej veľkosť bude

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \,.$$

a jej smer určíme uhlami $\alpha, \beta, (\gamma)$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}\,, \qquad \cos\beta = \frac{F_y}{F}\,, \qquad \cos\gamma = \frac{F_z}{F}\,.$$

1.1.8 Varignonova – momentová veta

Moment sily k danému bodu sa rovná súčtu momentov jej zložiek k tomu istému bodu. Podľa *obr. 1.11* moment sily $\overline{F}$ k bodu 0 je

$$\overline{M}_0 = \overline{r} \times \overline{F}\,.$$

Pretože

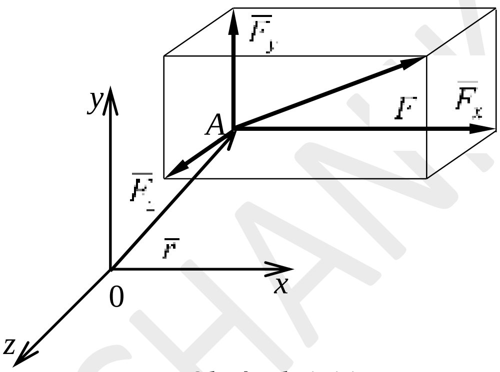
$$\overline{F} = \overline{F}_x + \overline{F}_y + \overline{F}_z\,,$$

$$\overline{M}_0 = \overline{r} \times \left(\overline{F}_x + \overline{F}_y + \overline{F}_z\right)$$

je

$$\overline{M}_0 = \overline{r} \times \overline{F}_x + \overline{r} \times \overline{F}_y + \overline{r} \times \overline{F}_z$$

$$\overline{M}_0 = \overline{M}_{0Fx} + \overline{M}_{0Fy} + \overline{M}_{0Fz}$$



Obrázok 1.11

1.2 ZÁKLADNÉ PRINCÍPY A AXIÓMY STATIKY

Axióma je základná poučka, ktorá sa prijíma bez dôkazov. Vychádza obyčajne z experimentálnych skúsenosti.

Klasická mechanika je postavená na troch základných Newtonových zákonoch:

- *Zákon zotrvačnosti* (1. Newtonov zákon)
- *Zákon sily* (2. Newtonov zákon)
- *Zákon akcie a reakcie* (3. Newtonov zákon)

Statika sa opiera o tieto základné axiómy:

1.2.1 Axióma zotrvačnosti (1. Newtonov zákon)

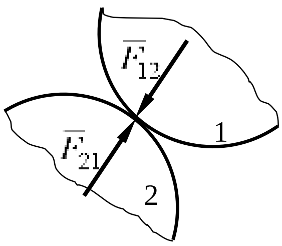
Teleso, ktoré je v relatívnom pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe, ostáva v tomto stave, pokým naň nepôsobí žiadna vonkajšia sila, alebo ak naň pôsobí rovnovážna silová sústava.

1.2.2 Axióma akcie a reakcie (3. Newtonov zákon)

Každej akcii odpovedá rovnako veľká, opačne orientovaná reakcia. To znamená, že účinok jedného telesa na druhé je rovnako veľký len opačne orientovaný, ako účinok druhého telesa na prvé (*obr. 1.12*).

$$\overline{F}_{12} + \overline{F}_{21} = \overline{0}$$

$$\overline{F}_{12} = -\overline{F}_{21}$$



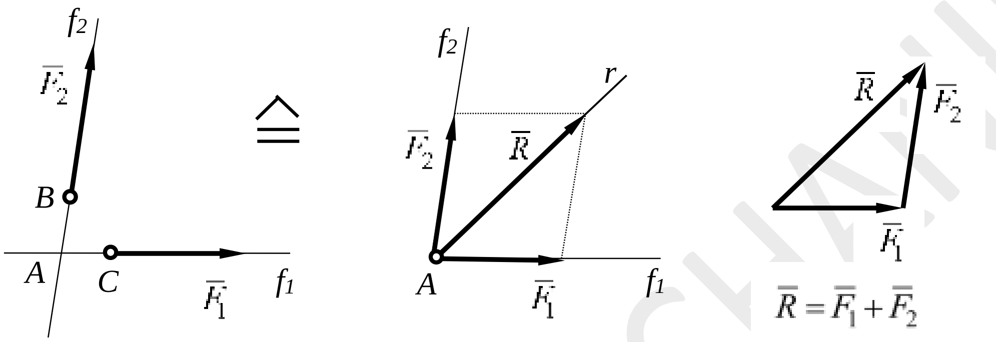
Obrázok 1.12

1.2.3 Axióma zachovania účinku

Účinok danej silovej sústavy sa nezmení, ak k nej pridáme, alebo od nej odoberieme rovnovážnu silovú sústavu.

1.2.4 Axióma vektorového skladania síl

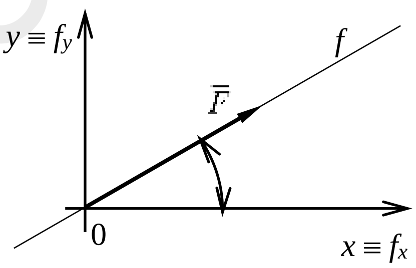
Výslednica $\overline{R}$ dvoch rôznobežných síl $\overline{F}_1$ a $\overline{F}_2$ sa rovná ich vektorovému súčtu $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$ a prechádza vždy priesečníkom ich nositeliek (*obr. 1.13*)



Obrázok 1.13

RIEŠENÉ PRÍKLADY

PRÍKLAD 1.1: V počiatku zvolenej súradnicovej sústavy 0(*x*, *y*) pôsobí sila $\overline{F}$ o veľkosti F = 6 kN (*obr. 1.1.1*). Smer nositeľky sily $\overline{F}$ je daný uhlom α = 30°. Rozložte silu $\overline{F}$ na zložky $\overline{F}_x$, $\overline{F}_y$, ktorých nositeľky f_x, f_y sú totožné so súradnicovými osami *x*, *y*.



Obrázok 1.1.1

Riešenie: Pri rozklade sily $\overline{F}$, ktorá leží na nositeľke *f* na zložky, nahradíme výslednú silu $\overline{F}$ ekvivalentnou sústavou síl $\overline{F}_x$, $\overline{F}_y$ ležiacich na nositeľkách f_x, f_y. Ak nositeľky f_x, f_y sú totožné so súradnicovými osami *x*, *y*, potom sily $\overline{F}_x$, $\overline{F}_y$ sú vlastne súradnicovými zložkami sily $\overline{F}$ v danej súradnicovej sústave. Pri riešení vychádzame zo základnej vektorovej podmienky nahradenia (a), pričom rozklad sily $\overline{F}$ je možné vykonať viacerými spôsobmi.

$$\overline{F} = \overline{F}_x + \overline{F}_y \qquad \text{(a)}$$

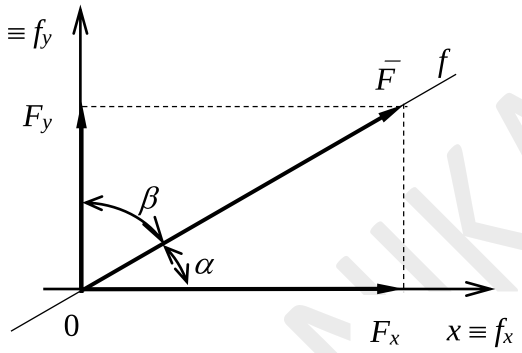
Analytické riešenie:

- Riešenie pomocou kosínusov smerových uhlov α, β, ktoré zviera nositeľka f sily $\bar{F}$ s nositeľkami f_x, f_y (*obr. 1.1.2*).

$$\beta = 90° - \alpha = 90° - 30° = 60°$$

$$F_x = F\cos\alpha = 6\cos 30° = 5{,}196kN$$

$$F_y = F\cos\beta = 6\cos 60° = 3kN$$



Obrázok 1.1.2

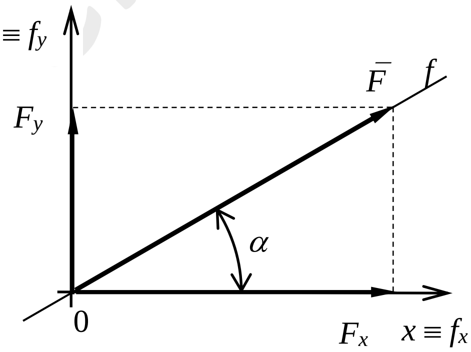
- Druhý spôsob riešenia využíva trigonometrické vzťahy platiace pre pravouhlý trojuholník. Na základe *obr. 1.1.3* pre veľkosti síl F, F_x, F_y platí

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} \quad \Rightarrow \quad F_x = F\cos\alpha$$

$$F_x = 6\cos 30° = 5{,}196\,kN$$

$$\sin\alpha = \frac{F_y}{F} \quad \Rightarrow \quad F_y = F\sin\alpha$$

$$F_y = 6\sin 30° = 3\,kN$$

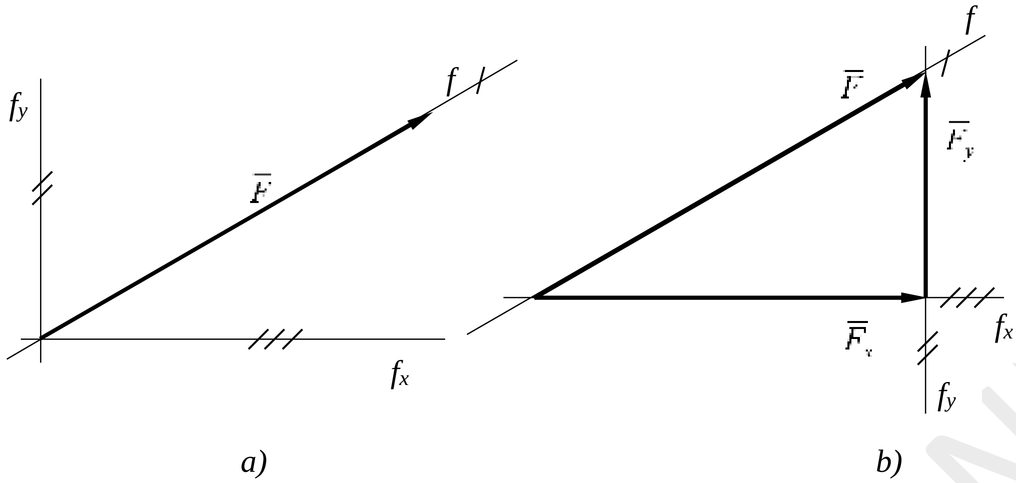


Obrázok 1.1.3

Grafické riešenie:

Silu $\bar{F}$ môžeme nahradiť ekvivalentnou sústavou síl $\bar{F}_x$, $\bar{F}_y$. Ide tu o grafické sčítanie vektorov síl v tzv. *silovom obrazci*. Sila $\bar{F}$, ako výslednica dvoch rôznobežných síl so spoločným pôsobiskom nanesených do silového obrázka ľubovoľnom poradí, je orientovanou úsečkou vychádzajúcou z počiatočného bodu prvej sily a vstupujúcou do koncového bodu druhej sily.
Pri samotnom riešení vychádzame z *obrázku 1.1.4a*, v ktorom zakreslíme známu silu $\bar{F}$ a známe parametre hľadaných síl. V prípade síl $\bar{F}_x$, $\bar{F}_y$ poznáme ich nositeľky. V tomto obrázku je dôležité správne zakresliť vektory jednotlivých síl (ich smery). Silový obrazec (*obr. 1.1.4b*) zostrojíme následovne:
Na rovnobežku s nositeľkou f nanesieme veľkosť sily $\bar{F}$ vo vhodne zvolenej mierke síl m_F. Počiatočným a koncovým bodom vektora sily $\bar{F}$ vedieme rovnobežky s nositeľkami f_x, *a* f_y v ľubovoľnom poradí. Dostaneme uzavretý trojuholník, ktorého odvesny predstavujú veľkosti hľadaných síl. Orientácia týchto síl je v silovom obrazci opačná k orientácii ich výslednice $\bar{F}$. Odmeraním dĺžky grafických obrazov hľadaných síl a ich porovnaním s mierkou síl dostaneme skutočné veľkosti týchto síl.

$$m_F = \frac{1kN}{1cm} \qquad\qquad \bar{F} = \bar{F}_x + \bar{F}_y$$

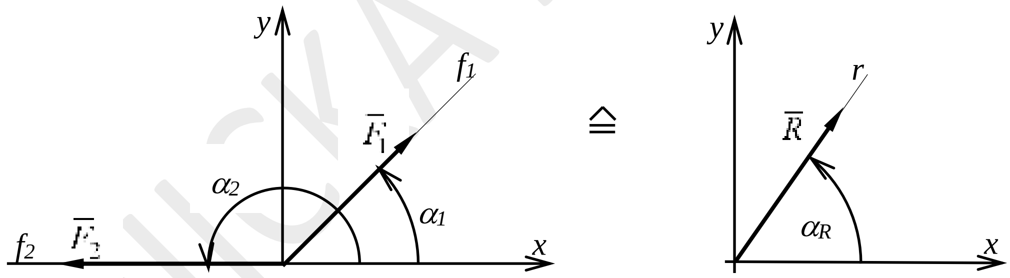


Obrázok 1.1.4

$F_{xg} = 5{,}2cm \quad \Rightarrow \quad F_x = F_{xg}\, m_F = 5{,}2kN$

$F_{yg} = 3cm \quad \Rightarrow \quad F_y = F_{yg}\, m_F = 3kN$

PRÍKLAD 1.2: Dané sú dve sily $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ (*obr. 1.2.1*) veľkosti $F_1 = 300$N, $F_2 = 250$N. Nositeľka f_1 sily $\overline{F}_1$ zviera s kladnou poloosou*x*uhol $\alpha_1 = 45°$, nositeľka f_2 sily $\overline{F}_2$uhol $\alpha_2 = 180°$. Nahraďte sily $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ výslednou silou $\overline{R}$ a určte jej pravouhlé súradnicové zložky. Úlohu riešte analyticky a graficky.



Obrázok 1.2.1

Riešenie: Pre výslednicu $\overline{R}$ vo všeobecnosti platí:

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{2} \overline{F}_i$$
$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 \qquad \text{(a)}$$

Analytické riešenie:

Veľkosť výslednej sily $\overline{R}$ vypočítame pomocou zložkových rovníc:

$$R_x = \sum_{i=1}^{2} F_{ix}\,, \qquad R_y = \sum_{i=1}^{2} F_{iy} \qquad \text{(b)}$$

Veľkosti súradnicových zložiek jednotlivých síl v zvolenej súradnicovej sústave vypočítame zo vzťahov:

$$F_{1x} = F_1 \cos\alpha_1 = 300\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 212{,}13\,N$$

$$F_{2x} = F_2 \cos\alpha_2 = 250(-1) = -250N \qquad \text{(c)}$$

$$F_{1y} = F_1 \sin\alpha_1 = 300\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 212{,}13N$$

$$F_{2y} = F_2 \sin\alpha_2 = 250 \cdot 0 = 0$$

Poznámka: *Znamienko mínus pred silou F_2 znamená, že sila je orientovaná proti kladnému zmyslu osi x.*

Dosadením do zložkových rovníc (b) dostaneme:

R_x = -37,87N , R_y= 212,13N

Veľkosť výslednice R určíme z Pythagorovej vety:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-37{,}87)^2 + 212{,}13^2} = 215{,}48N$$

Smer a orientáciu výslednice určuje smerový uhol α_R, ktorý zviera nositeľka výslednice s kladnou poloosou*x*, meraný od kladnej poloosi *x* v kladnom zmysle (proti zmyslu otáčania hodinových ručičiek).

$$\cos\alpha_R = \frac{R_x}{R} = \frac{-37{,}87}{215{,}48} = \underline{-0{,}175} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{\alpha_R = 100°\,5'}}$$

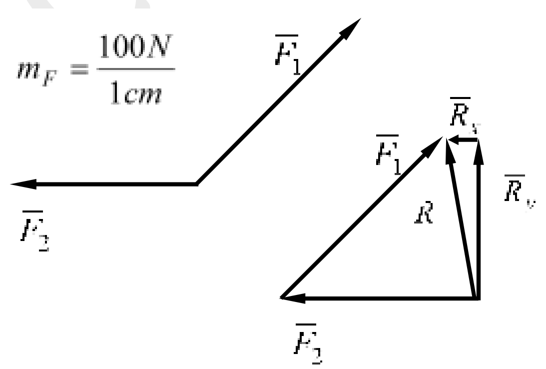
Grafické riešenie: Pre výslednú silu $\overline{R}$ platí vektorová podmienka nahradenia:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 \qquad \text{(d)}$$

Grafickým vyjadrením danej vektorovej rovnice je silový obrazec (*obr. 1.2.2*), ktorý dostaneme vektorovým sčítaním síl $\overline{F}_1, \overline{F}_2$. Sily nanesieme v zvolenej mierke síl m_F do silového obrázka v ľubovoľnom poradí za sebou. Ich výslednicou je orientovaná úsečka vychádzajúca z počiatočného bodu prvej sily a vstupujúca do koncového bodu druhej sily. Veľkosť výslednej sily určíme odmeraním dĺžky jej grafického obrazu a porovnaním s mierkou síl.

Grafickým rozkladom výslednice $\overline{R}$ do smerov súradníc *x, y*dostaneme $\overline{R}_x$, $\overline{R}_y$.

$$R_g = 2{,}2cm \quad \Rightarrow \quad R = R_g\, m_F = 220N$$



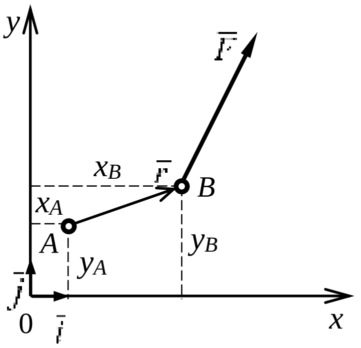
$$R_{xg} = 0{,}4cm \quad \Rightarrow \quad R_x = R_g\, m_F = -40N$$

$$R_{yg} = 2\,cm \quad \Rightarrow \quad R_y = R_{yg}\, m_F = 200N$$

Grafickým rozkladom výslednice $\overline{R}$ do smerov súradníc *x,y* dostaneme $\overline{R}_x$, $\overline{R}_y$.

Obrázok 1.2.2

PRÍKLAD 1.3: Určte moment sily danej súradnicami $\bar{F}\,(2{,}4)[N]$ ležiacej v rovine $0,x,y$ k bodu $A(1{,}2)$ [m]. Pôsobiskom danej sily je bod $B(4{,}3)$ [m] (*obr. 1.3.1*).



Obrázok 1.3.1

Silu $\bar{F}$ vyjadríme v tvare: $\bar{F} = 2\bar{i} + 4\bar{j} \quad [N]$,
kde veľkosti súradnicových zložiek: $F_x = 2\text{N}, \quad F_y = 4\text{N}.$

Polohový vektor pôsobiska sily (bodu B) ku vzťažnému bodu A:

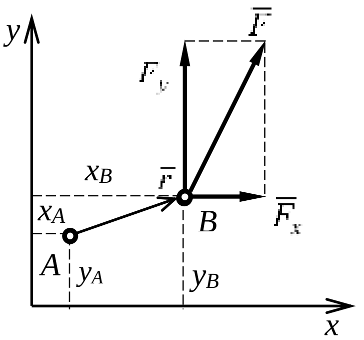
$$\bar{r} = (x_B - x_A)\bar{i} + (y_B - y_A)\,\bar{j} = (4-1)\bar{i} + (3-2)\,\bar{j} = 3\bar{i} + \bar{j}$$

Moment sily k bodu A:

$$\overline{M}_A = \bar{r} \times \bar{F} = (3\bar{i} + \bar{j}) \times (2\bar{i} + 4\bar{j}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 12\bar{k} - 2\bar{k} = 10\bar{k}$$

$$\left|\overline{M}_A\right| = 10\left|\bar{k}\right| = 10\,Nm$$

Veľkosť momentu sily $\bar{F}$ k bodu A je možné vypočítať aj pomocou skalárnej rovnice zostavenej podľa *obr.1.3.2*:



Obrázok 1.3.2

$$M_A = M_{AFx} + M_{AFy} = -F_x\,r_y + F_y\,r_x = -F_x\,(y_B - y_A) + F_y\,(x_B - x_A)$$

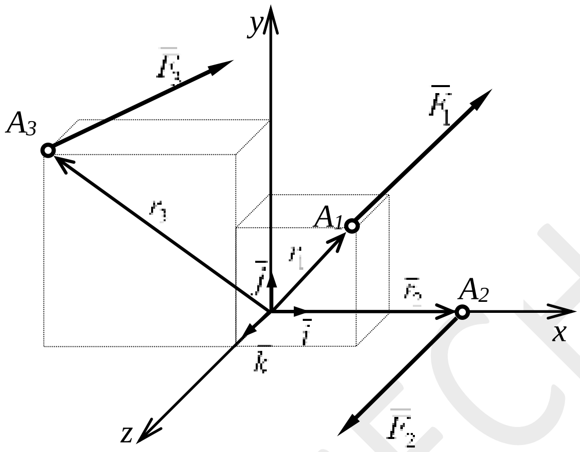
$$M_A = -\,2(3-2) + 4(4-1) = -2 + 12 = 10\,Nm$$

PRÍKLAD 1.4: V priestore pôsobí sústava síl $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$ (*obr. 1.4.1*). Určte moment ich výslednice k súradnicovým osiam *x, y, z*. Sily sú dané súradnicovými zložkami: $\overline{F_1}$(4,4,4) [N], $\overline{F_2}$(0,0,3) [N], $\overline{F_3}$(5,3,3) [N]. Ich pôsobiská sú v bodoch A_1 (2,2,2)[m], A_2 (3,0,0)[m], A_3 (-3,3,2)[m].

Sily a polohové vektory vyjadríme vo vektorovom tvare :

$$\overline{F}_1 = 4\bar{i} + 4\bar{j} + 4\bar{k} \qquad \overline{F}_2 = 3\bar{k} \qquad \overline{F}_3 = 5\bar{i} + 3\bar{j} + 3\bar{k}$$

$$\bar{r}_1 = 2\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k} \qquad \bar{r}_2 = 3\bar{i} \qquad \bar{r}_3 = -3\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}$$



Obrázok 1.4.1

Podľa momentovej podmienky výsledný moment danej silovej sústavy k danému bodu je rovný súčtu momentov jednotlivých síl k tomu istému bodu:

$$\overline{M}_0 = \overline{M}_{01} + \overline{M}_{02} + \overline{M}_{03} = \bar{r}_1 \times \overline{F}_1 + \bar{r}_2 \times \overline{F}_2 + \bar{r}_3 \times \overline{F}_3$$

$$\overline{M}_0 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3\bar{i} + 10\bar{j} - 24\bar{k} \; [Nm]$$

Veľkosti súradnicových zložiek výsledného momentu v osiach *x, y, z*potom budú :

M_{0x} = 3Nm , M_{0y} = 10Nm , M_{0z}= -24Nm

Poznámka*: Záporná hodnota momentovej zložky M_{0z} vyjadruje jej opačnú orientáciu voči kladnému smeru osi z.*

Absolútnu hodnotu veľkosti výsledného momentu a jeho smerové uhly vypočítame:

$$M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2} = \sqrt{3^2 + 10^2 + 24^2} = 26{,}17\ Nm$$

$$\cos\alpha_M = \frac{M_{0x}}{M_0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_M = \arccos\frac{M_{0x}}{M_0} = \arccos\frac{3}{26{,}17} = 83°25'02''$$

$$\cos\beta_M = \frac{M_{0y}}{M_0} \quad \Rightarrow \quad \beta_M = \arccos\frac{M_{0y}}{M_0} = \arccos\frac{10}{26{,}17} = 67°32'06''$$

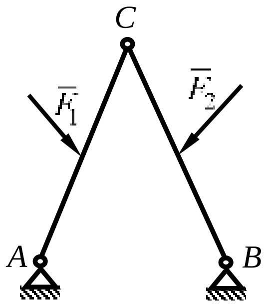
$$\cos\gamma_M = \frac{M_{0z}}{M_0} \quad \Rightarrow \quad \gamma_M = \arccos\frac{M_{0z}}{M_0} = \arccos\frac{24}{26{,}17} = 23°29'49''$$

2 POHYBLIVOSŤ A VÄZBY HMOTNÝCH OBJEKTOV

2.1 VÄZBY A VÄZBOVÉ REAKCIE

Silové sústavy pôsobia vždy na určitý hmotný objekt (bod, teleso, sústava telies, bodov). Hmotné objekty môžu byť v rovine, alebo v priestore umiestnené voľne, t. j. s neobmedzenou možnosťou pohybu, alebo sú viazané väzbami, ktorými je možnosť ich pohybu obmedzená. V týchto väzbách vznikajú sily – tzv. *väzbové reakcie*.

Väzby, ktorými sa sústava upevňuje k nepohyblivému telesu – tzv. rámu, sú vonkajšie väzby a reakcie, ktoré v nich vznikajú sú *vonkajšie reakcie* (*obr. 2.1*). Ak mechanickú sústavu (sústavu telies, bodov) tvorí niekoľko objektov, väzby medzi nimi sú *vnútorné väzby* a reakcie v nich sú *vnútorné reakcie*.



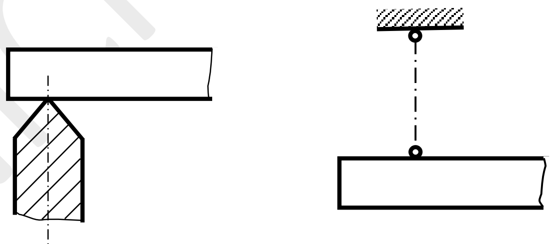
A, B – vonkajšie väzby

C – vnútorná väzba

Obrázok 2.1

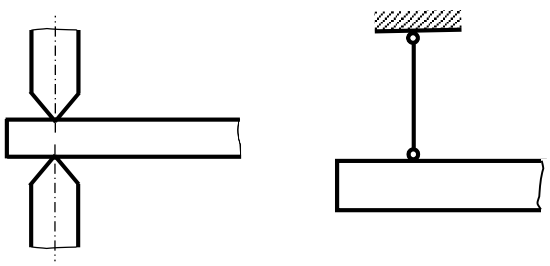
Väzby znižujú pohyblivosť hmotných objektov, pričom jednotlivé typy väzieb majú možnosť zabrániť len určitým pohybom objektov. Potom väzbové reakcie (*sekundárne sily*) vyvolané po zaťažení objektov vonkajšími, zaťažujúcimi (*primárnymi*) silami, môžu pôsobiť len v tom smere, v ktorom je väzba schopná zabrániť pohybu.

Ak väzba odoberá možnosť pohybu len na jednu stranu, hovoríme o *jednostrannej* – unilaterálnej väzbe (tiež silovej). Na *obr. 2.2a* je príklad *väzby jednostranným opretím*, na *obr. 2.2b* príklad *väzby lanom*.



a) *Obrázok 2.2* *b)*

Ak väzba odoberá možnosť pohybu na obidve strany, ide o väzbu *dvojstrannú* – bilaterálnu (*nútenú*). Na *obr. 2.3a* je príklad *väzby obojstranným opretím*, na *obr. 2.3b* príklad *väzby prútom*.



a) *Obrázok 2.3* *b)*

2.2 STUPNE VOĽNOSTI POHYBU A VÄZBOVÁ ZÁVISLOSŤ HMOTNÝCH OBJEKTOV

Počet *stupňov voľnosti pohybu* je počet nezávislých parametrov, ktorými je jednoznačne určená poloha objektu v rovine alebo v priestore. Vyjadruje súčasne počet možných nezávislých pohybov, ktoré daný objekt môže v rovine, alebo v priestore vykonať.

Pohyblivosť, resp. nepohyblivosť (*tvarovú určitosť*) hmotného objektu posudzujeme pomocou jeho *väzbovej závislosti*:

$$i = v - u$$

kde: i - jepočet stupňov voľnosti pohybu *viazaného* objektu

v - je počet stupňov voľnosti pohybu *voľného*, t.j. neviazaného objektu

u - je počet stupňov voľnosti pohybu odobratých väzbami

2.2.1 Tvarová a statická určitosť

Pri posúdení *tvarovej určitosti*, to znamená pohyblivosti, resp. nepohyblivosti hmotného objektu môže mať väzbová závislosť takéto vyjadrenie:

- $i = v - u = 0$, úloha je *tvarovo určitá*. Väzby odoberajú voľnému objektu všetky možnosti pohybu, jeho poloha je presne vymedzená.

- $i = v - u > 0$, úloha je *tvarovo neurčitá*. Väzby odoberajú menej stupňov voľnosti, ako mal voľný objekt. Objekt má ešte možnosť pohybu.

- $i = v - u < 0$, úloha je *tvarovo preurčená*. Väzby odoberajú voľnému objektu viac stupňovvoľnosti, ako mal pred viazaním, jeho poloha je preurčená.

Analýzou *statickej určitosti* posudzujeme, či máme k dispozícii dostatočný počet statických podmienok, t.j. podmienok rovnováhy na určenie neznámych parametrov väzbových reakcií. Pretože $v = r$; $u = n_p$, potom aj $i = i_S$, môžme naraz posúdiť tvarovú aj statickú určitosť úlohy:

$$i = i_S = v - u = r - n_p \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0 \quad \begin{cases} \text{úloha tvarovo neurčitá, staticky preurčená} \\ \text{úloha tvarovo a staticky určitá} \\ \text{úloha tvarovo preurčená, staticky neurčitá} \end{cases}$$

kde i_S je stupeň statickej určitosti

r je počet nezávislých podmienok rovnováhy

n_p je počet neznámych parametrov väzbových reakcií

Staticky neurčitú úlohu nemôžeme riešiť iba metódami statiky. Takéto úlohy riešime v pružnosti a pevnosti, ktorá určuje ďalšie, tzv. *deformačné podmienky*.

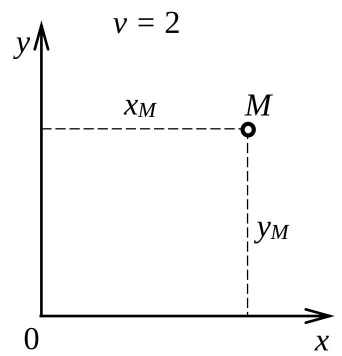
2.3 HMOTNÝ BOD V ROVINE

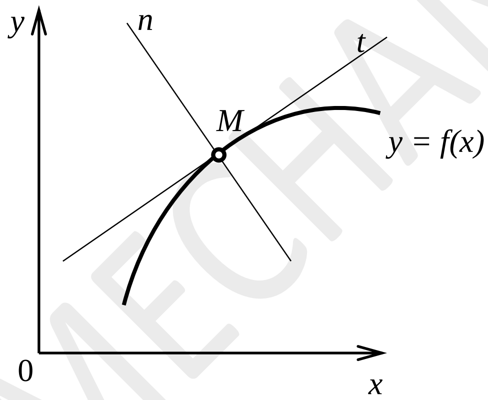
2.3.1 Stupne voľnosti a väzbová závislosť hmotného bodu v rovine

Polohu voľného hmotného bodu M v rovine, určenej súradnicovou sústavou $0(x, y)$ (*obr. 2.4*) určujú dva nezávislé parametre x_M, y_M. Hmotný bod má dva stupne voľnosti pohybu (v = 2), t. j. v rovine môže vykonávať dva nezávislé pohyby (posuvný pohyb v smere osí x a y) a jeho väzbová závislosť je

$$i = v - u = 2 - u \overset{>}{\underset{<}{=}} 0$$

u = 1; i = 1



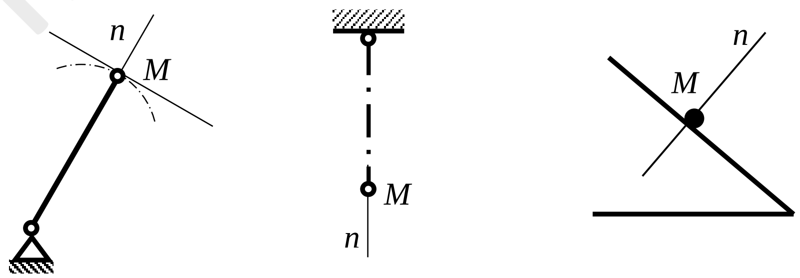


Obrázok 2.4 *Obrázok 2.5*

2.3.2 Väzby hmotného bodu v rovine

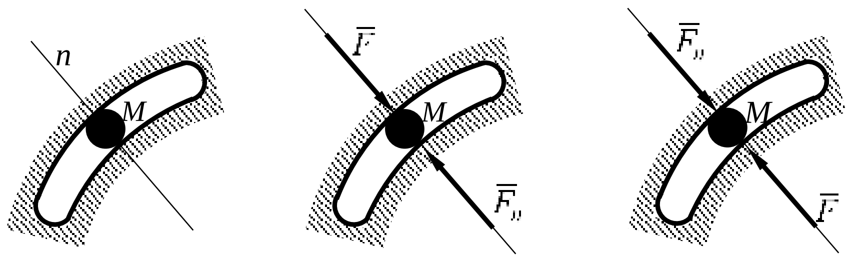
- Hmotný bod v rovine viazaný ku krivke $y = f(x)$ má možnosť pohybu len po dotyčnici k tejto krivke (*obr. 2.5*). V smere normály má odobratú možnosť pohybu, preto aj možná reakcia väzby pri zaťažení hmotného bodu je normálová reakcia. Poloha bodu je jednoznačne určená jedným údajom, napr. súradnicou x_M ; [$y_M = f(x_M)$], preto bod viazaný k rovinnej krivke má jeden stupeň voľnosti pohybu.

$u = 1$, $\quad i = 2 - u = 2 - 1 = 1$



a) *b)* *c)*

Obrázok 2.6



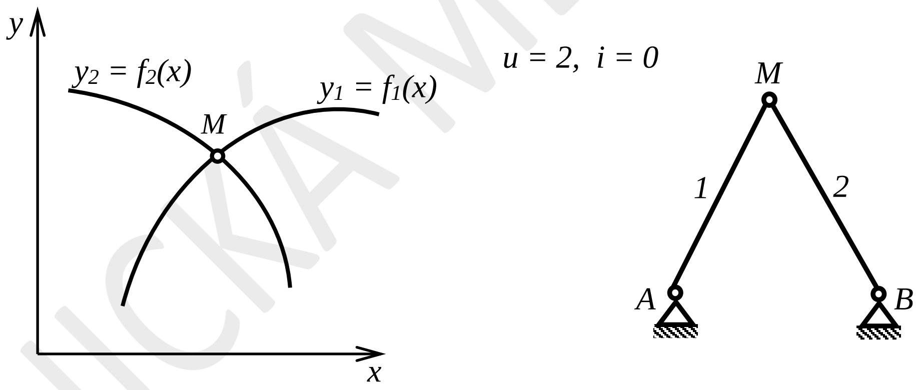
d) *e)* *f)*

Obrázok 2.6

Väzba bodu na jednu rovinnú krivku môže byť realizovaná napr. *prútom* (*obr. 2.6a*), alebo *drážkou* (napr. kameň v kulise na *obr. 2.6d*). Tieto väzby sú obojstranné (nútené), môže v nich vzniknúť reakcia na obidve strany (*obr. 2.6e, f*). Väzby *lanom* (*obr. 2.6b*) a voľným *opretím* (*obr. 2.6c*) odoberajú bodu v rovine tiež jeden stupeň voľnosti pohybu, ale len na jednu stranu – ide o väzby jednostranné (silové).

- Bod viazaný k dvom krivkám súčasne (*obr. 2.7a*), má odobraté 2 stupne voľnosti pohybu a nemá možnosť pohybu. Takúto väzbu môžeme realizovať napr. dvoma prútmi (*obr. 2.7b*).

$u = 2,$ $\qquad i = 2 - u = 2 - 2 = 0$

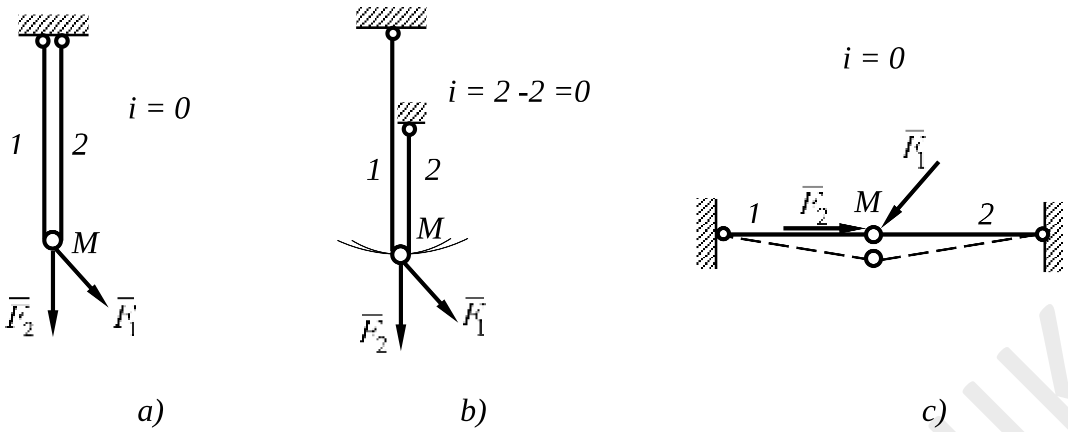


a) *Obrázok 2.7* *b)*

2.3.3 Výnimočné prípady väzieb hmotného bodu v rovine

Na *obr. 2.8 a, b, c* sú uvedené *výnimočné prípady väzieb* bodu v rovine. Pri zaťažení silou $\bar{F}_1$ je pohyb bodu možný, aj keď $i = 2 - 2 = 0$, pričom v prípade *a)* ide o pohyb skutočný, v *b)* a *c)* o pohyb veľmi malý, tzv. virtuálny. Úloha je jedenkrát tvarovo neurčitá.

Pri zaťažení silou $\bar{F}_2$ v smere osí prútov pôsobí na bod priamková silová sústava, pre ktorú platí len jedna podmienka rovnováhy. V nej však máme dve neznáme osové sily v prútoch, preto je úloha jedenkrát staticky neurčitá.



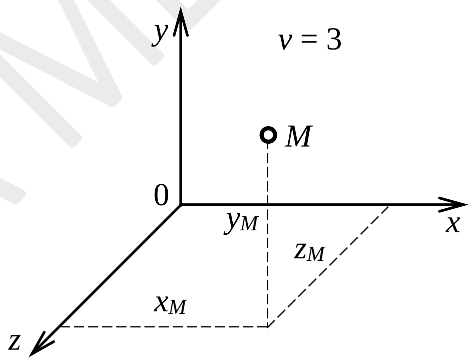
Obrázok 2.8

2.4 HMOTNÝ BOD V PRIESTORE

2.4.1 Stupne voľnosti a väzbová závislosť hmotného bodu v priestore

Poloha voľného hmotného bodu *M* v priestore je jednoznačne určená 3 parametrami. V ortogonálnej súradnicovej sústave $0(x,y,z)$ sú to tri súradnice: x_M, y_M, z_M (*obr. 2.9*). Voľný hmotný bod v priestore má tri stupne voľnosti pohybu $v = 3$, môže vykonávať tri nezávislé pohyby (posuv v smere osí *x,y,z*) a jeho väzbová závislosť bude

$$i = v - u = 3 - u \gtreqless 0$$



Obrázok 2.9

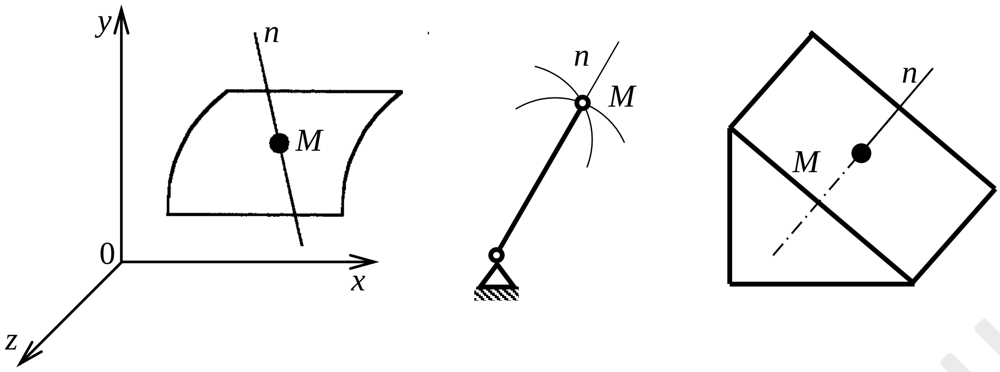
2.4.2 Väzby hmotného bodu v priestore

- Hmotný bod v priestore môžeme viazať k ploche (*obr. 2.10a*). Napríklad prútom, alebo lanom ku guľovej ploche (*obr. 2.10b*), uložením na rovinu (*obr. 2.10c*) a pod. Tým mu odoberáme jeden stupeň voľnosti pohybu v smere normály k ploche, resp.v smere prúta.

$$u = 1, \qquad i = 3 - u = 3 - 1 = 2$$

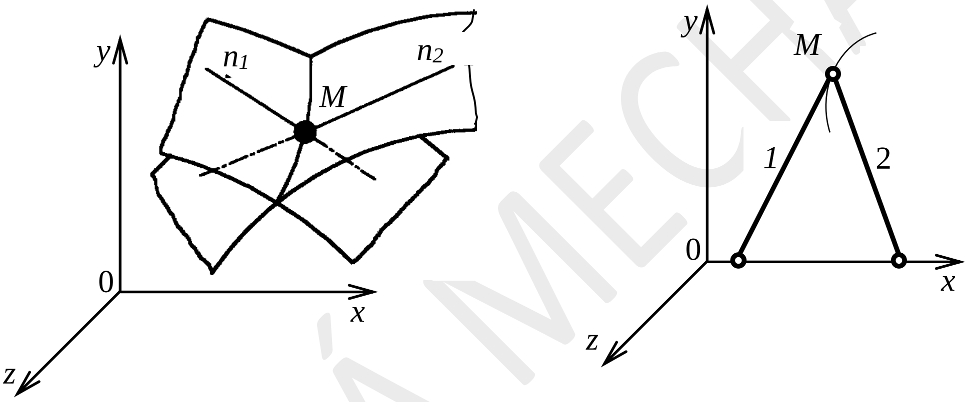
- Ak viažeme bod v priestore k dvom plochám (*obr. 2.11a*), odoberáme mu tým dva stupne voľnosti pohybu. Viažeme ho vlastne k ich priesečnici, t.j. k priestorovej krivke. Realizáciou tejto väzby je napríklad väzba dvoma prútmi (*obr. 2.11b*).

$$u = 2, \qquad i = 3 - u = 3 - 2 = 1$$



a) *b)* *c)*

Obrázok 2.10

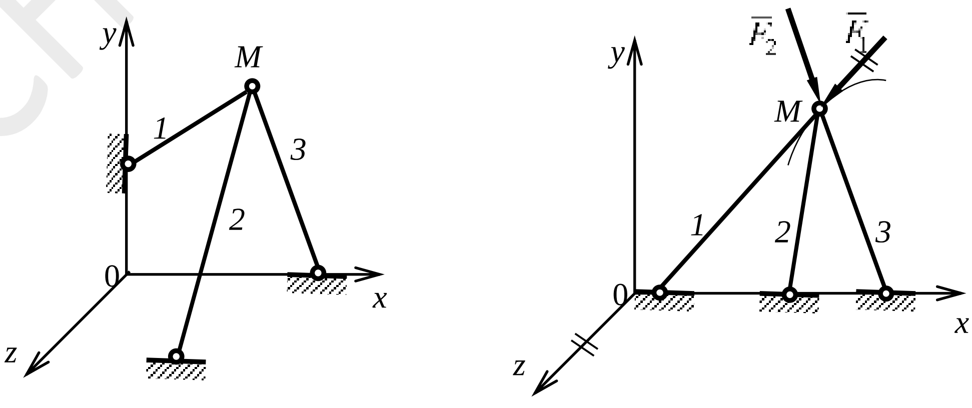


a) *b)*

Obrázok 2.11

- Viazaním bodu k trom plochám, ktoré sa v danom bode pretínajú, sú mu odobraté všetky tri stupne voľnosti. Takou je napríklad *väzba troma prútmi,* ktoré však nesmú ležať v jednej rovine. Musia tvoriť tzv. „ kozlík“ (*obr. 2.12a*).

$$u = 3, \qquad i = 3 - u = 3 - 3 = 0$$



a) *b)*

Obrázok 2.12

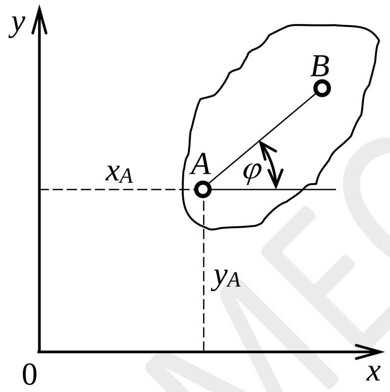
2.4.3 Výnimočné prípady väzieb hmotného bodu v priestore

V prípade, ak tri prúty ležia v jednej rovine (*obr. 2.12b*), nastáva výnimočný prípadväzby. Pri zaťažení silou $\overline{F}_1$, ktorá neleží v rovine prútov, nastane pohyb. Pri zaťažení prútov silou $\overline{F}_2$, ktorá leží v rovine prútov, je úloha staticky neurčitá. Na bod pôsobí centrálna rovinná silová sústava s dvoma podmienkami rovnováhy, v ktorých sú tri neznáme parametre.

2.5 TELESO V ROVINE

2.5.1 Stupne voľnosti a väzbová závislosť telesa v rovine

Polohu telesa v rovine $0(x, y)$ jednoznačne určujú 3 parametre. Môžu to byť súradnice bodu $A(x_A, y_A)$, a uhol φ spojnice bodov A a B (*obr. 2.13*), alebo dve súradnice bodu A a jedna súradnica bodu B. Druhá súradnica bodu B je daná tým, že vzdialenosť $\overline{AB}$ je konštantná.



Obrázok 2.13

Voľné teleso v rovine má možnosť vykonať tri nezávislé pohyby: posuvný pohyb v smere súradnicových osí x a y a otočenie okolo ľubovoľného bodu, napr. okolo bodu A, alebo B.

Teleso v rovine má 3 stupne voľnosti pohybu a jeho väzbová závislosť je určená vzťahom

$$i = v - u = 3 - u \gtreqless 0 .$$

2.5.2 Väzby telesa v rovine

Jednotlivými väzbami môžeme telesu v rovine odobrať jeden, dva, alebo tri stupne voľnosti. V každej väzbe môže vzniknúť väzbová reakcia, ktorej vznik závisí od typu zaťažujúcej silovej sústavy.

Väzby, ktoré ponechávajú telesu určitú pohyblivosť, sa nazývajú *kinematické dvojice*. Môžu to byť kinematické dvojice prvej triedy (u = 1) alebo druhej triedy (u = 2).

- *Vyššia, všeobecná, kinematická dvojica* odoberá telesu jeden stupeň voľnosti (u = *1*).

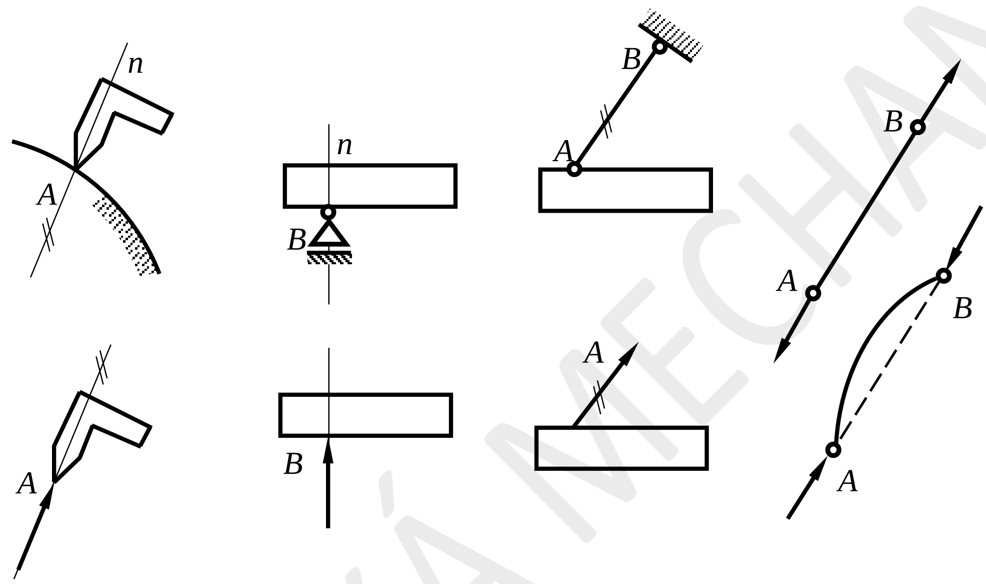
Vo väzbe *opretím* sa jedno teleso opiera hrotom o povrch druhého telesa, pričom povrchy telies pokladáme za dokonale hladké. Odobratá možnosť pohybu, aj možná reakcia sú v spoločnej normále (*obr. 2.14a*).
Jeden stupeň voľnosti pohybu odoberáme telesu aj prostredníctvom ďalšieho telesa, tzv. binárneho člena. Binárny člen slúži ako sprostredkovateľ väzby medzi rámom a telesom, s ktorými je viazaný rotačnou, alebo posuvnou väzbou. Nie je zaťažený žiadnymi vonkajšími

silami, pôsobia naň len reakcie telesa a rámu, ktoré musia ležať na spoločnej nositeľke, musia byť rovnako veľké a opačne orientované. Takéto binárne členy, používané ako väzby telesa k rámu sú:

a) *posuvné lôžko* (*obr. 2.14b*) – na jednej strane kĺb, na druhej posuvné vedenie – spoločná nositeľka musí prechádzať cez kĺb a súčasne byť kolmá na vedenie. Realizácia väzby môže byť jednostranná, alebo dvojstranná.

b) *prút* (*obr. 2.14c*) – na oboch stranách kĺby, spoločná nositeľka je v ich spojnici. Väzba je obojstranná, prút môže byť ťahaný, ale aj tlačený (*obr. 2.14 d*).

$$u = 1, \qquad i = 3 - u = 3 - 1 = 2$$



a) *b)* *c)* *d)*

Obrázok 2.14

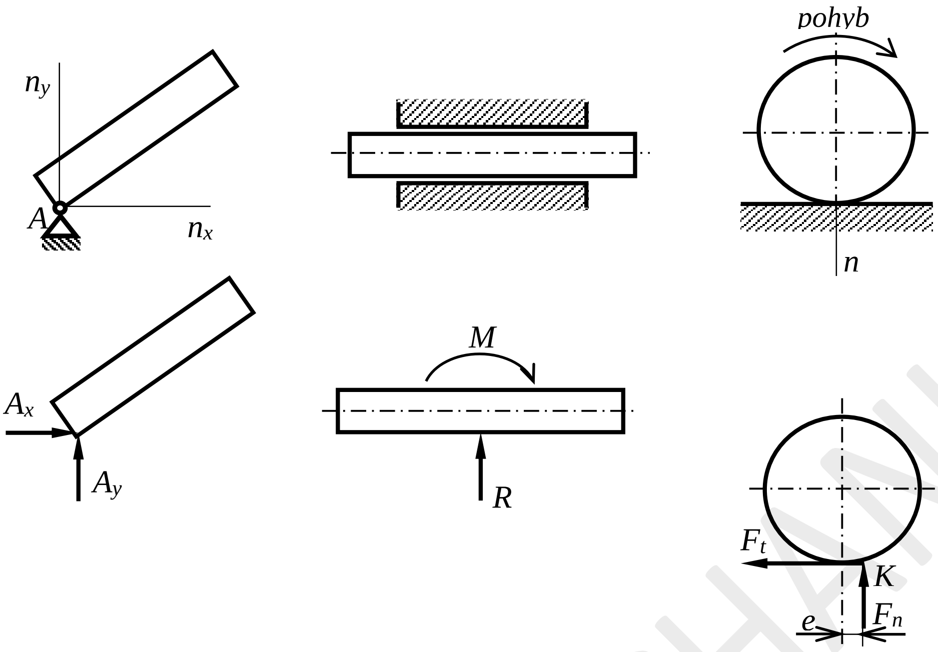
- *Nižšie kinematické dvojice* (u = 2) odoberajú telesu dva stupne voľnosti pohybu. Patria k nim tieto väzby:

a) *Rotačná väzba* (kĺb) (*obr. 2.15a*) odoberá dva posuvy, napr. v smere osí x a y. Neznáme sú dva silové parametre, napríklad dve zložky reakcie, alebo veľkosť a smer reakcie. Väzba ponecháva telesu možnosť otáčania okolo stáleho stredu otáčania A (bližšie vysvetlenie v kinematike).

b) *Posuvná väzba* (posuvné vedenie) (*obr. 2.15b*) ponecháva možnosť posuvu v jednom smere a odoberá možnosť posuvu v smere naň kolmom a možnosť otočenia v rovine. Neznáme parametre sú veľkosť sily a momentu.

c) *Valivá väzba* (*obr. 2.15c*) je podmienená trením medzi telesami, odoberá možnosť dvoch posuvov – v smere normály a dotyčnice (reakcie F_N a F_T). umožňuje valivý pohyb bez šmýkania, t. j. možnosť otočenia telesa okolo tzv. okamžitého stredu otáčania.

$$u = 2, \qquad i = 3 - u = 3 - 2 = 1$$

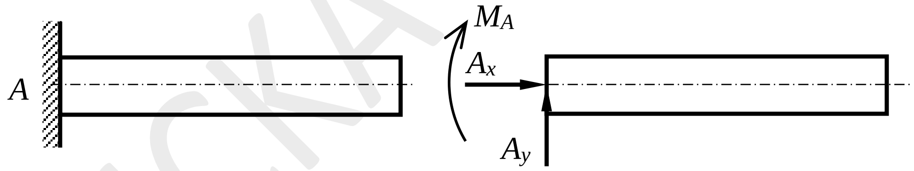


a) *b)* *c)*

Obrázok 2.15

- Teleso spojíme pevne s iným telesom, napr. s rámom tzv. *votknutím* (*obr. 2.16*), ktoré odoberá telesu v rovine všetky tri stupne voľnosti pohybu.

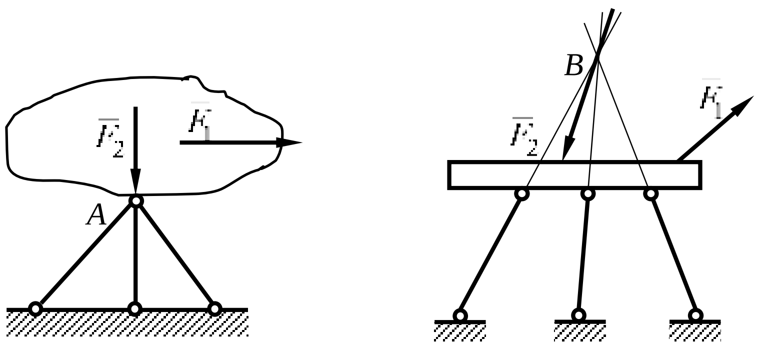
$$u = 3, \qquad i = 3 - u = 3 - 3 = 0$$



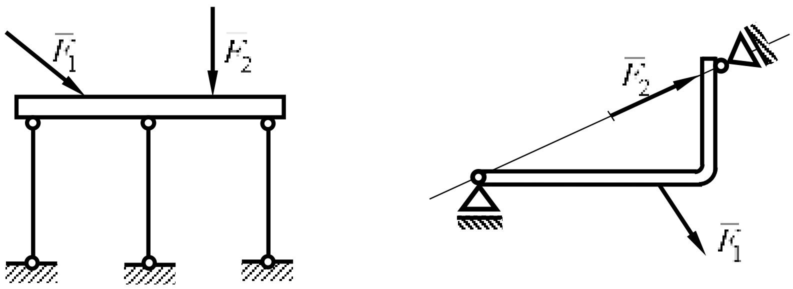
Obrázok 2.16

2.5.3 Výnimočné prípady väzieb telesa v rovine

Výnimočné (kritické) prípady väzieb telesa v rovine nastávajú vtedy, ak sa všetky možné reakcie pôsobia v jednom bode, alebo sú rovnobežné ($i = 0$, t.j. $u = 3$). Pri zaťažení silou $\bar{F}_1$ je úloha tvarovo neurčitá, pri zaťažení silou $\bar{F}_2$ staticky neurčitá (*obr. 2.17a,b,c,d*).



a) *Obrázok 2.17* *b)*



c) *d)*

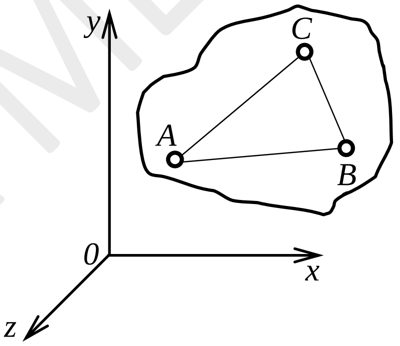
Obrázok 2.17

2.6 TELESO V PRIESTORE

2.6.1 Stupne voľnosti a väzbová závislosť telesa v priestore

Polohu telesa v priestore 0(*x, y, z*) jednoznačne určuje 6 parametrov. Môžu to byť tri súradnice bodu *A*, dve súradnice bodu *B* a jedna súradnica bodu *C* (*obr. 2.18*). Ostatné súradnice bodov *B* a *C* sú viazané stálymi vzdialenosťami medzi bodmi. Teda pre teleso v priestore je $v = 6$. Voľné teleso v priestore má možnosť vykonať šesť nezávislých pohybov: posuvný pohyb v smere osí *x, y* a *z* a otočenie okolo týchto troch súradnicových osí. Má 6 stupňov voľnosti pohybu a jeho väzbová závislosť je

$$i = v - u = 6 - u \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 0$$

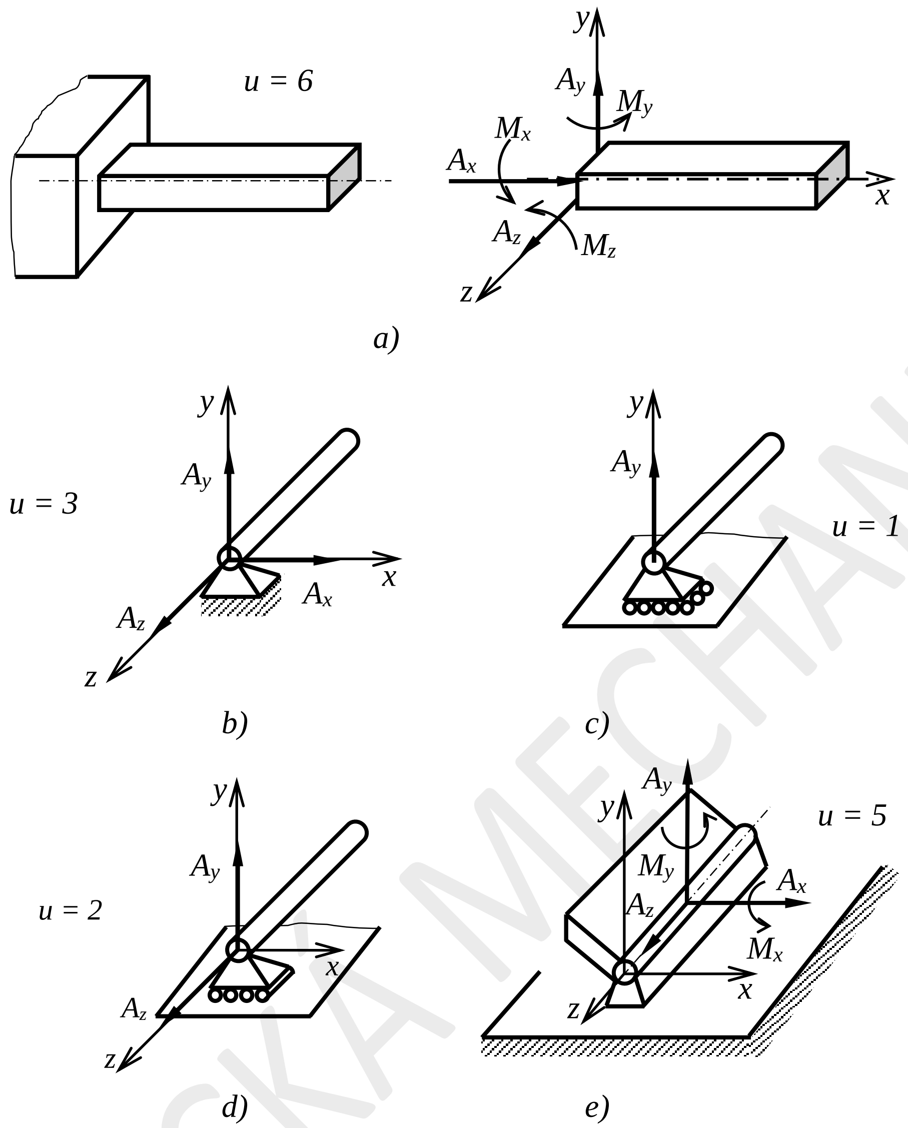


Obrázok 2.18

2.6.2 Väzby telesa v priestore

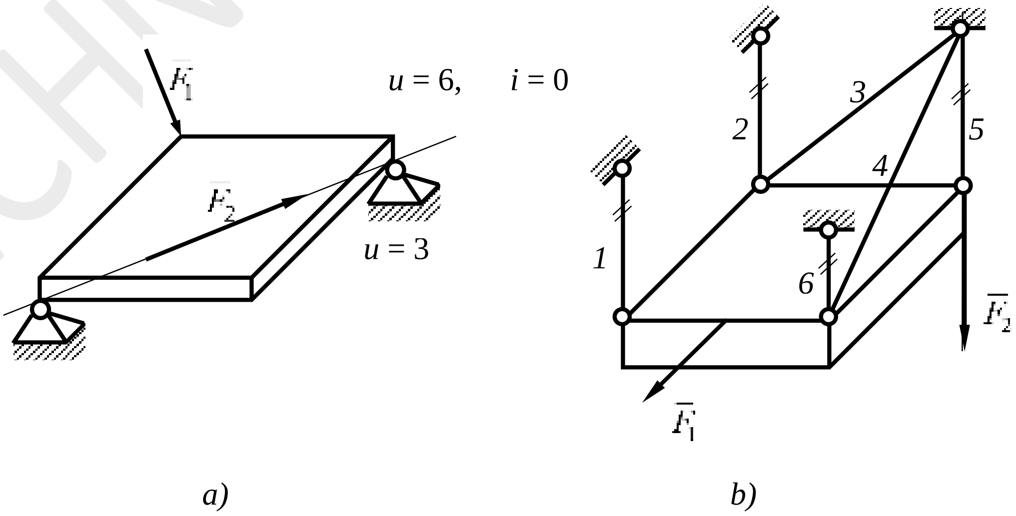
Podľa typu väzby môžeme telesu v priestore jednou väzbou odobrať jeden až šesť stupňov voľnosti pohybu. Na *obrázku 2.19* sú znázornené jednotlivé typy väzieb telesa v priestore s vyznačenými reakciami, ktoré v nich po zaťažení telesa môžu vzniknúť:

- Jeden stupeň voľnosti pohybu ($u = 1$) odoberajú telesu v priestore *väzba posuvným lôžkom na guľôčkach* (*obr. 2.19c*) a *väzba prútom*.
- Dva stupne voľnosti pohybu ($u = 2$) odoberá telesa v priestore *väzba posuvným lôžkom na valčekoch* (*obr. 2.19d*).
- Tri stupne voľnosti pohybu ($u = 3$) odoberá telesu v priestore *väzba priestorovým kĺbom* (*obr. 2.19b*).
- Päť stupňov voľnosti pohybu ($u = 5$) odoberá *väzba tzv. valcovým kĺbom* (*obr. 2.19e*)
- Pevným spojením – *votknutím* (*obr. 2.19a*) odoberieme telesu všetkých šesť stupňov voľnosti pohybu ($u = 6$).



Obrázok 2.19

2.6.3 Výnimočné prípady väzieb telesa v priestore



Obrázok 2.20

Výnimočné prípady väzieb telesa v priestore nastanú, ak všetky možné reakcie pretínajú jednu priamku, alebo sú s ňou rovnobežné. Pri zaťažení silou $\bar{F}_1$ je úloha tvarovo neurčitá, pri zaťažení silou $\bar{F}_2$ je úloha staticky neurčitá *(obr. 2.20a, b*).

2.7 METODIKA RIEŠENIA ÚLOH ROVNOVÁHY HMOTNÝCH OBJEKTOV

Jednou z najčastejších úloh statiky je určiť *väzbové reakcie* z *podmienok rovnováhy* hmotného objektu.

Postup riešenia:

1. Na základe analýzy všetkých možných posuvných a otáčavých účinkov, ktorými okolité objekty pôsobia, resp. môžu pôsobiť, na skúmaný hmotný objekt, určíme typ silovej sústavy, ktorú tieto účinky (sily a momenty) tvoria. Podľa typu silovej sústavy určíme, za aký typ hmotného objektu budeme pri riešení skúmaný hmotný objekt považovať.

2. Napíšeme vzťah *väzbovej závislosti* – posúdime úlohu zo stránky tvarovej a statickej určitosti.

3. Ak je úloha riešiteľná (staticky určitá alebo preurčená), zvolíme metódu riešenia (Analytické alebo grafické riešenie).

4. *Uvoľníme namáhaný hmotný objekt*. To znamená, že ho nakreslíme bez väzieb a zakreslíme všetky naň pôsobiace zaťažujúce sily a reakcie odstránených väzieb.

a) Pri analytickom riešení *predpokladáme* ľubovoľnú orientáciu neznámych síl.

b) Pri grafickom riešení zakreslíme len známe parametre síl, napr. ich nositeľky. Orientáciu neznámych síl nepredpokladáme. Tá je výsledkom grafického riešenia.

5. *Zostavíme statické podmienky rovnováhy*.

a) Pri analytickom riešení *zvolíme vhodnú súradnicovú sústavu* a s ohľadom na túto sústavu napíšeme podmienky rovnováhy.

b) Pri grafickom riešení napíšeme *vektorové podmienky rovnováhy* silovej sústavy pôsobiacej na objekt a riešime ich známymi grafickými metódami.

6. Riešením podmienok rovnováhy dostaneme hľadané parametre síl.

7. Pri analytickom riešení kladné znamienko vypočítanej sily potvrdzuje, že predpokladaná orientácia je správna, záporné znamienko značí opačnú orientáciu danej sily.

8. Pri grafickom riešení splnenie podmienok rovnováhy určí aj orientáciu hľadaných síl.

9. Zhodnotíme získané výsledky a skontrolujeme správnosť riešenia.

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

[1] PAŠKO, J. – ŠMERINGAIOVÁ, A.: *Technická mechanika I.* Prešov: FVT TU v Košiciach so sídlom v Prešove. 2012, 184 s., ISBN 978-80-553-0891-3

[2] PAŠKO, J. – ŠMERINGAIOVÁ, A.: *Príručka statiky s príkladmi,* Prešov: FVT, 2008, 202 s., ISBN 978-80-553-0127-3

[3] BUŠOVÁ, B. - CABAN, S. – ŽIARAN, S.: *Mechanika I. Statika*. Bratislava: STU. 1996, 272s. ISBN 80-227-0831-3