

Obsah

1	Statická analýza Sústav telies	2
1.1	Tvarová a statická určitost' rovinných sústav telies	2
1.2	Princíp statického riešenia sústav telies	3
1.3	Analytické riešenie sústav telies	4
2	Rovinné prútové sústavy	10
2.1	Tvarová určitost' prútové sústav	10
2.2	Spôsobu tvorenia prútové sústav	11
2.3	Výnimočné prípady väzieb rovinných prútové sústav	11
2.4	Statické riešenie prútové sústav	12
2.4.1	Metóda styčných bodov	12
2.4.2	Metóda priesečná	15
3	Ťažisko hmotných a geometrických útvarov.....	23
3.1	Analytické určenie polohy ťažiska.....	23

1 STATICKÁ ANALÝZA SÚSTAV TELIES

V predošlých kapitolách sme rôzne reálne objekty z hľadiska mechaniky skúmali ako *jeden hmotný objekt* upevnený k rámu (základnému telesu) *vonkajšími väzbami*. Reálne stroje, zariadenia a konštrukcie používané na rôzne účely sú pri ich detailnejšom skúmaní z hľadiska mechaniky *sústavami telies*.

Sústavou telies nazývame konštrukciu pozostávajúcu aspoň z dvoch telies okrem rámu. Jednotlivé telesá sústavy sú viazané navzájom medzi sebou, ako aj k rámu. Väzby, ktorými sú jednotlivé telesá viazané k rámu sa nazývajú *vonkajšie väzby*, väzby medzi telesami sústavy sú *vnútorné väzby*. Podľa typu vzájomných väzieb vznikajú sústavy s rôznym rozsahom pohyblivosti a rôznym charakterom pohybu jednotlivých telies.

Podľa charakteristických vlastností delíme sústavy telies na *rovinné a priestorové, nepohyblivé a pohyblivé, tvarovo a staticky určité a neurčité*. V ďalšom texte sa budeme venovať rovinným sústavám telies, ktorých charakteristickým znakom je rovinné zaťaženie pôsobiace v rovine rovnobežnej s rovinami pohybu jednotlivých telies.

1.1 TVAROVÁ A STATICKÁ URČITOSŤ ROVINNÝCH SÚSTAV TELIES

Tvarovú určitosť (pohyblivosť) sústavy telies posudzujeme pomocou *väzbovej závislosti*. Postup je analogický ako pri určovaní pohyblivosti telesa. Vzájomné spojenie dvoch telies nazývame *kinematickou dvojicou*. V prípade rovinných sústav telies rozdeľujeme kinematické dvojice podľa charakteru konštrukcie na *rotačné, posuvné a valivé*, ktoré odoberajú sústave po dvoch stupňoch voľnosti pohybu a *všeobecné*, ktoré odoberajú sústave jeden stupeň voľnosti pohybu.

Nech sa sústava skladá z n' telies, z ktorých jedno sme upravili, t.j. vytvorili sme z neho rám (základové teleso, ktoré považujeme za relatívne nepohyblivé a ku ktorému je vonkajšími väzbami upevnená sústava telies ako jeden celok). Pred spojením majú tieto telesá

$$v = 3(n' - 1) = 3n$$

stupňov voľnosti pohybu, kde $n = n' - 1$ je počet telies bez rámu. Ak sústava okrem „ n “ telies obsahuje „ m “ hmotných bodov (sú to kĺby (styčníky), v ktorých sú spojené pružiny), *počet stupňov voľnosti pohybu takejto zmiešanej sústavy pred viazaním* je

$$v = 2m + 3n \tag{1.1}$$

Celkovú tvarovú určitosť sústavy posudzujeme podľa *vzťahu väzbovej závislosti*

$$i = v - u_{vm} - u_{vo} \tag{1.2}$$

kde u_{vm} - je počet stupňov voľnosti odobraných vnútornými väzbami,

u_{vo} - je počet stupňov voľnosti ubratých vonkajšími väzbami.

Pri hlbšom rozbere tvarovej určitosti sústavy posudzujeme okrem *celkovej tvarovej určitosti* aj *tvarovú určitosť vnútornú a vonkajšiu*, pričom môžu nastať prípady:

- *Celkovú tvarovú určitost'* posudzujeme s ohľadom na *vonkajšie* i *vnútorné väzby*, kde výsledný počet stupňov voľnosti pohybu sústavy je daný vzťahom (1.2)

$$i_c = v - u_{vn} - u_{vo} = 0 \begin{cases} > & \text{celkove tvarovo neurčitá} \\ & \text{celkove tvarovo určitá} \\ < & \text{celkove tvarovo preurčená} \end{cases}$$

- Pri skúmaní *vnútornej tvarovej určitosti* berieme do úvahy len *vnútorné väzby*, t. j. väzby medzi telesami tvoriacimi sústavu. Určujeme ju väzbovou závislosťou

$$i_{vn} = v - u_{vn} - v_{ST} = 0 \begin{cases} > & \text{zvnútra tvarovo neurčitá} \\ & \text{zvnútra tvarovo určitá} \\ < & \text{zvnútra tvarovo preurčená} \end{cases}$$

kde u_{vn} je počet stupňov voľnosti pohybu odobraných vnútornými väzbami, v_{ST} je počet stupňov voľnosti pohybu sústavy uvažovanej ako jedno tuhé teleso vzhľadom na rám. Pre sústavu uvažovanú ako jedno tzv. *teleso v rovine* je $v_{ST} = 3$.

- Pri posudzovaní *vonkajšej tvarovej určitosti* berieme do úvahy len *vonkajšie väzby*, ktorými je sústava viazaná k rámu a sústavu považujeme za jedno tuhé teleso (*ST* - sústavové teleso). Určujeme ju podľa väzbovej závislosti

$$i_{vo} = v_{ST} - u_{vo} = 0 \begin{cases} > & \text{zvonku tvarovo neurčitá} \\ & \text{zvonku tvarovo určitá} \\ < & \text{zvonku tvarovo preurčená} \end{cases}$$

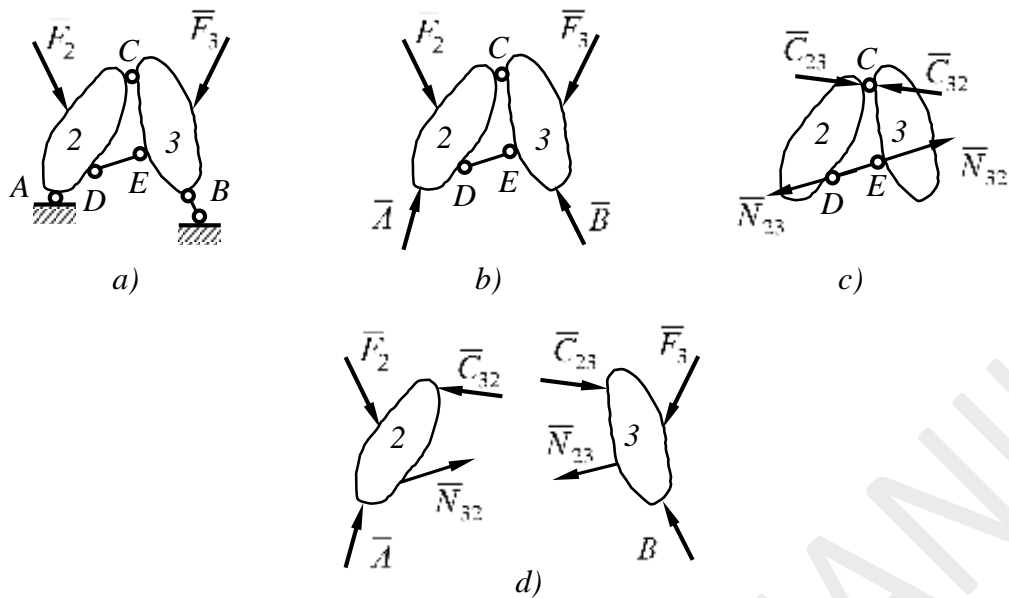
Sústava, ktorá je *celkove tvarovo určitá*, môže byť vnútorne tvarovo neurčitá, napr. k -krát, ale súčasne *musí* byť zvonku tvarovo k -krát preurčená. Pozor, opačne to neplatí, pretože pri vonkajšej tvarovej neurčitosti sa sústava môže vzhľadom na rám pohybovať.

V statike nás zaujímajú predovšetkým prípady tvarovo určitých sústav, t. j. sústav, ktoré majú schopnosť v danej polohe prenášať silové účinky. V strojníckej praxi majú osobitný význam pohyblivé, tvarovo neurčité sústavy s určitým počtom stupňov voľnosti pohybu, tzv. *mechanizmy*.

1.2 PRINCÍP STATICKÉHO RIEŠENIA SÚSTAV TELIES

Pri statickom riešení sústav telies vychádzame z vety o rovnováhe síl. O silách, ktoré pôsobia na sústavu telies (*obr. 1.1a*) v jej rovnovážnom stave, môžeme konštatovať tieto skutočnosti:

- Všetky vonkajšie sily (zaťažujúce aj reakcie) pôsobiace na sústavové teleso, sú v rovnováhe (*obr. 1.1b*).
- Všetky vnútorné sily sú vzhľadom na axiómu akcie a reakcie osobitne v každej väzbe a zároveň vo všetkých väzbách navzájom vo formálnej rovnováhe (*obr. 1.1c*).
- Jednotlivé silové sústavy pozostávajúce vždy zo všetkých síl pôsobiacich na každé teleso osobitne, alebo ľubovoľnú skupinu telies, sú v rovnováhe (*obr. 1.1d*).

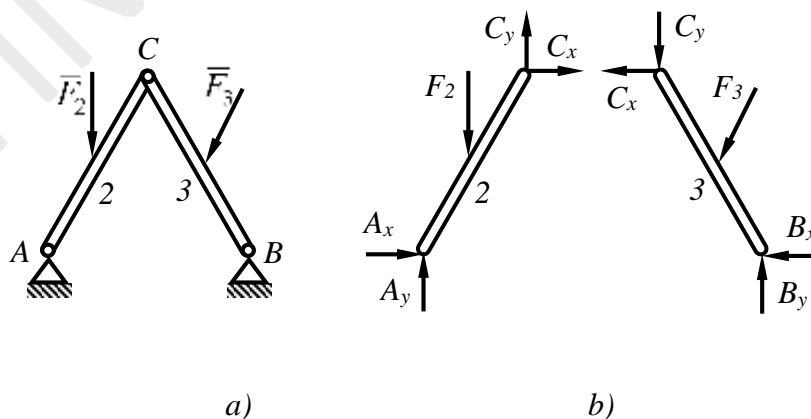


Obrázok 1.1

1.3 ANALYTICKÉ RIEŠENIE SÚSTAV TELIES

Základnou metódou statického riešenia sústav je *metóda uvoľňovania*. Podstata metódy spočíva v uvoľnení jednotlivých členov sústavy (skupiny členov alebo celej sústavy) a zostavenia odpovedajúcich podmienok rovnováhy. Ak sa sústava skladá z „ n “ telies bez rámu a „ m “ hmotných bodov, potom pre jej rovnováhu máme k dispozícii $r = 3n + 2m$ nezávislých rovníc rovnováhy, z ktorých pri *staticky určitej úlohe* môžeme vypočítať taký istý počet neznámych parametrov reakcií a prídavných síl.

Pre vonkajšie sily pôsobiace na sústavu telies, ako aj pre sily pôsobiace na určitú skupinu telies sústavy máme k dispozícii *tri podmienky rovnováhy*. Napríklad pre výpočet reakcií $A_x, A_y, B_x, B_y, C_x, C_y$ použijeme tri a tri rovnovážne rovnice pre uvoľnené telesá 2 a 3 (obr. 1.2b) sústavy telies z obr. 1.2a.

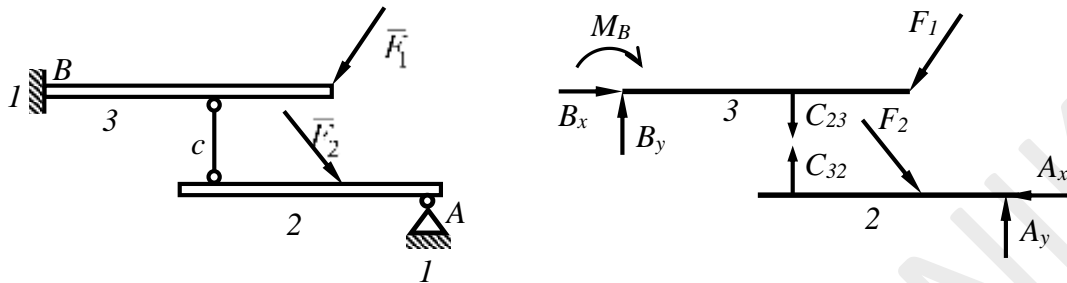


Obrázok 1.2

S ohľadom na riešiteľnosť sústavy telies delíme sústavy na *jednoduché a zložité*.

- *Jednoduché sústavy*

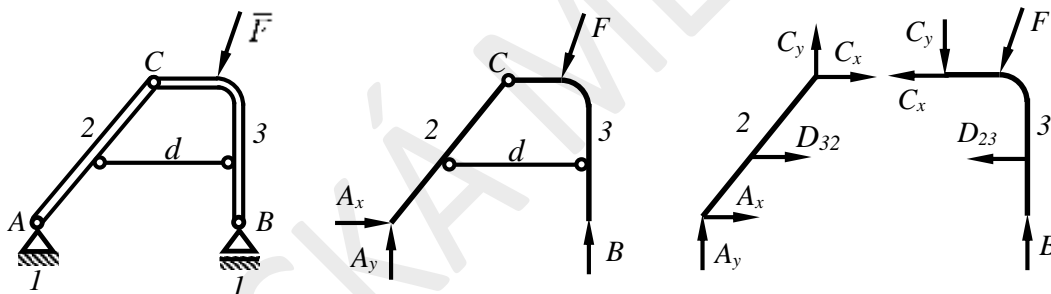
a) Pri $i_{vo} \neq 0$ sa dajú vyriešiť postupným riešením rovnováhy jej členov (obr. 1.3).



Obrázok 1.3

Z rovnováhy telesa 2 určíme $A_x, A_y, C_{32} = C_{23}$; z rovnováhy telesa 3 určíme B_x, B_y, M_B .

b) Pri $i_{vo} = 0$ sa sústava dá vyriešiť najprv ako celok a potom môžeme postupne riešiť rovnováhy jednotlivých jej členov (obr. 1.4).



Obrázok 1.4

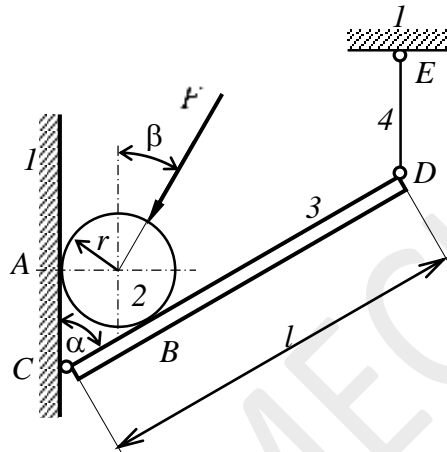
c) Medzi jednoduché patria aj sústavy obsahujúce *trojklbový nosník*.

- *Zložité sústavy* sú také, ktoré sa nedajú priamo riešiť a neobsahujú trojklbový nosník.

RIEŠENÉ PRÍKLADY

PRÍKLAD 1.1: Homogénna guľa na obrázku 1.1.1 o polomere $r = 15$ cm a tiaži $G = 50$ N je zaťažená silou $F = 100$ N. Guľa sa opiera v mieste A o zvislú stenu a v mieste B o homogénny nosník CD , dĺžky $l = 100$ cm. Nosník je upevnený k rámu kĺbom C a zvislým prútom DE . Určte reakcie vo všetkých väzbách, ak $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$.

Dané: \vec{F} , \vec{G} , r , l , α , β
 Hľadané: \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} , \vec{N}



Obrázok 1.1.1

Riešenie: Ide o sústavu dvoch telies v rovine (guľa 2 a nosník 3). Na guľu 2 pôsobí centrálna rovinná silová sústava, na nosník 3 všeobecná rovinná silová sústava. Pretože na guľu pôsobí CRSS, môžeme ju považovať za hmotný bod v rovine.

Tvarová a statická určitosť: Guľa je viazaná k rámu vonkajšou väzbou opretím v bode A , nosník vonkajším kĺbom v bode C a prútom 4 v bode D . Guľa a nosník sa o seba navzájom opierajú v bode B . Sú teda spojené vnútornou väzbou opretím.

$$i_c = v - u = (2m + 3n) - (u_{vn} + u_{vo}) = (2 \cdot 1 + 3 \cdot 1) - (2_C + 1_A + 1_B + 1_D) = 0$$

$$i_{vn} = v - u_{vn} - v_{ST} = (2m + 3n) - u_{vn} - v_{ST} = (2 \cdot 1 + 3 \cdot 1) - 1_B - 3_{ST} = 1$$

$$i_{vo} = v_{ST} - u_{vo} = 3 - (2_C + 1_A + 1_D) = -1$$

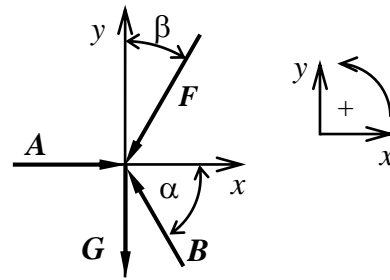
Sústava telies je celkovo tvarovo i staticky určitá, ale zvnútra je raz tvarovo neurčitá a zvonku raz tvarovo preurčená. Riešenie úlohy preto nie je možné zjednodušiť výpočtom reakcií vo vonkajších väzbách z podmienok rovnováhy sústavy telies ako celku (sústavového telesa). Úlohu budeme riešiť postupným uvoľňovaním a analýzou podmienok rovnováhy jednotlivých členov sústavy telies.

Analytické riešenie: Nakreslíme obrázky uvoľnenia osobitne pre guľu, ako hmotný bod v rovine (obr. 1.1.2) a pre nosník, ako teleso v rovine (obr. 1.1.3). Zvolíme vhodné súradnicové sústavy. Pre každý uvoľnený hmotný objekt napíšeme potrebný počet podmienok rovnováhy. Pri nahradení reakčných účinkov vo vnútornej väzbe v bode B zakreslíme reakčnú silu s opačnými orientáciami k obidvom hmotným objektom.

a) Guľa 2:

$$\sum F_{ix} = 0: A - F \sin \beta - B \cos \alpha = 0 \quad (a)$$

$$\sum F_{iy} = 0: -G - F \cos \beta + B \sin \alpha = 0 \quad (b)$$



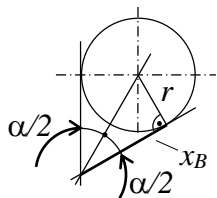
b) Nosník 3:

$$\sum F_{ix} = 0: C_x + B \cos \alpha = 0 \quad (c)$$

$$\sum F_{iy} = 0: C_y - B \sin \alpha + N = 0 \quad (d)$$

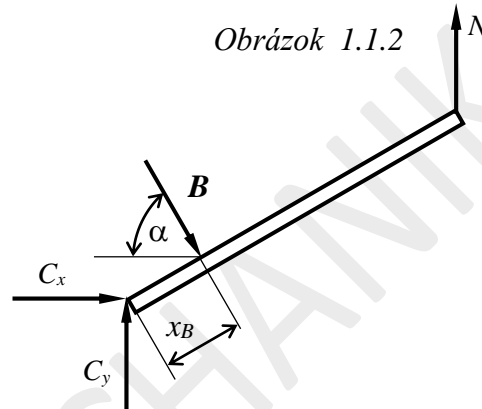
$$\sum M_{iC} = 0: -B x_B + N \sin \alpha l = 0 \quad (e)$$

kde vzdialenosť x_B vyjadríme:



$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{x_B} \Rightarrow x_B = \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

Obrázok 1.1.2



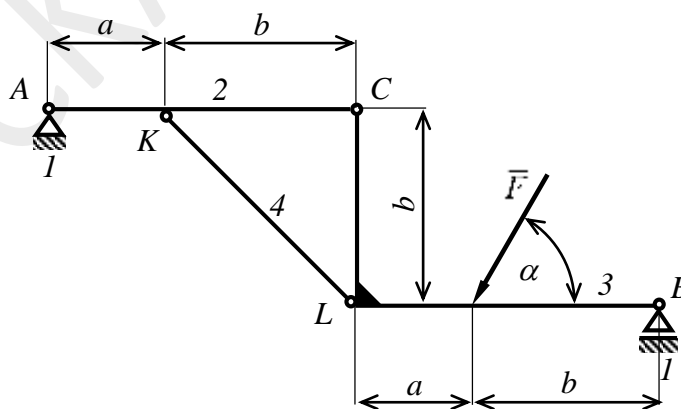
Obrázok 1.1.3

Riešením týchto rovníc dostávame veľkosti reakcií A, B, N, C_x, C_y a teda aj $C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}$.

PRÍKLAD 1.2: Sústava telies je podľa obrázku 1.2.1 zaťažená silou \bar{F} . Vypočítajte reakcie vo všetkých väzbách, ak je dané: $F = 6\text{ kN}$, $a = 1,5\text{ m}$, $b = 2,5\text{ m}$, $\alpha = 60^\circ$.

Dané: \bar{F}, a, b, α

Hľadané: $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{N}_4$



Obrázok 1.2.1

Riešenie: Sústavu telies je tvorená okrem rámu 1 členmi 2, 3, 4. Na základe rozboru síl pôsobiacich na jednotlivé členy sústavy boli členy 2 a 3 posúdené ako telesá v rovine (AC, CB). Na každé pôsobí VRSS. Člen 4 (KL) tu plní funkciu vnútornej väzby prútom. Sústavové teleso (sústava ako celok) je zaťažená silou \bar{F} .

Tvarová a statická určitosť: Sústava telies je viazaná k rámu vonkajšími väzbami: kĺbom v bode A a posuvným lôžkom v bode B. Členy sústavy sú spojené vnútornými väzbami, prútom KL a kĺbom v bode C.

$$i_c = v - u = (2m + 3n) - (u_{vn} + u_{vo}) = 3 \cdot 2 - (2_A + 1_B + 2_C + 1_{KL}) = 0$$

$$i_{vn} = v - u_{vn} - v_{ST} = (2m + 3n) - u_{vn} - v_{ST} = 3 \cdot 2 - 2_C - 1_{KL} - 3_{ST} = 0$$

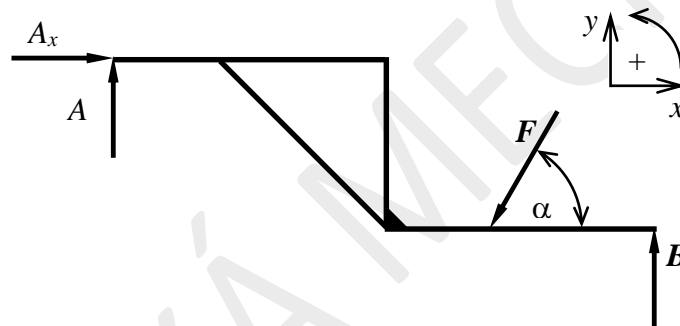
$$i_{vo} = 3 - u_{vo} = 3 - (2_A + 1_B) = 0$$

Sústava telies je celkovo, zvnútra i zvonku tvarovo a staticky určitá. Úlohu môžeme začať riešiť z podmienok rovnováhy sústavy síl pôsobiacej na sústavu telies ako celok, na tzv. sústavové teleso. Veľkosti reakcií vo vnútorných väzbách nájdeme z podmienok rovnováhy jednotlivých uvoľnených telies v rovine.

Analytické riešenie: Nakreslíme obrázky uvoľnenia osobitne pre sústavu ako celok a tiež pre jednotlivé telesá. Zvolíme vhodné súradnicové sústavy. Pre každý uvoľnený hmotný objekt napíšeme potrebný počet podmienok rovnováhy. Pri nahrádzaní reakčných účinkov vo vnútorných väzbách zakreslíme k obidvom hmotným objektom reakčné sily s navzájom opačnými orientáciami.

Pre vlastné riešenie využijeme iba šesť podmienok rovnováhy a to tri pre sústavové teleso a tri pre jedno z telies 2, alebo 3. Zostávajúce tri rovnice môžu slúžiť na kontrolu správnosti výpočtu.

a) **Sústavové teleso:**



Obrázok 1.2.2

$$\sum F_{ix} = 0: \quad A_x - F \cos \alpha = 0 \quad (a)$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad A_y - F \sin \alpha + B = 0 \quad (b)$$

$$\sum M_{iA} = 0: \quad B \cdot 2(a + b) - F \cos \alpha \cdot b - F \sin \alpha \cdot (2a + b) = 0 \quad (c)$$

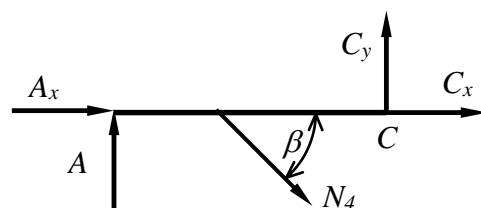
b) **Teleso 2:**

$$\sum F_{ix} = 0: \quad A_x + C_x + N_4 \cos \beta = 0 \quad (d)$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad A_y + C_y - N_4 \sin \beta = 0 \quad (e)$$

$$\sum M_{iC} = 0: \quad N_4 \sin \beta \cdot b - A_y \cdot (a + b) = 0 \quad (f)$$

kde uhol β vypočítame zo vzťahu: $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} = 1$



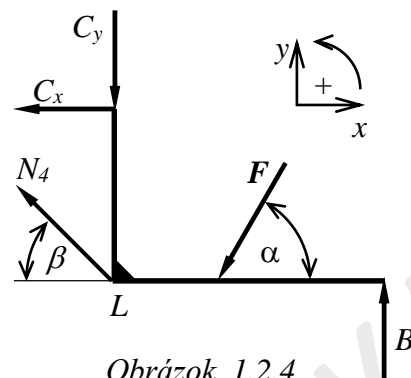
Obrázok 1.2.3

c) **Teleso 3:**

$$\sum F_{ix} = 0: \quad -C_x - N_4 \cos \beta - F \cos \alpha = 0 \quad (g)$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad B + N_4 \sin \beta - F \sin \alpha - C_y = 0 \quad (h)$$

$$\sum M_{iL} = 0: \quad B(a+b) + C_x b - F \sin \alpha a = 0 \quad (i)$$



Obrázok 1.2.4

Veľkosť a smer výsledných reakcií v bodoch A a C vypočítame:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}, \quad C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}, \quad (j)$$

$$\cos \alpha_A = \frac{A_x}{A}, \quad \cos \alpha_C = \frac{C_x}{C}. \quad (k)$$

2 ROVINNÉ PRÚTOVÉ SÚSTAVY

Osobitným prípadom nepohyblivých sústav telies sú tzv. *priehradové konštrukcie*, s ktorými sa stretávame v rôznych stavebných konštrukciách, ako sú mosty, stožiare, žeriavy, strešné konštrukcie. Z hľadiska konštrukčného riešenia sú tieto konštrukcie vytvorené zväčša z rôzne usporiadaných valcovaných profilov spojených navzájom v uzloch, ktoré nazývame styčníky. Profily môžu byť v jednotlivých uzloch spojené pomocou guľových alebo valcových kĺbov, alebo môžu byť upevnené k styčníkovej doske pomocou nitov, skrutiek alebo zvarov. Podľa priestorového usporiadania konštrukcie a typu silovej sústavy vonkajších síl delíme priehradové konštrukcie na priestorové a rovinné.

Zaťaženie priehradových konštrukcií môže byť sústredené v jednom mieste (bremeno zdvíhané žeriavom) alebo spojité (ťaž vozovky, strechy, sneh, vlastná ťaž konštrukcie). V niektorých prípadoch je pôsobenie vonkajšieho zaťaženia trvalé, inokedy sa mení s časom (prechádzajúci vlak, vietor).

Na riešenie priehradových konštrukcií je potrebné vytvoriť vhodný *statický výpočtový model*, ktorý vznikne na základe týchto zjednodušujúcich predpokladov:

- Prvky tvoriace priehradovú konštrukciu (valcované profily) môžeme považovať za jednorozmerné telesá (berieme do úvahy len ich dĺžku) upevnené ku konštrukcii dvoma väzbami. Sú to potom *binárne členy*.
- Spojenia všetkých binárnych členov považujeme za kĺbové. Je to možné aj v prípade nitovaných, resp. zvarovaných styčníkov, ak spájané prvky nie sú veľmi krátke. Podmienkou je vzájomné usporiadanie prvkov v jednotlivých uzloch tak, aby sa ťažiskové osi všetkých prvkov spojených v jednom uzle pretínali v jednom bode, ktorý sa nazýva *styčný bod*.
- So zaťažením konštrukcie uvažujeme len v styčných bodoch. Spojité zaťaženie prvkov konštrukcie redukuje do dvoch styčníkov, ktorými je prvok upevnený ku konštrukcii.

Takto vytvorený výpočtový model nazývame *prúťová sústava*. Ide o sústavu n - nehmotných, nezaťažených telies – prúťov, ktoré sú navzájom spojené v kĺboch, tzv. styčníkoch a v týchto styčníkoch sú zaťažené silami. Pri takomto zaťažení v prúťoch vznikajú len osové sily (*ťah* alebo *tlak*). Prúťové sústavy môžu byť priestorové a rovinné. V tejto kapitole sa budeme zaoberať iba rovinnými prúťovými sústavami.

2.1 TVAROVÁ URČITOSŤ PRÚTOVÝCH SÚSTAV

Prúťovú sústavu výhodne posudzujeme ako *sústavu hmotných bodov (styčníkov)* vzájomne viazaných *prúťmi*. Prúťová sústava môže sama osebe tvoriť celok, ktorý nazývame *prúťovým telesom*.

Tvarovú určitost' prúťového telesa, teda *vonkajšiu tvarovú určitost' rovinatej prúťovej sústavy*, budeme posudzovať podľa väzbovej závislosti platnej pre teleso v rovine.

$$i_{vo} = 3 - u_{vo}$$

Vnútorňú tvarovú určitost' prúťovej sústavy posudzujeme podľa vzťahu

$$i_{vn} = 2s - p = 3 \begin{cases} > & \text{vnútorne tvarovo neurčitá} \\ < & \text{vnútorne tvarovo určité} \\ < & \text{vnútorne tvarovo preurčená} \end{cases}$$

kde s - počet styčníkov,
 p - počet prúťov,
 3 - v oboch vzťahoch počet stupňov voľnosti pohybu prúťového telesa,
 2 - počet stupňov voľnosti pohybu voľného hmotného bodu v rovine.

Celkovú tvarovú určitosť prútovej sústavy posudzujeme podľa vzťahu

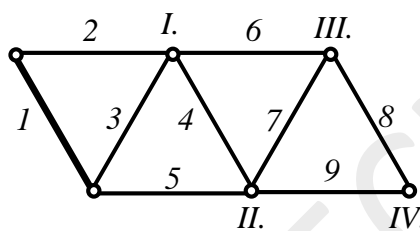
$$i_c = 2s - p - u_{vo}$$

Ak $i_c = 0$, sústava je celkovo tvarovo a staticky určitá.

2.2 SPÔSOBY TVORENIA PRÚTOVÝCH SÚSTAV

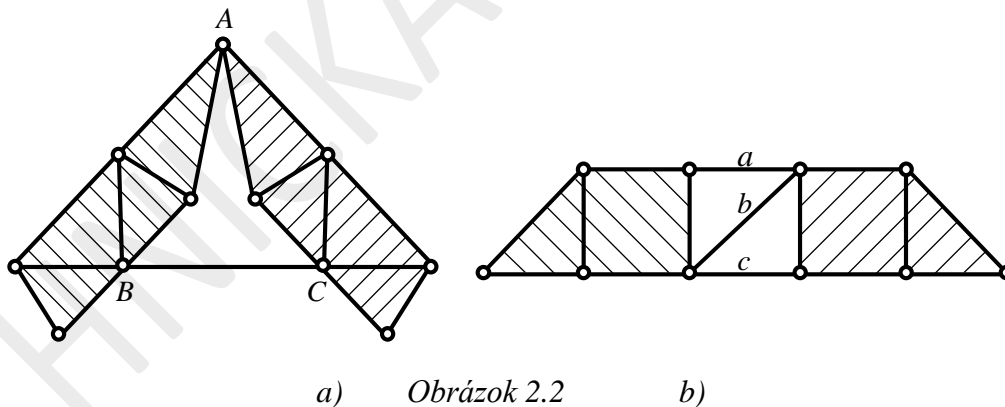
Prútovú sústavu môžeme vytvoriť nasledujúcimi spôsobmi:

- Vychádzame z jedného tuhého telesa – prúta (napr. č. 1). Pridáme styčník I., ktorý viažeme k základnému telesu 2 prútmi (č. 2, 3). Takto dostaneme znova tuhý celok. Postupne pridávame ďalšie styčníky, ktoré znovu viažeme dvoma prútmi (obr. 2.1). Takýmto spôsobom vytvorené tzv. trojuholníkové prútové sústavy sú vnútorne tvarovo a staticky určité.



Obrázok 2.1

- Dve tuhé sústavy (tuhé telesá), vytvorené prvým spôsobom spojíme tak, že majú navzájom ubraté 3 stupne voľnosti (obr. 2.2). Takýmto spôsobom vytvoríme znova tuhé teleso, na ktoré sa môžeme pozeráť ako na sústavu telies vnútorne tvarovo a staticky určitú.



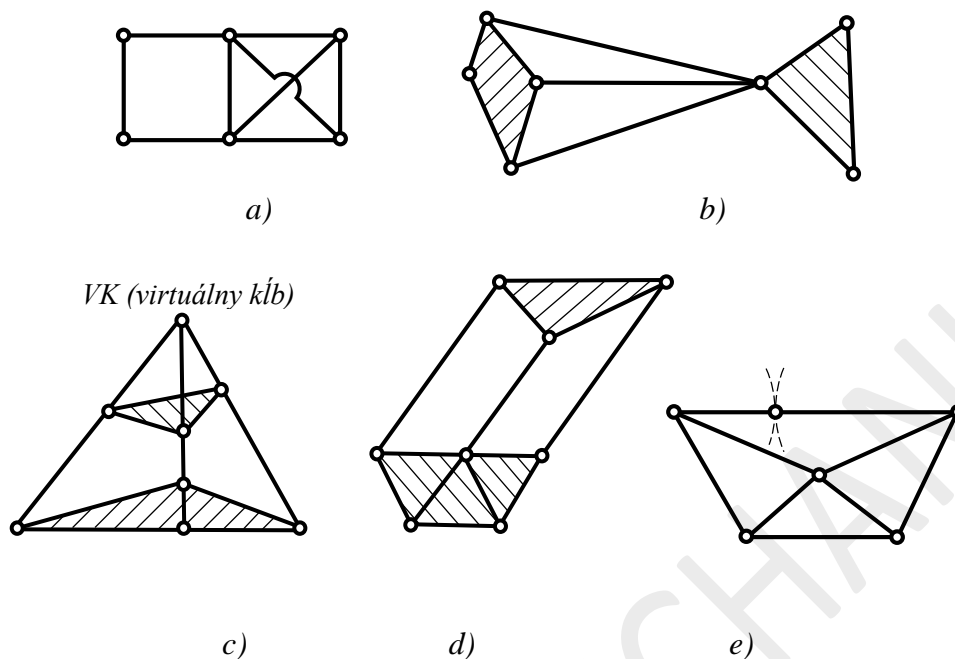
a) Obrázok 2.2 b)

- Zo sústavy vytvorenej prvým, alebo druhým spôsobom môžeme vytvoriť novú – inú prútovú sústavu prekladaním prútov z ich pôvodného miesta na iné. Nesmieme pritom porušiť tvarovú určitosť v žiadnej časti sústavy.

2.3 VÝNIMOČNÉ PRÍPADY VÄZIEB ROVINNÝCH PRÚTOVÝCH SÚSTAV

Výnimočné prípady sú také, v ktorých len formálne $i_c = 0$, ale sústava je tvarovo neurčitá. Výnimočný prípad nastane, ak časť sústavy je tvarovo neurčitá (pohyblivá) a ďalšia časť sústavy je tvarovo preurčená (staticky neurčitá) (obr. 2.3a). Pri spojení dvoch sústav podľa druhého spôsobu tvorenia prútovej sústavy vznikne výnimočný prípad vtedy, keď tri prúty spájajúce dve prútové telesá sa pretínajú vo vlastnom – skutočnom resp. virtuálnom (obr. 2.3

b, c) alebo v nevlastnom bode (sú vzájomne rovnobežné) (*obr. 2.3d*). Iný príklad je na *obr. 2.3e*.



Obrázok 2.3

2.4 STATICKÉ RIEŠENIE PRÚTOVÝCH SÚSTAV

Úlohou statického riešenia prútových sústav je určiť veľkosti osových síl v prútoch, ich orientáciu (ťah alebo tlak) a neznáme parametre vonkajších reakcií v závislosti na vonkajších zaťažujúcich silových účinkoch. Úlohy je možné riešiť viacerými metódami analyticky alebo graficky. V tejto kapitole sú popísané dve metódy riešenia prútových sústav, v rámci ktorých pri riešení využívame:

- *Rovnováhu centrálnych silových sústav*, ktoré pôsobia na jednotlivé styčníky (metóda styčných bodov).
- *Rovnováhu síl pôsobiacich na časť prútovej sústavy* (priesečná metóda).

2.4.1 Metóda styčných bodov

Princíp metódy spočíva v tom, že sa rieši rovnováha všetkých síl pôsobiacich na každý styčník osobitne. Pri postupnom uvoľňovaní všetkých styčníc sa pre každý styčník zostavia podmienky rovnováhy centrálnej silovej sústavy, ktorá naň pôsobí.

V prípade, že sústava ako celok (sústavové teleso) je tvarovo a staticky určitá, riešenie rovnováhy vonkajších síl (slúžiacich na výpočet vonkajších reakcií) zjednoduší celkové riešenie rovnovážnych rovníc pre jednotlivé styčníky.

Počtárske (analytické) riešenie

Podľa postupu výpočtu delíme styčníkovú metódu na *všeobecnú* a *postupnú*. *Všeobecná styčníková metóda* je univerzálna metóda analytického riešenia prútových sústav. Zostavené podmienky rovnováhy pre jednotlivé styčníky predstavujú systém lineárnych algebraických rovníc na výpočet parametrov neznámych síl v tvare

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 \vdots & \\
 a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n &= b_r
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

kde n je počet neznámých,
 r je počet rovníc,
 x_k , $k=1, 2, \dots, n$ sú neznáme parametre síl,
 a_{jk}, b_j , $j=1, 2, \dots, r$ sú známe reálne čísla, závislé od rozmerov prútovej sústavy
a parametrov akčných síl.

Systém rovníc (2.1) je možné zapísať aj v maticovom tvare

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2.2}$$

kde $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ je matica koeficientov systému rovníc typu (r, n) ,
 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ je stĺpcová matica neznámých veličín,
 $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_r]^T$ je stĺpcová matica pravej strany systému rovníc.

Riešením (2.2) dostaneme

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \tag{2.3}$$

Ak sa počet rovníc r rovná počtu neznámých n , je splnená nutná podmienka statickej určítosti. Ak je pritom $D(\mathbf{A}) \neq 0$, má systém rovníc (2.1) jediné riešenie, úloha je staticky určitá. Efektívne je v tomto prípade využitie PC pri riešení systému rovnovážnych rovníc. Výhodou je, že všetky neznáme môžeme vypočítať naraz. V naznačenom riešení prútovej sústavy na obr. 2.4 je uvedený príklad maticového zápisu systému lineárnych algebrických rovníc (b).

Postupnú styčnickovú metódu používame pri riešení jednoduchých prútových sústav, kde postupne riešime statickú rovnováhu jednotlivých styčnickov sústavy. Pre sily pôsobiace na každý styčnik *musia byť splnené dve podmienky* rovnováhy. K dispozícii je $2s$ neznámých rovníc s $(p+3)$ neznámymi parametrami v tvarovo určitej prútovej sústave.

V prípade, že sústava ako celok (sústavové teleso) je tvarovo a staticky určitá, použitie troch podmienok rovnováhy pre rovnováhu vonkajších síl (slúžiacich na výpočet vonkajších reakcií) zjednoduší riešenie rovnovážnych rovníc pre jednotlivé styčniky.

Pri konkrétnom riešení prútovej sústavy vo všetkých prútoch predpokladáme ťahové osové sily. Záporné znamienko vo výsledku bude udávať, že príslušná osová sila je tlaková. Výhodne postupujeme od styčnika k styčniku tak, aby sme v dvoch podmienkach rovnováhy pre daný styčnik *mali iba dve neznáme*.

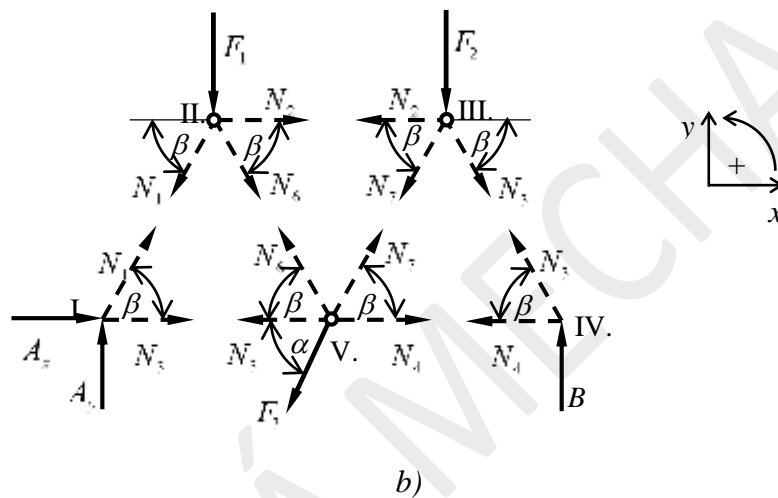
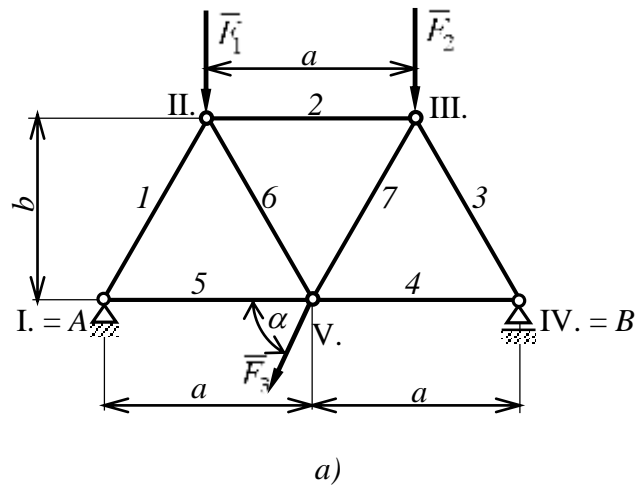
Na obr. 2.4a je znázornená jednoduchá prútová sústava. Na obr. 2.4b je nakreslená tá istá sústava s uvoľnenými styčnikami pripravená na počítaťské riešenie metódou styčných bodov (5 styčnikov; 10 rovnovážnych rovníc, v nich neznámých 7 osových síl vo vnútorných väzbách prútom $N_1 \div N_7$ a tri reakcie vo vonkajších väzbách B, A_x, A_y).

Pri riešení úlohy posúdime najprv tvarovú určitosť prútovej sústavy:

$$i_c = 2s - p - u_{vo} = 2 \cdot 5 - 7 - (2_A + 1_B) = 0$$

$$i_{vo} = 3 - u_{vo} = 3 - (2_A + 1_B) = 0$$

$$i_{vn} = 2s - p = 2 \cdot 5 - 7 = 3$$



Obrázok 2.4

Sústava je tvarovo určitá. Ďalej na základe obrázkov uvoľnenia (obr. 2.4b) napíšeme podmienky rovnováhy silových sústav, ktoré pôsobia na jednotlivé styčníky:

$$\begin{aligned} \text{styčník I.} \quad \sum F_{ix} = 0: & \quad A_x + N_1 \cos \beta + N_5 = 0 \\ \sum F_{iy} = 0: & \quad A_y + N_1 \sin \beta = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{styčník II.} \quad \sum F_{ix} = 0: & \quad -N_1 \cos \beta + N_2 + N_6 \cos \beta = 0 \\ \sum F_{iy} = 0: & \quad -F_1 - N_1 \sin \beta - N_6 \sin \beta = 0 \end{aligned} \quad (\text{a})$$

$$\begin{aligned} \text{styčník III.} \quad \sum F_{ix} = 0: & \quad -N_2 + N_3 \cos \beta - N_7 \cos \beta = 0 \\ \sum F_{iy} = 0: & \quad -F_2 - N_3 \sin \beta - N_7 \sin \beta = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{styčník IV.} \quad \sum F_{ix} = 0: & \quad -N_3 \cos \beta - N_4 = 0 \\ \sum F_{iy} = 0: & \quad B + N_3 \sin \beta = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{styčník V.} \quad \sum F_{ix} = 0: & \quad -F_3 \cos \alpha + N_4 - N_5 - N_6 \cos \beta + N_7 \cos \beta = 0 \\ \sum F_{iy} = 0: & \quad -F_3 \sin \alpha + N_6 \sin \beta + N_7 \sin \beta = 0 \end{aligned}$$

Maticový zápis tohto systému lineárnych algebraických rovníc pre riešenie pomocou PC:

$$\begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\cos \beta & 1 & 0 & 0 & 0 & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & -\cos \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \beta & 0 & 0 & 0 & -\sin \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos \beta & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -\cos \beta & \cos \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \beta & \sin \beta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \\ A_x \\ A_y \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_1 \\ 0 \\ F_2 \\ 0 \\ 0 \\ F_3 \cos \alpha \\ F_3 \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{b})$$

Sústava je tvarovo určitá, preto riešenie zjednodušíme zostavením podmienok rovnováhy prútového telesa, z ktorých určíme veľkosti zložiek vonkajších reakcií:

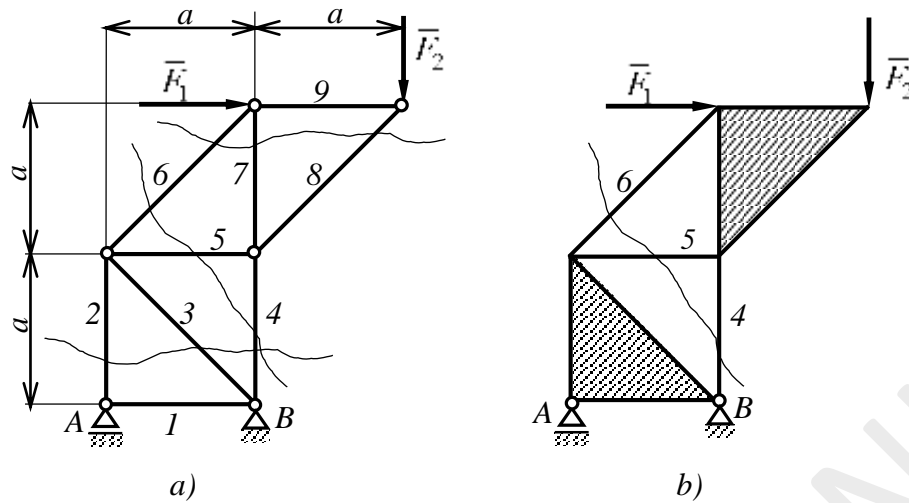
$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0: & \quad A_x - F_3 \cos \alpha = 0 \\ \sum F_{iy} = 0: & \quad A_y + B - F_1 - F_2 - F_3 \sin \alpha = 0 \\ \sum M_{iA} = 0: & \quad -F_1 \cdot 0,5a - F_2 \cdot 1,5a - F_3 \sin \alpha \cdot a + B \cdot 2a = 0 \end{aligned} \quad (\text{c})$$

2.4.2 Metóda priesečná

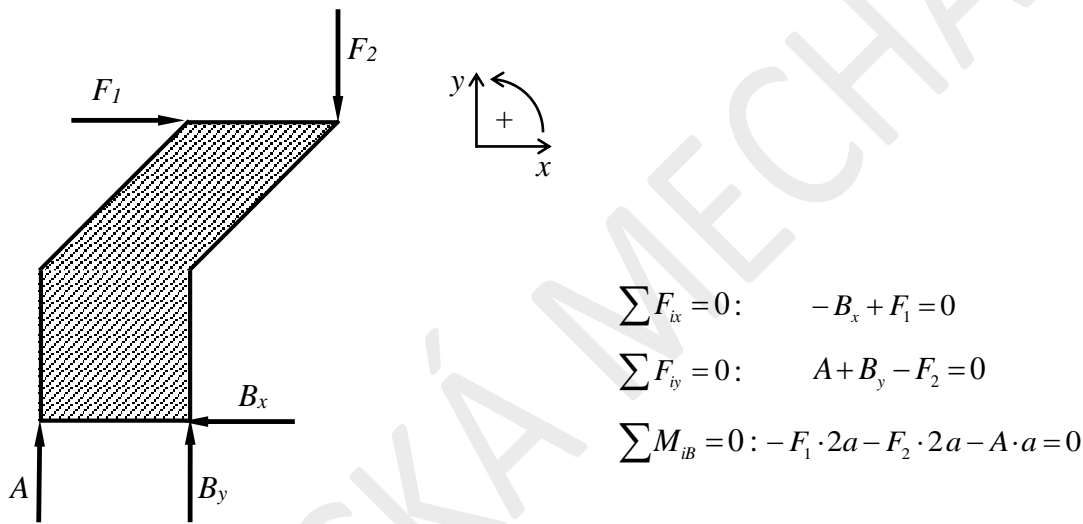
Pri riešení osových síl priesečnou metódou vychádzame z predpokladu: ak je prútová sústava v rovnováhe, potom aj sily pôsobiace na každú odrezanú časť prútovej sústavy musia byť v rovnováhe. Rovnováhu tejto časti môžeme riešiť ako rovnováhu telesa v rovine, resp. v priestore. Pre teleso v rovine (v priestore) môžeme napísať 3 (6) nezávislých statických podmienok rovnováhy, z ktorých vieme určiť 3 (6) neznámych osových síl. Z toho vyplýva, že pri riešení touto metódou je potrebné rozdeliť prútovú sústavu *mysleným rezom cez tri (v priestore šesť) prúty*, ktoré sa nepretínajú v jednom bode (ani vo vlastnom ani v nevlastnom). Z rovnováhy jednej z týchto častí ako prútového telesa vypočítame počtársky alebo graficky (Culmannova úloha) osové sily v rezom pretnutých prútoch. Ak na každú z odrezaných častí pôsobia okrem zaťažujúcich síl aj reakcie, pri použití priesečnej metódy je nutné tieto reakcie najprv určiť z riešenia rovnováhy prútového telesa.

Priesečnú metódu používame vtedy, ak:

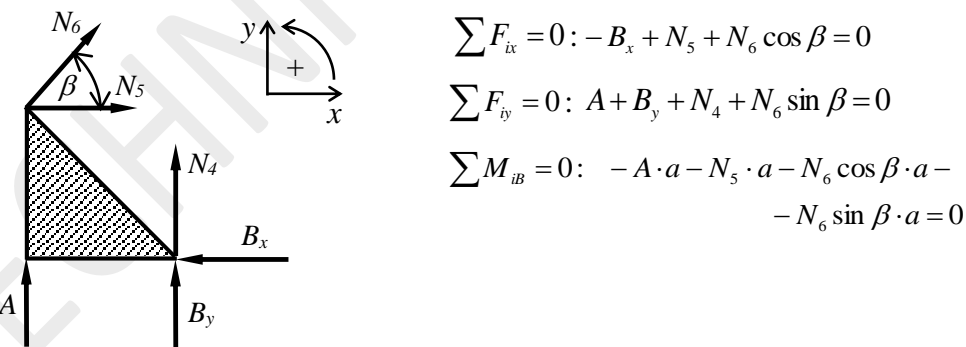
- Pri grafickom riešení nemôžeme použiť metódu styčných bodov.
- Chceme výpočet zjednodušiť určením osových síl v troch prútoch a ďalej pokračovať riešením jednoduchej sústavy metódou styčných bodov.
- Chceme vykonať kontrolu výpočtu niektorých osových síl.



Obrázok 2.5



a)



b)

Obrázok 2.6

Na obr. 2.5 je naznačený postup riešenia osových síl prútovej sústavy priesečnou metódou. Na obr. 2.5a sú zakreslené všetky možnosti rozdelenia danej prútovej sústavy myslenným rezom. Vybraným myslenným rezom na obr. 2.5b vedeným cez prúty 6, 5, 4, je prútová sústava rozdelená na dve samostatné časti - telesá v rovine. Riešením rovnováhy síl pôsobiacich na jedno z telies v rovine sú určené osové sily v prútoch, ktorými bol vedený myslenný rez.

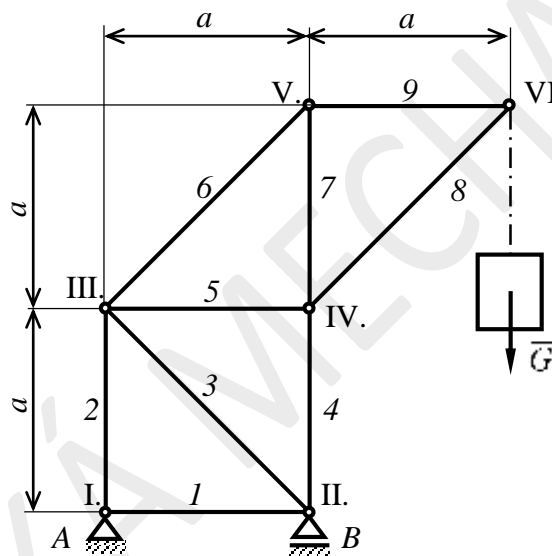
Na obr. 2.6a je uvoľnená prúťová sústava ako celok (tzv. prúťové teleso) pre analytické riešenie vonkajších väzbových reakcií. Na obr. 2.6b je jedna odrezaná časť prúťovej sústavy (teleso v rovine) uvoľnená pre určenie osových síl N_6, N_5, N_4 .

RIEŠENÉ PRÍKLADY

PRÍKLAD 2.1: Daná je prúťová sústava upevnená v bodoch A, B (obr. 2.1.1) a zaťažená bremenom tiaže \bar{G} o veľkosti $G = 20 \text{ kN}$, $a = 1 \text{ m}$. Určte tvarovú a statickú určitosť a sily vo všetkých väzbách prúťom prúťovej sústavy. Úlohu riešte metódou styčných bodov. Veľkosti osových síl v prúťoch 6, 7, 8 prekontrolujte priesečnou metódou.

Dané: \bar{G}, a

Hľadané: $\bar{A}, \bar{B}, \bar{N}_1 \div \bar{N}_9$



Obrázok 2.1.1

Riešenie: Prúťová sústava je špeciálnym typom sústavy telies v rovine. Je tvorená skupinou bodov navzájom viazaných prúťmi. Na sústavu ako celok pôsobí všeobecná rovinná silová sústava (VRSS) a na jednotlivé hmotné body (styčníky) centrálna rovinná silová sústava (CRSS). Princíp riešenia rovnováhy prúťovej sústavy ako celku a jej jednotlivých členov je rovnaký, ako pri riešení rovnováhy sústavy telies v rovine.

Tvarová určitosť: Určíme a očísľujeme všetky styčníky, z ktorých je prúťová sústava zložená (I. ÷ VI.). Očísľujeme prúťy ako vnútorné väzby (1 ÷ 9). Každý z nich odoberá jeden stupeň voľnosti pohybu. Vonkajší kĺb v bode A odoberá prúťovému telesu v rovine dva stupne voľnosti pohybu a posuvné lôžko v bode B jeden stupeň voľnosti pohybu.

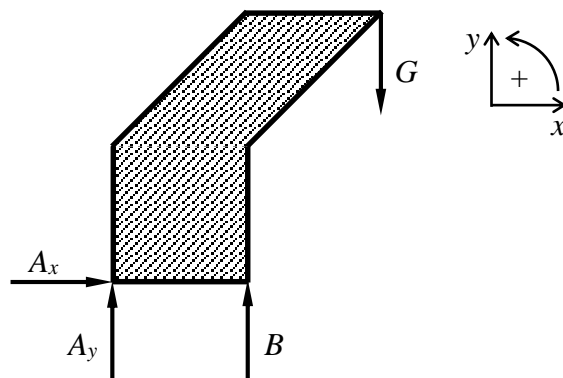
$$\text{Celková tvarová určitosť: } i_c = 2s - p - u_{vo} = 2 \cdot 6 - 9 - (2_A + 1_B) = 0$$

$$\text{Vnútornátvarová určitosť: } i_{vn} = 2s - p = 2 \cdot 6 - 9 = 3$$

$$\text{Vonkajšia tvarová určitosť: } i_{vo} = 3 - u_{vo} = 3 - (2_A + 1_B) = 0$$

Úloha je celkovo, zvnútra i zvonku, tvarovo určitá.

Analytické riešenie metódou styčných bodov: Prútová sústava ako celok je telesom v rovine zaťaženým VRSS. Úloha je zvonku tvarovo a staticky určitá, preto môžeme pomocou troch nezávislých statických podmienok rovnováhy určiť najskôr reakcie vo vonkajších väzbách. Uvoľníme prútovú sústavu ako celok (obr. 2.1.2):



Obrázok 2.1.2

Napišeme skalárne podmienky rovnováhy:

$$\sum F_{ix} = 0: \quad A_x = 0 \quad (\text{a})$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad A_y + B - G = 0 \quad (\text{b})$$

$$\sum M_{iA} = 0: \quad -G \cdot 2a + B \cdot a = 0 \quad (\text{c})$$

Vypočítame veľkosť a smer výslednej reakcie v bode A:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad (\text{d})$$

$$\cos \alpha_A = \frac{A_x}{A} = 0 \quad (\text{e})$$

Ďalej v ľubovoľnom poradí postupne uvoľníme jednotlivé styčníky a pre každý styčník napíšeme dve statické podmienky rovnováhy.

Styčník I.

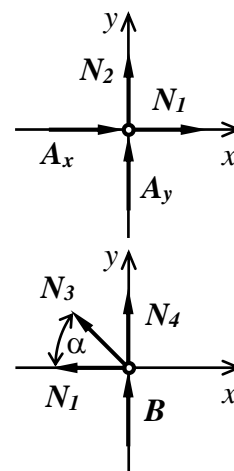
$$\sum F_{ix} = 0: \quad A_x + N_1 = 0 \quad (\text{f})$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad A_y + N_2 = 0 \quad (\text{g})$$

Styčník II.

$$\sum F_{ix} = 0: \quad -N_1 - N_3 \cos \alpha = 0 \quad (\text{h})$$

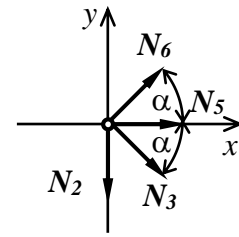
$$\sum F_{iy} = 0: \quad N_3 \sin \alpha + N_4 + B = 0 \quad (\text{i})$$



Styčník III.

$$\sum F_{ix} = 0: N_5 + N_3 \cos \alpha + N_6 \cos \alpha = 0 \quad (j)$$

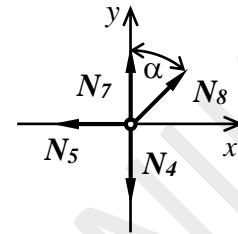
$$\sum F_{iy} = 0: -N_2 - N_3 \sin \alpha + N_6 \sin \alpha = 0 \quad (k)$$



Styčník IV.

$$\sum F_{ix} = 0: -N_5 + N_8 \sin \alpha = 0 \quad (l)$$

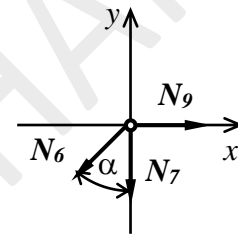
$$\sum F_{iy} = 0: -N_4 + N_7 + N_8 \cos \alpha = 0 \quad (m)$$



Styčník V.

$$\sum F_{ix} = 0: -N_6 \sin \alpha + N_9 = 0 \quad (n)$$

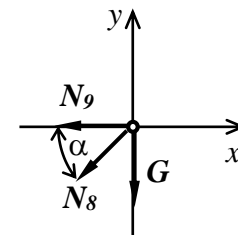
$$\sum F_{iy} = 0: -N_6 \cos \alpha - N_7 = 0 \quad (o)$$



Styčník VI.

$$\sum F_{ix} = 0: -N_9 - N_8 \cos \alpha = 0 \quad (p)$$

$$\sum F_{iy} = 0: -N_8 \sin \alpha - G = 0 \quad (r)$$



Riešením systému 12 lineárnych rovníc určíme veľkosti osových síl v prútoch:

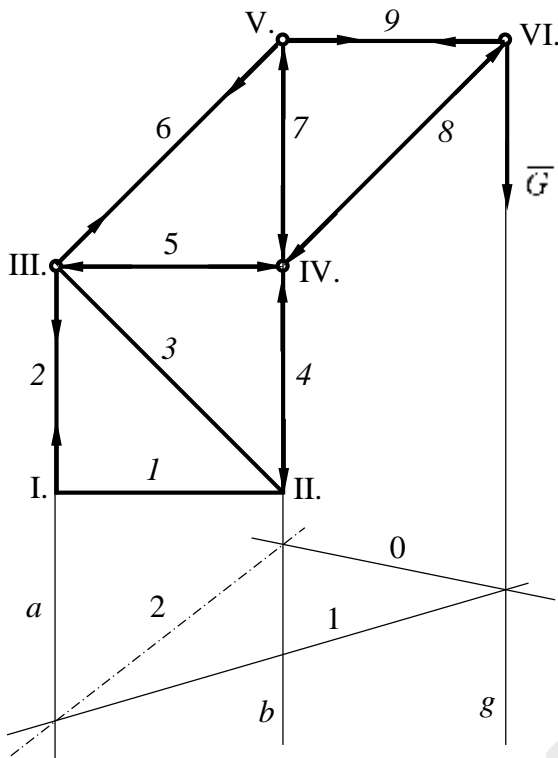
$A_x = 0$	$B = 40kN$	$N_3 = 0$	$N_6 = 28,28kN$
$A_y = -20kN$	$N_1 = 0$	$N_4 = 40kN$	$N_7 = -20kN$
$A = -20kN$	$N_2 = 20kN$	$N_5 = -20kN$	$N_8 = -28,28kN$

Poznámka: Vo všetkých vnútorných väzbách prútom sme predpokladali namáhanie ťahom. Kladné znamienko potvrdzuje silu ťahovú, záporné znamienko hovorí o tlakovej sile.

Grafické riešenie metódou styčných bodov:

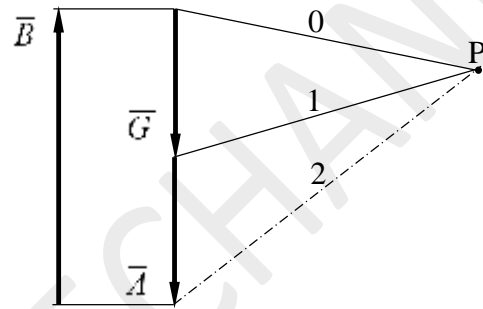
Zvolíme mierku dĺžok m_d a mierku síl m_F . Pri grafickom riešení je obvykle nutné začať úlohu riešiť z vonkajších podmienok rovnováhy. Uvoľníme prútovú sústavu ako celok (obr. 2.1.3). Pre prútové teleso napíšeme vektorovú podmienku rovnováhy a zostrojením silového obrazca (obr. 2.1.4) a výslednicovej čiary (obr. 2.1.3) nájdeme veľkosti vonkajších reakcií A , B . Uvoľníme jednotlivé styčnisky. Pre každý styčnisk napíšeme vektorovú podmienku rovnováhy. Zostrojíme uzavreté silové obrazce (obr. 2.1.5). Odmeráme veľkosti hľadaných osových síl.

$$m_d = \frac{1m}{3cm} \quad m_F = \frac{10kN}{1cm}$$



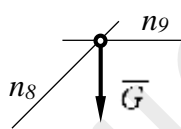
Obrázok 2.1.3

$$\begin{matrix} \bar{G} + \bar{A} + \bar{B} = \bar{0} & (s) \\ \wedge & \wedge & \wedge \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{matrix}$$

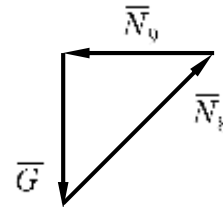


Obrázok 2.1.4

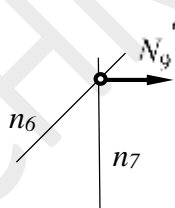
Styčnák VI.



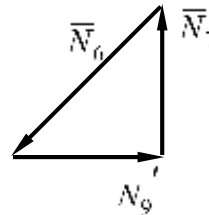
$$\bar{G} + \bar{N}_9 + \bar{N}_8 = \bar{0} \quad (t)$$



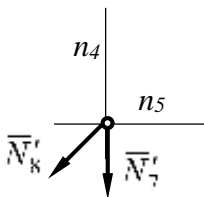
Styčnák V.



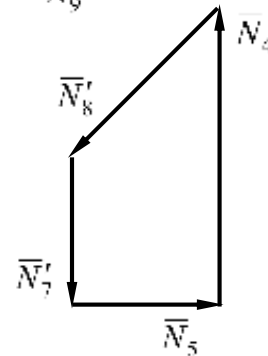
$$\bar{N}_9' + \bar{N}_7 + \bar{N}_6 = \bar{0} \quad (u)$$



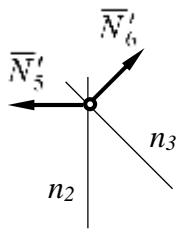
Styčnák IV.



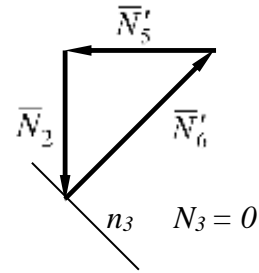
$$\bar{N}_7' + \bar{N}_8' + \bar{N}_4 + \bar{N}_5 = \bar{0} \quad (v)$$



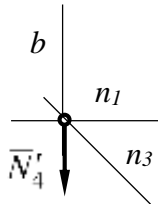
Styčnák III.



$$\bar{N}'_6 + \bar{N}'_5 + \bar{N}_3 + \bar{N}_2 = \bar{0} \quad (\text{x})$$



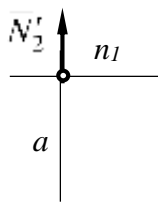
Styčnák II.



$$\bar{B} + \bar{N}'_4 + \bar{N}'_3 + \bar{N}_1 = \bar{0} \quad (\text{y})$$



Styčnák I.



$$\bar{A} + \bar{N}'_1 + \bar{N}'_2 = \bar{0} \quad (\text{z})$$



Obrázok 2.1.5

Začneme styčníkom VI., v ktorom sú iba dve neznáme sily a známa sila tiaže \bar{G} (podmienka riešiteľnosti grafickým spôsobom). Pokračujeme styčníkom, v ktorom sú znova maximálne dve neznáme osové sily. Pri prechode od jedného styčníka k druhému zmeníme orientácie už známych osových síl (sily sú označené čiarkou).

Po odmeraní dĺžky grafických obrazov jednotlivých síl v silových obrazcoch a prenasobení zvolenou mierkou síl dostávame ich veľkosti:

$$A_g = 2\text{cm} \Rightarrow A = A_g m_F = -20\text{kN}$$

$$B_g = 4\text{cm} \Rightarrow B = B_g m_F = 40\text{kN}$$

$$N_{1g} = 0 \Rightarrow N_1 = 0$$

$$N_{2g} = 2\text{cm} \Rightarrow N_2 = N_{2g} m_F = 20\text{kN}$$

$$N_{3g} = 0 \Rightarrow N_3 = 0$$

$$N_{4g} = 4\text{cm} \Rightarrow N_4 = N_{4g} m_F = -40\text{kN}$$

$$N_{5g} = 2\text{cm} \Rightarrow N_5 = N_{5g} m_F = -20\text{kN}$$

$$N_{6g} = 2,8\text{cm} \Rightarrow N_6 = N_{6g} m_F = 28\text{kN}$$

$$N_{7g} = 2\text{cm} \Rightarrow N_7 = N_{7g} m_F = -20\text{kN}$$

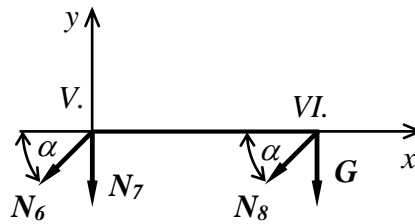
$$N_{8g} = 2,8\text{cm} \Rightarrow N_8 = N_{8g} m_F = -28\text{kN}$$

$$N_{9g} = 2\text{cm} \Rightarrow N_9 = N_{9g} m_F = 20\text{kN}$$

Poznámka: Správne orientácie reakcií vo vonkajších väzbách zistíme zo silového obrazca prútového telesa (veľkosti reakcií A a B zapíšeme s príslušným znamienkom). Postupným zostrojovaním silových obrázkov pre jednotlivé styčnicky dostaneme správne orientácie vnútorných síl. Zakreslíme ich do prútovej sústavy k riešenému styčníku (obr. 2.1.3). Zistíme tak, či ide o silu ťahovú, alebo tlakovú.

Kontrola osových síl v prútoch 6, 7, 8 priesečnou metódou

Analytické riešenie: Rovnováhu časti prútovej sústavy oddelenú myslenným rezom vedeným prútni 6, 7, 8 riešime ako rovnováhu telesa v rovine zaťaženého VRSS.



$$\sum F_{ix} = 0 \quad - N_6 \cos \alpha - N_8 \cos \alpha = 0 \tag{a'}$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad - N_6 \sin \alpha - N_8 \sin \alpha - N_7 - G = 0 \tag{b'}$$

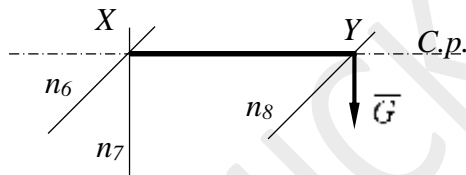
$$\sum M_{iV.} = 0; \quad - G a - N_8 \sin \alpha a = 0 \tag{c'}$$

$$N_6 = 28,28kN$$

Úpravou rovníc a dosadením daných hodnôt dostaneme: $N_7 = -20kN$

$$N_8 = -28,28kN$$

Grafické riešenie: Na odrezanú časť prútovej sústavy pôsobia štyri sily, z ktorých úplne poznáme tiaž \bar{G} . U osových síl poznáme len ich nositeľky. Úlohu riešime pomocou Culmannovej priamky.

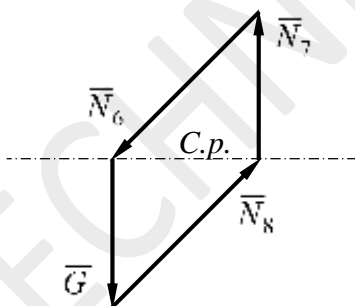


$$\bar{G} + \bar{N}_8 + \bar{N}_7 + \bar{N}_6 = \bar{0} \tag{d'}$$

$$\bar{R}_1 + \bar{R}_2 = \bar{0} \tag{e'}$$

Priesečník X: $\bar{G} + \bar{N}_8 + \bar{R}_2 = \bar{0} \tag{f'}$

Priesečník Y: $\bar{R}_1 + \bar{N}_7 + \bar{N}_6 = \bar{0} \tag{g'}$



Obrázok 2.1.6

3 ŤAŽISKO HMOTNÝCH A GEOMETRICKÝCH ÚTVAROV

Strediskom rovnobežnej silovej sústavy, ktorej sily sú viazané k pôsobiskám, sa nazýva bod, cez ktorý prechádza výslednica tejto silovej sústavy pri otočení sústavy o ľubovoľný uhol. V prípade, že rovnobežnými silami sú sily zemskej príťažlivosti (sily tiaže jednotlivých častí telesa), stredisko tejto silovej sústavy sa nazýva *ťažisko telesa* (*stredisko hmotnosti, hmotné centrum*).

Polohu ťažiska môžeme určovať *analyticky, graficky a experimentálne*. Pri *analytickom* a *grafickom* riešení je predpokladom znalosť rozloženia hmotnosti v priestore telesa, pričom grafické riešenie sa obmedzuje prevažne na rovinné alebo symetrické priestorové telesá. *Experimentálne* určovanie polohy ťažiska sa robí predovšetkým pri tvarovo zložitých a nehomogénnych telesách.

3.1 ANALYTICKÉ URČENIE POLOHY ŤAŽISKA

Na objemový element dV telesa mernej hmotnosti ρ pôsobí elementárna sila $dG = \rho dV g$ kde g je veľkosť gravitačného (tiažového) zrýchlenia. Pre x -ovú súradnicu ťažiska platí vzťah

$$x_T = \frac{\int_V x \rho dV g}{\int_V \rho dV g} = \frac{\int_V x \rho dV}{\int_V \rho dV}, \quad (3.1)$$

pričom integrujeme po celom objeme V telesa. Podobné vzťahy dostaneme pre y_T a z_T .

Na výpočet integrálov musíme poznať rozloženie hustoty ρ v telese, t. j. funkciu

$$\rho = \rho(x, y, z). \quad (3.2)$$

V prípade homogénneho útvaru je hustota, resp. merná tiaž telesa konštantná. Stredisko hmoty je v tomto prípade totožné s ťažiskom geometrického útvaru. Z toho vyplýva, že poloha ťažiska homogénneho telesa nezávisí od jeho tiaže, ale je daná geometrickým tvarom telesa.

$$x_T = \frac{\int_V x dV}{V}, \quad y_T = \frac{\int_V y dV}{V}, \quad z_T = \frac{\int_V z dV}{V} \quad (3.3)$$

V prípade homogénneho telesa konštantnej hrúbky t (škrupina) je $dV = t dS$, kde dS je element polohy a súradnice ťažiska takého telesa sú

$$x_T = \frac{\int_S x dS}{S}, \quad y_T = \frac{\int_S y dS}{S}, \quad z_T = \frac{\int_S z dS}{S}, \quad (3.4)$$

kde S je celková plocha telesa, $\int_S x dS$ - statický moment telesa k rovine $0(y, z)$.

V prípade homogénneho telesa s konštantnou prierezovou plochou S po celej dĺžke l je $dV = S dl$ a súradnice ťažiska takého telesa sú

$$x_T = \frac{\int x dl}{l}, \quad y_T = \frac{\int y dl}{l}, \quad z_T = \frac{\int z dl}{l}, \quad (3.5)$$

kde dl je element jeho dĺžky.

Ak sa dá teleso rozdeliť na konečný počet častí, ktorých ťažiská poznáme, alebo vieme určiť, potom ťažisko takéhoto zloženého *homogénneho telesa* určíme podľa vzťahov:

$$x_T = \frac{\sum x_i V_i}{\sum V_i}, \quad y_T = \frac{\sum y_i V_i}{\sum V_i}, \quad z_T = \frac{\sum z_i V_i}{\sum V_i} \quad (3.6)$$

pre škrupinu v priestore

$$x_T = \frac{\sum x_i S_i}{\sum S_i}, \quad y_T = \frac{\sum y_i S_i}{\sum S_i}, \quad z_T = \frac{\sum z_i S_i}{\sum S_i} \quad (3.7)$$

pre teleso konštantnej prierezovej plochy, resp. pre čiaru v priestore

$$x_T = \frac{\sum x_i l_i}{\sum l_i}, \quad y_T = \frac{\sum y_i l_i}{\sum l_i}, \quad z_T = \frac{\sum z_i l_i}{\sum l_i} \quad (3.8)$$

Pre *plochu*, resp. *čiaru v rovine* platia vzťahy (3.7) a (3.8), pričom $z_T = 0$. V uvedených vzťahoch x_i, y_i, z_i sú súradnice ťažísk i -tej časti telesa, veličiny V_i, S_i, l_i sú objemy, plochy, resp. dĺžky i -tej časti.

Celý výpočet súradníc ťažiska výhodne robíme zoradením výsledkov čiastkových výpočtov do tabuľky (Tab. 3.1).

Tabuľka 3.1

i	x_i	y_i	z_i	H_i	$x_i H_i$	$y_i H_i$	$z_i H_i$
1							
2							
...							
\sum				A	B	C	D

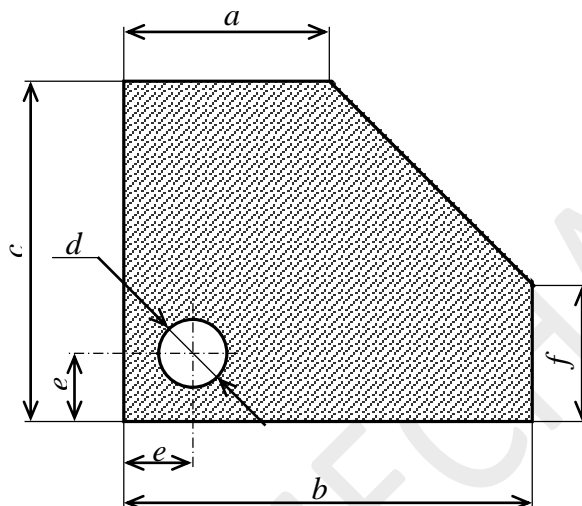
Symbol H_i predstavuje jednu z veličín V_i, S_i, l_i . Súradnice ťažiska určíme podielom príslušných súm podľa (3.6), (3.7), (3.8).

RIEŠENÉ PRÍKLADY

PRÍKLAD 3.1: Určte polohu ťažiska homogénnej plochy podľa obrázku 3.1.1 analyticky a graficky, ak $a = 6$ cm, $b = 12$ cm, $c = 10$ cm, $d = 2$ cm, $e = 2$ cm, $f = 4$ cm.

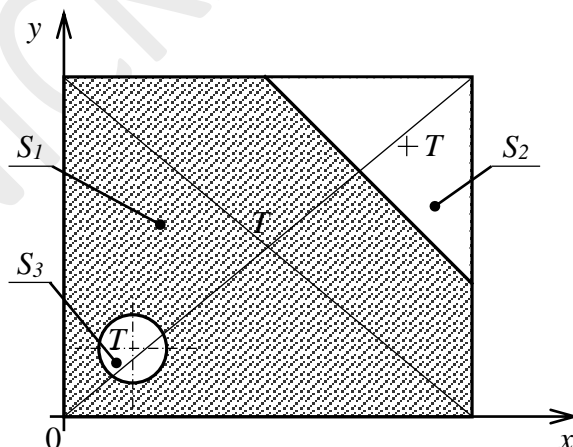
Dané: a, b, c, d, e, f

Hľadané: x_T, y_T



Obrázok 3.1.1

Riešenie: Výslednú plochu rozdelíme na čiastkové plochy jednoduchých geometrických tvarov (obr. 3.1.2), pre ktoré vieme vypočítať obsah plochy a určiť polohu ťažiska. V našom prípade rozdelíme plochu na tri časti: plochu obdĺžnika S_1 , trojuholníka S_2 a kruhu S_3 . Ich ťažiská označíme T_1, T_2, T_3 .



Obrázok 3.1.2

Analytické riešenie: Súradnice ťažiska výslednej plochy vypočítame zo vzťahov:

$$x_T = \frac{U_y}{S} = \frac{\sum x_i S_i}{\sum S_i}, \quad (a)$$

$$y_T = \frac{U_x}{S} = \frac{\sum y_i S_i}{\sum S_i}, \quad (b)$$

kde U_y je statický moment plochy k osi y ,
 U_x je statický moment plochy k osi x ,
 S je celková výsledná plocha.

Zvolíme súradnicovú sústavu $0(x,y)$, vzhľadom na ktorú určíme súradnice jednotlivých ťažísk. Údaje potrebné pre výpočet je možné prehľadne zapísať do tabuľky:

I	x_i	y_i	S_i	$U_{yi} = x_i \cdot S_i$	$U_{xi} = y_i \cdot S_i$
1.	$\frac{b}{2}$	$\frac{c}{2}$	bc	$x_1 S_1$	$y_1 S_1$
	6	5	120	720	600
2	$a + \frac{2(b-a)}{3}$	$f + \frac{2(c-f)}{3}$	$\frac{(b-a)(c-f)}{2}$	$x_2 S_2$	$y_2 S_2$
	10	8	- 18	- 180	- 144
3	e	e	$\frac{\pi d^2}{4}$	$x_3 S_3$	$y_3 S_3$
	2	2	- 3,14	- 6,28	- 6,28
Σ	-	-	98,86	533,72	44,72

Po dosadení: $x_T = \frac{533,72}{98,86} = 5,39 \text{ cm}$ $y_T = \frac{449,72}{98,86} = 4,55 \text{ cm}$

Poznámka: Pri výpočte obsahu výslednej plochy, obsahy dielčích plôch otvorov a doplnkových plôch odčítavame od súčtu obsahov plôch, ktoré sú súčasťou výslednej plochy. To isté platí pre výpočet veľkostí statických momentov výslednej plochy k osiam x , y .

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

- [1] PAŠKO, J. – ŠMERINGAIOVÁ, A.: *Technická mechanika I*. Prešov: FVT TU v Košiciach so sídlom v Prešove. 2012, 184 s., ISBN 978-80-553-0891-3
- [2] PAŠKO, J. – ŠMERINGAIOVÁ, A.: *Príručka statiky s príkladmi*, Prešov: FVT, 2008, 202 s., ISBN 978-80-553-0127-3
- [3] BUŠOVÁ, B. - CABAN, S. – ŽIARAN, S.: *Mechanika I. Statika*. Bratislava: STU. 1996, 272s.