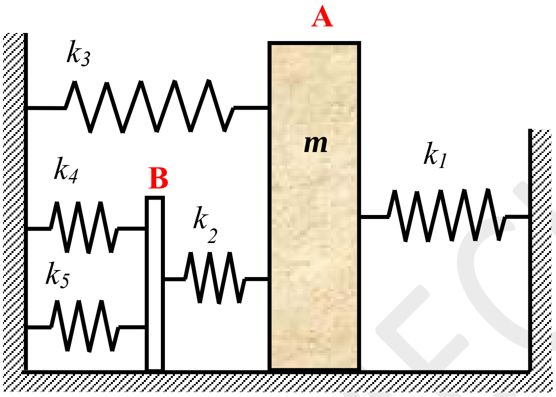
VOĽNÉ NETLMENÉ KMITANIE LINEÁRNYCH MECHANICKÝCH SÚSTAV S JEDNÝM STUPŇOM VOĽNOSTI

PRÍKLAD 6.5: Určte periódu kmitania T vodorovných kmitov telesa A hmotnosti m_A za predpokladu, že teleso B je nehmotné a dokonale tuhé. Teleso A je k rámu upevnené pomocou pružín s tuhosťou k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 a väzbou opretím (*Obrázok 6.7)*. Vplyv trenia a hmotnosť pružín zanedbajte.



Obrázok 6.7

RIEŠENIE: Na mechanickú sústavu tvorenú doskami A a B a sústavou pružín zapojených podľa *obr. 6.8A* pôsobí v jej statickej rovnovážnej polohe ($x_A = 0$, $x_B = 0$, $y_A = 0$, $y_B = 0$) len tiažová sila $\boldsymbol{G_B}$ dosky B a reakcia od podložky $\boldsymbol{F_N}$. Obe sily pôsobia v smere osi y a sú vo vzájomnej rovnováhe. V smere osi x nepôsobia na sústavu žiadne vonkajšie sily ani rekcie vo väzbách. U žiadnej z pružín nedochádza k deformáciám, vratné sily v nich preto nevznikajú. Mechanická sústava je v pokoji.

Krátkodobým pôsobením vonkajšieho silového účinku v smere osi x vychýlime dosku A z jej rovnovážnej polohy (*obr. 6.8B*) o výchylku $x = x_A \neq 0$. Dochádza k deformáciám pružín a tiež k posunutiu dosky B. V dôsledku deformácií začnú v pružinách pôsobiť vratné sily a po odznení vonkajšieho silového účinku mechanická sústava začína kmitať okolo rovnovážnej polohy bez ďalšieho vonkajšieho silového pôsobenia. Vzniká priamočiary kmitavý pohyb, tzv. „*nevynútené lineárne kmitanie bez tlmenia*“, resp. „*voľné netlmené kmitanie*“.

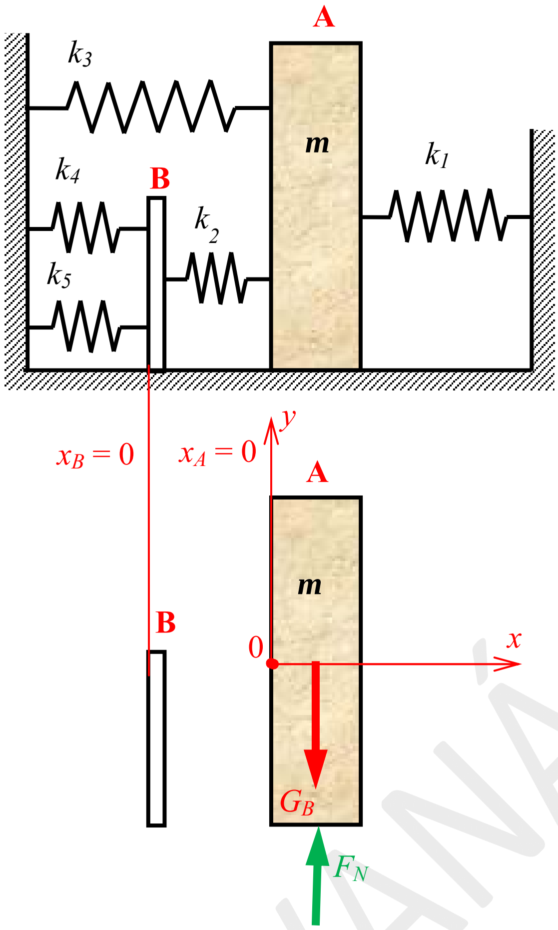
Úlohu riešime *metódou postupného uvoľnenia.* Dosku A uvoľníme vo vychýlenej polohe, keď $x = x_A \neq 0$ (*obr. 6.8B*). Pohybové rovnice zostavíme *metódou zrýchľujúcich síl*. Pasívne odpory a hmotnosť pružín zanedbáme.

V smere osi y nedochádza k pohybu, zrýchlenie v tomto smere bude nulové a sily pôsobiace v smere osi y budú v statickej rovnováhe.

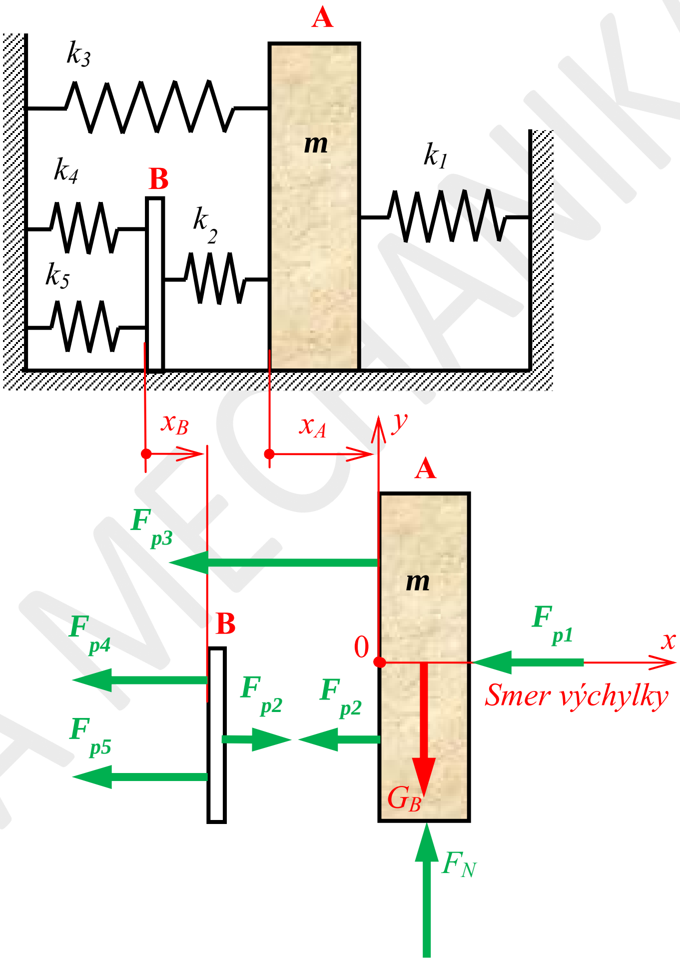
$$\sum_i F_{iy} = 0 \ ; \quad F_N - G = 0; \qquad F_N = G$$

Uvedený výsledok nie je z pohľadu určenia doby kmitu sústavy podstatný, pretože ku kmitaniu dochádza v smere osi x. V tomto smere budú na jednotlivé telesá pôsobiť len vratné sily v pružinách *1÷5*. Priamočiary kmitavý pohyb v smere osi x je potom určený *pohybovou rovnicou* zapísanou *v skalárnom tvare* nasledovne:

$$\boxed{\sum_i F_{ix} = m\,a_x = m\,\ddot{x}}$$



Obrázok 6.8A



Obrázok 6.8B

📖 *Poznámka*: Pre zostavenie *pohybovej rovnice voľného netlmeného kmitania* je možné použiť rôzne postupy riešenia. V ďalšej časti sú uvedené dva z nich. Pre riešenie úloh odporúčame využiť postup riešenia II.

RIEŠENIE I.

Pre veľkosti vratných síl v pružinách *1÷5* platí:

$$F_{p1} = k_1\,x_A$$
$$F_{p2} = k_2\left(x_A - x_B\right)$$
$$F_{p3} = k_3\,x_A$$
$$F_{p4} = k_4\,x_B$$
$$F_{p5} = k_5\,x_B$$

Zostavíme pohybové rovnice pre jednotlivé členy mechanickej sústavy:

Teleso A:

$$m_A \ddot{x}_A = -F_{p1} - F_{p2} - F_{p3} \tag{a}$$

$$m_A \ddot{x}_A = -k_1 x_A - k_2 (x_A - x_B) - k_3 x_A$$

$$m_A \ddot{x}_A = -k_1 x_A - k_2 x_A + k_2 x_B - k_3 x_A$$

Teleso B:

$$m_B \ddot{x}_B = F_{p2} - F_{p4} - F_{p5} \tag{b}$$

Vzhľadom na to, že hmotnosť dosky **B** $m_B = 0$, platí:

$$0 = k_2 (x_A - x_B) - k_4 x_B - k_5 x_B$$

$$0 = k_2 x_A - k_2 x_B - k_4 x_B - k_5 x_B$$

$$x_B = x_A \frac{k_2}{(k_2 + k_4 + k_5)}$$

Dosadíme do (a)

$$m_A \ddot{x}_A = -k_1 x_A - k_2 x_A + k_2 x_A \left(\frac{k_2}{k_2 + k_4 + k_5} \right) - k_3 x_A$$

$$m_A \ddot{x}_A = \left(-k_1 - k_2 + k_2 \left(\frac{k_2}{k_2 + k_4 + k_5} \right) - k_3 \right) x_A$$

$$m_A \ddot{x}_A = -\left(k_1 + k_2 - k_2 \left(\frac{k_2}{k_2 + k_4 + k_5} \right) + k_3 \right) x_A$$

Upravíme na *základný tvar pohybovej rovnice voľného netlmeného kmitania*, resp. *tvar homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice 2. rádu s konštantnými koeficientami*

$$\ddot{x} + \Omega_0^2 \, x = 0 \,, \qquad \text{kde v princípe platí} \qquad \boxed{\Omega_0^2 = \frac{k}{m}}$$

$$m_A \ddot{x}_A + \left(k_1 + \frac{k_2 (k_4 + k_5)}{k_2 + k_4 + k_5} + k_3 \right) x_A = 0 \qquad / \cdot \frac{1}{m_A}$$

$$\ddot{x}_A + \frac{1}{m_A} \left(k_1 + \frac{k_2 (k_4 + k_5)}{k_2 + k_4 + k_5} + k_3 \right) x_A = 0$$

Odkiaľ odvodíme vzťah pre *výslednú tuhosť sústavy pružín* k_{12345}

$$k_{12345} = k_1 + \frac{k_2 (k_4 + k_5)}{k_2 + k_4 + k_5} + k_3$$

a vzťah pre vlastnú *uhlovú frekvenciu* Ω_0 *voľného netlmeného kmitania*

$$\Omega_0^2 = \frac{1}{m_A} \left(k_1 + \frac{k_2 (k_4 + k_5)}{k_2 + k_4 + k_5} + k_3 \right) \quad \Rightarrow \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m_A} \left(k_1 + \frac{k_2 (k_4 + k_5)}{k_2 + k_4 + k_5} + k_3 \right)}$$

Potom *dobu kmitu T voľného netlmeného kmitania* kruhovej dosky vypočítame

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{m_A}\left(k_1 + \frac{k_2(k_4+k_5)}{k_2+k_4+k_5} + k_3\right)}}$$

a pre *frekvenciu f_0 voľného netlmeného kmitania* platí

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{\sqrt{\frac{1}{m_A}\left(k_1 + \frac{k_2(k_4+k_5)}{k_2+k_4+k_5} + k_3\right)}}{2\pi}.$$

RIEŠENIE IIa.

Kým pri RIEŠENÍ I boli dôsledne dodržané postupy *riešenia metódou uvoľnenia*, pri RIEŠENÍ II je naznačený rýchlejší postup výpočtu, kde je možné nehmotnú dosku chápať len ako spojovací člen medzi pružinami a sústavu pružín nahradiť spoločnou vratnou silou.

Nehmotnú dosku B uvažujme ako väzbu, ktorou sú navzájom spojené pružiny 2, 4, 5, pričom doska zabezpečuje horizontálnu polohu osí všetkých troch pružín. Sústavu pružín 2, 4, 5 nahradíme jednou spoločnou vratnou silou F_{p245} (*obr. 6.9*). Tuhosť sústavy pružín k_{245} ekvivalentnú tuhostiam k_2, k_4 a k_5 vypočítame nasledovne:

⇒ pružiny 4 a 5 sú zapojené „*vedľa seba*“, t. j. *paralelne*:

$$k_{45} = k_4 + k_5$$

⇒ dvojica pružín 4 a 5 je s pružinou 2 zapojená „*za sebou*“, t. j. *sériovo*:

$$\frac{1}{k_{245}} = \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_{45}} = \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_4+k_5}$$

Potom

$$k_{245} = \frac{k_2(k_4+k_5)}{k_2+k_4+k_5}$$

a pohybová rovnica pre dosku A bude mať tvar:

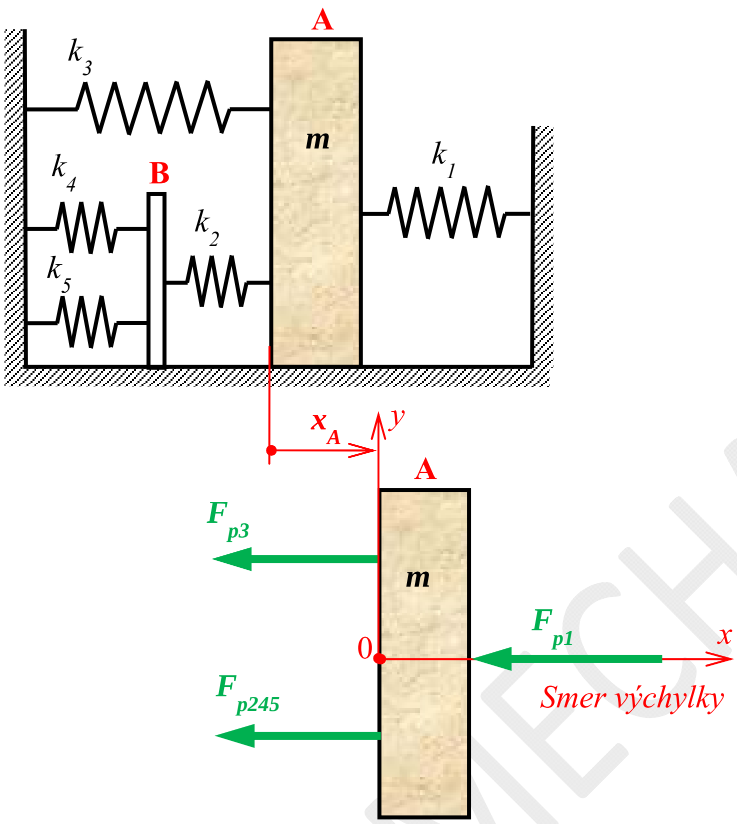
$$m_A \ddot{x}_A = -F_{p1} - F_{p245} - F_{p3}$$

$$m_A \ddot{x}_A = -k_1 x_A - k_{245} x_A - k_3 x_A$$

$$m_A \ddot{x}_A = -\left(k_1 + \frac{k_2(k_4+k_5)}{k_2+k_4+k_5} + k_3\right) x_A$$

Po úprave dostávame *základný tvar pohybovej rovnice voľného netlmeného kmitania*:

$$\ddot{x}_A + \frac{1}{m_A}\left(k_1 + \frac{k_2(k_4+k_5)}{k_2+k_4+k_5} + k_3\right) x_A = 0$$



Obrázok 6.9

RIEŠENIE IIb.

Pružiny s tuhosťami k_{245}, k_3 a k_1 je možné nahradiť jednou pružinou tuhosti k_{12345}, resp. jednou výslednou vratnou silou (*obr. 6.10*).

Pružiny 245 a 3 sú zapojené *vedľa seba*, t. j. *paralelne*:

$$k_{2345} = k_{245} + k_3$$

Pružiny 2345 a 1 sú zapojené tiež *paralelne*, pretože ich deformácia x_A je rovnaká:

$$k_{12345} = k_1 + k_{2345}$$

Úpravou dostávame výslednú tuhosť pružiny k_{12345}

$$k_{12345} = k_1 + \frac{k_2(k_4 + k_5)}{k_2 + k_4 + k_5} + k_3$$

Výsledná sila v pružine s výslednou tuhosťou je daná vzťahom

$$F_{p12345} = k_{12345}\, x_A$$

Pohybovú rovnicu pre dosku A zapíšeme v tvare:

$$m_A\, \ddot{x}_A = -F_{p12345}$$

$$m_A\,\ddot{x}_A = -k_{12345}\,x_A$$

$$m_A\,\ddot{x}_A = -\left(k_1 + \frac{k_2\left(k_4+k_5\right)}{k_2+k_4+k_5} + k_3\right)x_A \qquad /\cdot\frac{1}{m_A}$$

Po úprave dostávame *základný tvar pohybovej rovnice voľného netlmeného kmitania*:

$$\boxed{\ddot{x}_A + \frac{1}{m_A}\left(k_1 + \frac{k_2\left(k_4+k_5\right)}{k_2+k_4+k_5} + k_3\right)x_A = 0}$$

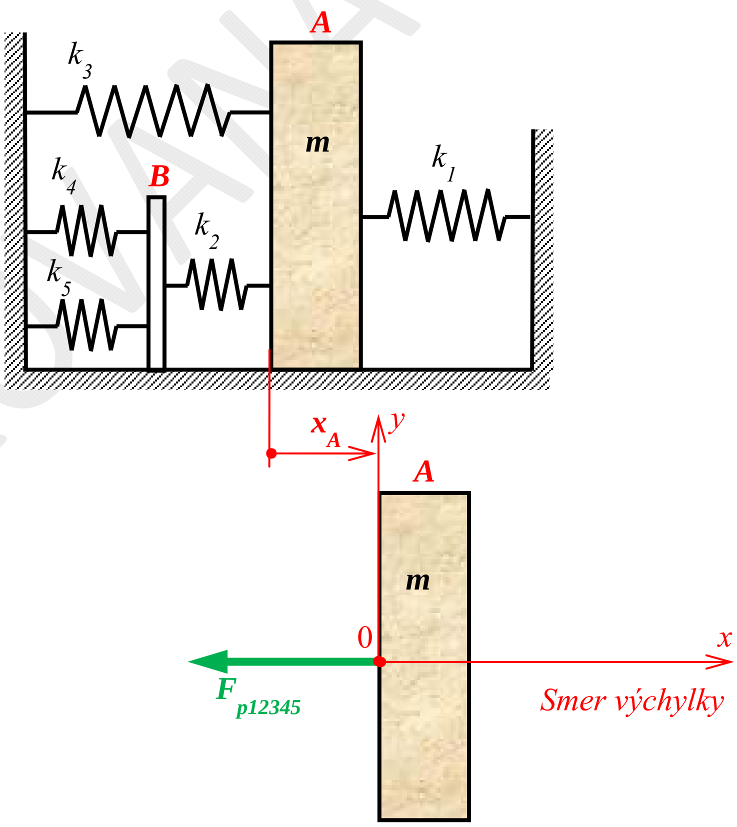
odkiaľ odvodíme vzťah pre vlastnú uhlovú frekvenciu netlmeného kmitania

$$\Omega_0^2 = \frac{1}{m_A}\left(k_1 + \frac{k_2\left(k_4+k_5\right)}{k_2+k_4+k_5} + k_3\right)$$

a vypočítame dobu kmitu a frekvenciu *voľného netlmeného kmitania* kruhovej dosky:

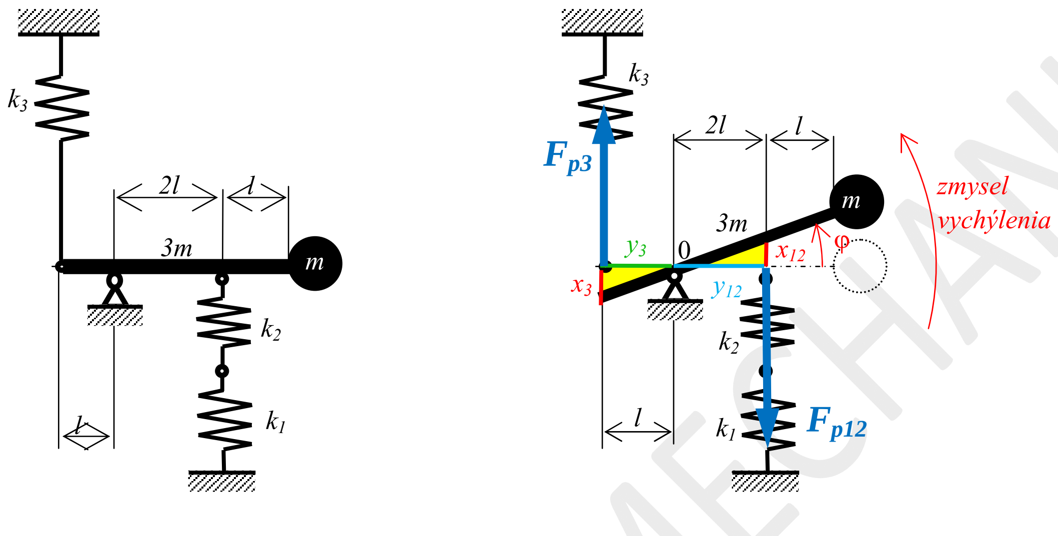
$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{m_A}\left(k_1 + \frac{k_2\left(k_4+k_5\right)}{k_2+k_4+k_5} + k_3\right)}}}$$

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{T} = \frac{\sqrt{\frac{1}{m_A}\left(k_1 + \frac{k_2\left(k_4+k_5\right)}{k_2+k_4+k_5} + k_3\right)}}{2\pi}}$$



Obrázok 6.10

PRÍKLAD 6.6: Tyč hmotnosti $3m$ a dĺžky $4l$ je spolu s hmotným bodom hmotnosti m viazaná k rámu kĺbom a nehmotnými pružinami podľa *obrázku 6.11a*. Určte dobu kmitu T danej mechanickej sústavy okolo rovnovážnej polohy a frekvenciu kmitania f_0.
Dané: m, l, k_1, k_2, k_3
Hľadané: T, f_0



a) *b)*

Obrázok 6.11

Hmotná tyč je k rámu upevnená kĺbom v bode 0 a pružinami s lineárnou charakteristikou. Ak neuvažujeme pasívne odpory, budú pri malom vychýlení (pootočení) z rovnovážnej polohy pôsobiť na teleso len *momenty od vratných síl v pružinách*. V tomto prípade po zmontovaní mechanickej sústavy *dochádza k vzniku statickej výchylky* a rovnováhe momentov od statických vratných síl v pružinách a tiažových síl hmotného bodu a hmotnej tyče (*pozri príklad 6.2*).

Pri riešení použijeme *metódu uvoľňovania*. V obrázku uvoľnenia (*obr. 6.11b*) nahradíme pružiny 1, 2 radené *do série* jednou spoločnou silou. Vychádzame z *momentovej pohybovej rovnice* mechanickej sústavy:

$$\boxed{\Sigma M_{i0} = I_0\,\alpha = I_0\,\ddot{\varphi}}$$

Ak pre veľmi malé uhly $\varphi\ (\varphi \le 5°)$ platí: $\sin\varphi \doteq \varphi$; $\cos\varphi \doteq 1$, potom

$$x_{12} = 2l\sin\varphi = 2l\varphi$$
$$x_3 = l\sin\varphi = l\varphi$$
$$y_{12} = 2l\cos\varphi = 2l$$
$$y_3 = l\cos\varphi = l$$

Výslednú tuhosť k_{12} pružín 1, 2 zapojených za sebou, t. j. *sériovo* (po vychýlení sústavy vzniká rôzne veľká deformácia v pružinách s rôznymi tuhosťami k_1, k_2), vyjadríme:

$$\frac{1}{k_{12}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \qquad \Rightarrow \qquad k_{12} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Moment zotrvačnosti sústavy hmotnej tyče a hmotného bodu k osi rotácie v bode 0:

$$I_0 = I_{TYČ_0} + I_{HB_0},$$

Vzhľadom na to, že hmotná tyč sa bude otáčať okolo stáleho stredu otáčania 0, ktorý nie je totožný s jej ťažiskom, je pre výpočet momentu zotrvačnosti k bodu 0 potrebné použiť Steinerovu vetu:

$$\boxed{I_{TYČ_0} = I_{TYČ_T} + mc^2}$$

Moment zotrvačnosti hmotnej tyče k jej ťažisku je vo všeobecnosti určený vzťahom:

$$I_{TYČ_T} = \frac{1}{12} m l^2 = \frac{1}{12} 3m(4l)^2,$$

kde m je hmotnosť tyče a l je celková dĺžka tyče. V našom prípade potom platí

$$I_{TYČ_0} = I_{TYČ_T} + mc^2 = \frac{1}{12} 3m(4l)^2 + 3m(l)^2$$

$$I_{TYČ_0} = 4ml^2 + 3ml^2$$

$$I_{TYČ_0} = 7ml^2$$

Rovnako moment zotrvačnosti hmotného bodu určíme pomocou Steinerovej vety

$$\boxed{I_{HB_0} = I_{HB_T} + mc^2}$$

kde $I_{HB_T} = 0$ vzhľadom na to, že hmotný bod je bezrozmerný,

c - je vzdialenosť hmotného bodu od stredu otáčania.

Potom

$$I_{HB_0} = 0 + m(3l)^2$$

$$I_{HB_0} = 9ml^2$$

Výsledný moment zotrvačnosti mechanickej sústavy k bodu 0 je

$$I_0 = 7ml^2 + 9ml^2 = 16ml^2$$

Pre sily v pružinách platí

$$F_{p12} = k_{12}\, x_{12}$$

$$F_{p3} = k_3\, x_3$$

Momentová pohybová rovnica mechanickej sústavy k osi rotácie v bode 0

$$I_0\,\ddot{\varphi} = -F_{p12}\,y_{12} - F_{p3}\,y_3$$

$$16ml^2\,\ddot{\varphi} = -k_{12}x_{12}y_{12} - k_3x_3y_3$$

$$16ml^2\,\ddot{\varphi} = -\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}2l\varphi 2l - k_3l\varphi l$$

$$16ml^2\,\ddot{\varphi} = -\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}4l^2\varphi - k_3l^2\varphi$$

Pohybovú rovnicu voľného netlmeného kmitania upravíme na tvar homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice 2. rádu s konštantnými koeficientami:

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \Omega_0^2\varphi = 0}$$

$$\ddot{\varphi} + \varphi\left(\frac{k_1k_2}{(k_1+k_2)4m} + \frac{k_3}{16m}\right) = 0$$

Z odvodenej pohybovej rovnice vyplýva vzťah pre vlastnú uhlovú frekvenciu netlmeného kmitania

$$\Omega_0^2 = \frac{k_1k_2}{(k_1+k_2)4m} + \frac{k_3}{16m}$$

Potom dobu kmitu mechanickej sústavy vypočítame

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k_1k_2}{(k_1+k_2)4m} + \dfrac{k_3}{16m}}}$$

Pre frekvenciu voľného netlmeného kmitania platí:

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{\sqrt{\dfrac{k_1k_2}{(k_1+k_2)4m} + \dfrac{k_3}{16m}}}{2\pi}$$