CVIČENIE PaP – 5., 6., (7.) týždeň:

Rovinný ohyb – priame a lomené nosníky. Určovanie priebehov vnútorných síl. Výpočet normálového napätia pri ohybe.

Poskytujem Vám podklady k určovaniu priebehov vnútorných síl pri rovinnom ohybe (príklady C1-C12).

V učebnici si pozrite kapitolu 6.1 a riešené príklady 6.1 - 6.6 (6.3 je pre Vás informatívneho charakteru – nepotrebujete k zápočtu a skúške). Prikladám príklady 6.1, 6.2 a 6.4, ku ktorým som tu pridala rozsiahlejší komentár.

K výpočtu normálového napätia pri ohybe je kapitola 6.3 a príklady 6.7-6.9 (6.8 a 6.9 sú informatívneho charakteru – potrebujete k teórii na skúške).

K výpočtu príkladov C potrebujete aj príklad 6.7 (bez výpočtu šmykového napätia). Príklad 6.7 je priložený s komentárom.

☺✋❀

doc. Ing. Z. Murčinková, PhD.

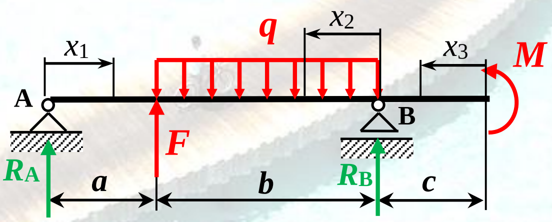
18.03.2020.

Príklad 6.1 (typ príkladov C3-C4)

Na obr. 6.6 je zobrazený staticky určitý nosník zaťažený silou F, rovnomerným spojitým zaťažením q a ohybovým momentom M. Vykreslite priebehy osových síl „N“, priečnych síl „V“ a ohybových momentov „M“, ak sú dané rozmery a, b, c a veľkosť vonkajšieho zaťaženia nosníka.

D: $F = 2$ kN, $q = 6$ kNm^{-1}, $M = 3$ kNm, $a = 0{,}6$ m, $b = 1$ m, $c = 0{,}5$ m

H: „N“, „V“, „M“ Pri rovinnom ohybe vznikajú 3 vnútorné sily!



Obr. 6.6

Vnútorné sily určujeme metódou mysleného rezu. Na danom nosníku urobíme 3 rezy. Orientáciu rezov sprava/zľava si volím. Voľba orientácie rezu nerozhoduje o výsledku, len o náročnosti výpočtu. Pri uložení nosníka kĺb-posuvné lôžko, musíme vypočítať reakcie.

Výpočet reakcií (kĺb odoberá v rovine 2 stupne voľnosti, tu R_{Ax}=0) :

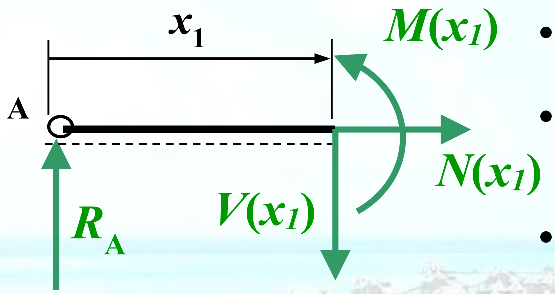
$$R_A + R_B + F - q.b = 0$$

$$\sum M_{iB} = 0; \quad R_A(a+b) + F.b - q.b.\frac{b}{2} - M = 0$$

$$R_A = \frac{-F.b + q.\frac{b^2}{2} + M}{a+b} = \frac{-2\,\text{kN}.1\,\text{m} + 6\,\text{kNm}^{-1}.\frac{(1\,\text{m})^2}{2} + 3\,\text{kNm}}{0{,}6\,\text{m} + 1\,\text{m}} = 2{,}5\,\text{kN}$$

$$R_B = -R_A - F + q.b = -2{,}5\,\text{kN} - 2\,\text{kN} + 6\,\text{kNm}^{-1}.1\,\text{m} = 1{,}5\,\text{kN}$$

Vnútorné sily v reze x_1 (rez zľava):



Znamienková dohoda:

- Osová sila N je kladná, ak pôsobí von z roviny rezu.
- Posúvajúca sila V je kladná, ak má snahu pootočiť odrezanú časť nosníka v smere hodinových ručičiek.
- Ohybový moment M je kladný, ak spôsobuje v spodných vláknach (čiarkovaná čiara) nosníka ťah.

$$N(x_1) = 0$$

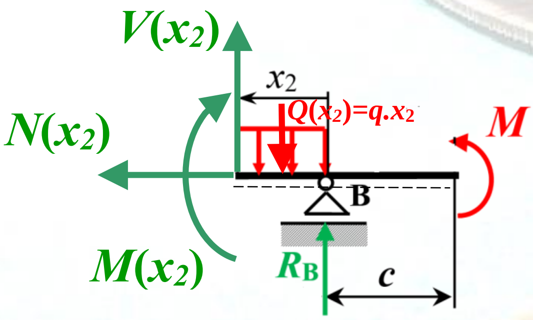
$$V(x_1) = R_A = 2{,}5\,\text{kN}$$

$$M(x_1) = R_A.x_1$$

$$M(x_1 = 0) = 0$$

$$M(x_1 = a) = R_A.a = 2{,}5\,\text{kN}.0{,}6\,\text{m} = 1{,}5\,\text{kNm}$$

Vnútorné sily v reze x_2 (rez sprava):



$$N(x_2) = 0$$

$$V(x_2) = -R_B + q.x_2$$

$$V(x_2 = 0) = -R_B = -1{,}5\,\text{kN}$$

$$V(x_2 = b) = -R_B + q.b = -1{,}5\,\text{kN} + 6\,\text{kNm}^{-1}.1\,\text{m} = 4{,}5\,\text{kN}$$

!!! Ak sú dve krajné hodnoty priečnej sily jedna s plusom a druhá s mínusom, čiže existuje bod, kde sa priečna sila rovná nule (pozri priebeh „V" na obr. 6.7), znamená to, že ohybový moment bude mať v danom mieste (x_E) extrém $M(x_E)$!!!

$$M(x_2) = M + R_B.x_2 - q.\frac{x_2^2}{2}$$

$$M(x_2 = 0) = M = 3\,\text{kNm}$$

$$M(x_2 = b) = M + R_B.b - q.\frac{b^2}{2} = 3\,\text{kNm} + 1{,}5\,\text{kN}.1\,\text{m} - 6\,\text{kNm}^{-1}.\frac{(1\,\text{m})^2}{2} = 1{,}5\,\text{kNm}$$

V rovnici pre $V(x_2)$ a $M(x_2)$ je súčin $q.x_2$ sila $Q(x_2)$ vo všeobecnom mieste x_2.

$x_2/2$ je rameno, na ktorom pôsobí $Q(x_2)$.

V rovnici pre $M(x_2)$ súčin $q.\frac{x_2^2}{2}$ je moment sily $Q(x_2)$ k miestu rezu.

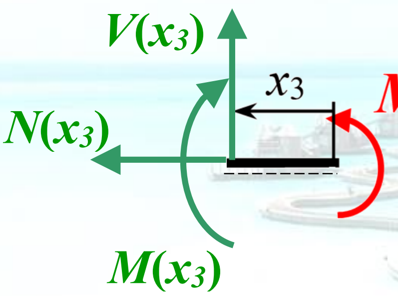
Výpočet polohy extrému x_E ohybového momentu $M(x_E)$. Položím rovnicu pre priečnu silu $V(x_2)$ rovnú nule (hľadám miesto, kde preična sila sa rovná nule) a vyjadrím x_E:

$$0 = -R_B + q.x_E \Rightarrow x_E = \frac{R_B}{q} = \frac{1{,}5\,\text{kN}}{6\,\text{kNm}^{-1}} = 0{,}25\,\text{m}$$

Výpočet hodnoty extrému ohybového momentu $M(x_E)$. Do rovnice pre $M(x_2)$ dosadím za x_2 x_E.

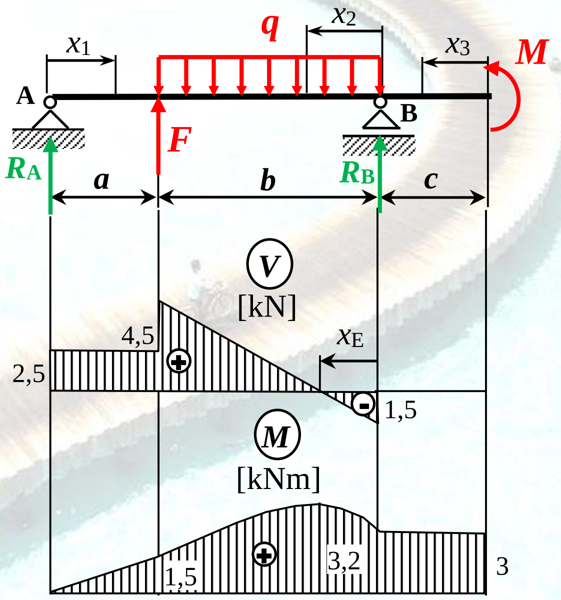
$$M(x_E) = M + R_B.x_E - q.\frac{x_E^2}{2} = 3\,\text{kNm} + 1{,}5\,\text{kN}.0{,}25\,\text{m} - 6\,\text{kNm}^{-1}.\frac{(0{,}25\,\text{m})^2}{2} = 3{,}2\,\text{kNm}$$

Vnútorné sily v reze x_3:



$$N(x_3) = 0$$
$$V(x_3) = 0$$
$$M(x_3) = M = 3\,\text{kNm}$$

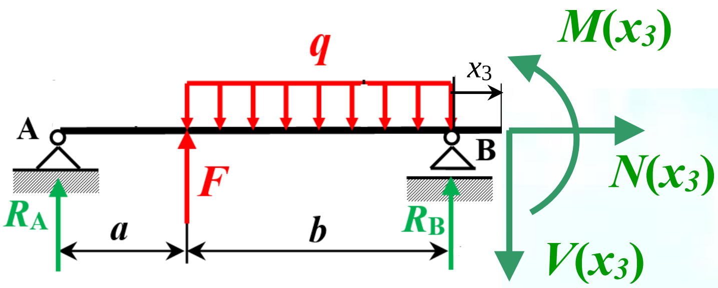
Priebehy vnútorných síl sú na obr. 6.7. V reze x_1 je lineárny priebeh ohybového momentu, v reze x_2 je kvadratická krivka.



Obr. 6.7

Poznámka ku orientácii rezov:

Rez x_3 sprava by vyzeral nasledovne:



$$N(x_3) = 0$$

$$V(x_3) = R_A + R_B + F - q.b = 2{,}5\text{kN} + 1{,}5\text{kN} + 2\text{kN} - 6\ \text{kNm}^{-1}.1\text{m} = 0$$

$$M(x_3) = R_A(a + b + x_3) + F.(b + x_3) + R_B.x_3 - q.b.(\frac{b}{2} + x_3)$$

$$M(x_3 = 0) = R_A(a + b) + F.b - q.\frac{b^2}{2} = 2{,}5\text{kN}(0{,}6\text{m} + 1\text{m}) + 2\text{kN}.1\text{m} - 6\ \text{kNm}^{-1}\frac{(1\text{m})^2}{2} = 3\text{kNm}$$

$$M(x_3 = c) = R_A(a + b + c) + F.(b + c) + R_B.c - q.b.(\frac{b}{2} + c) =$$

$$= 2{,}5\text{kN}(0{,}6\text{m} + 1\text{m} + 0{,}5\text{m}) + 2\text{kN}.(1\text{m} + 0{,}5\text{m}) + 1{,}5\text{kN}.0{,}5\text{m} - 6\ \text{kNm}^{-1}.1\text{m}(\frac{1\text{m}}{2} + 0{,}5\text{m}) =$$

$$= 3\text{kNm}$$

Ako vidíte výsledky vyšli rovnaké (porovnaj s rezom x_3 sprava), ale oveľa náročnejším spôsobom.

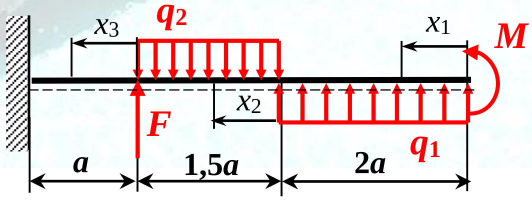
Príklad 6.2 (typ príkladov C1-C2)

(podobný typ príkladu: votknutý nosník a 2 rezy so zaťažením *F*, *q*, *M* je na zápočtovke)

Na obr. 6.8 je zobrazený staticky určitý nosník zaťažený silou F, rovnomernými spojitými zaťaženiami q_1 a q_2 a ohybovým momentom M. Vykreslite priebehy priečnych síl „*V*“ a ohybových momentov „*M*“, ak je daný rozmer a a veľkosť vonkajšieho zaťaženia nosníka.

D: $F = 3$ kN, $q_1 = 1$ kNm^{-1}, $q_2 = 2$ kNm^{-1}, $M = 1$ kNm, $a = 1$ m

H: „*V*“, „*M*“



Obr. 6.8

Všetky rezy môžeme urobiť od voľného konca, takže nepotrebujeme vypočítať reakcie vo votknutí.

Vnútorné sily v reze x_1:

$$V(x_1) = -q_1.x_1 \qquad V(x_1 = 0) = 0$$

$$V(x_1 = 2a) = -q_1.2a = -1\,\mathrm{kNm}^{-1}.2.1\,\mathrm{m} = -2\,\mathrm{kN}$$

$$M(x_1) = M + q_1.\frac{x_1^2}{2} \qquad M(x_1 = 0) = M = 1\,\mathrm{kNm}$$

$$M(x_1 = 2a) = M + q_1.\frac{(2a)^2}{2} = 1\,\mathrm{kNm} + 1\,\mathrm{kNm}^{-1}.\frac{(2.1\,\mathrm{m})^2}{2} = 3\,\mathrm{kNm}$$

Vnútorné sily v reze x_2:

$$V(x_2) = -q_1.2a + q_2.x_2$$

$$V(x_2 = 0) = -q_1.2a = -1\,\mathrm{kNm}^{-1}.2.1\,\mathrm{m} = -2\,\mathrm{kN}$$

$$V(x_1 = 1{,}5a) = -q_1.2a + q_2.1{,}5a = -1\,\mathrm{kNm}^{-1}.2.1\,\mathrm{m} + 2\,\mathrm{kNm}^{-1}.1{,}5.1\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{kN}$$

$$M(x_2) = M + q_1.2a(a + x_2) - q_2.\frac{x_2^2}{2}$$

$$M(x_2 = 0) = M + q_1.2a^2 = 1\,\mathrm{kNm} + 1\,\mathrm{kNm}^{-1}.2.(1\,\mathrm{m})^2 = 3\,\mathrm{kNm}$$

$$M(x_2 = 1{,}5a) = M + q_1.5a^2 - q_2.\frac{(1{,}5a)^2}{2} =$$

$$= 1\,\mathrm{kNm} + 1\,\mathrm{kNm}^{-1}.5.(1\,\mathrm{m})^2 - 2\,\mathrm{kNm}^{-1}.\frac{(1{,}5.1\,\mathrm{m})^2}{2} = 3{,}75\,\mathrm{kNm}$$

Vnútorné sily v reze x_3:

$$V(x_3) = -q_1.2a + q_2.1{,}5a - F = -1\,\mathrm{kNm}^{-1}.2.1\,\mathrm{m} + 2\,\mathrm{kNm}^{-1}.1{,}5.1\,\mathrm{m} - 3\,\mathrm{kN} = -2\,\mathrm{kN}$$

$$M(x_3) = M + q_1.2a(2{,}5a + x_3) - q_2.1{,}5a(0{,}75a + x_3) + F.x_3$$

$$M(x_3 = 0) = M + q_1.5a^2 - q_2.1{,}125a^2 =$$

$$= 1\,\mathrm{kNm} + 1\,\mathrm{kNm}^{-1}.5.(1\,\mathrm{m})^2 - 2\,\mathrm{kNm}^{-1}.1{,}125.(1\,\mathrm{m})^2 = 3{,}75\,\mathrm{kNm}$$

$$M(x_2 = a) = M + q_1.7a^2 - q_2.2{,}625a^2 + F.a =$$

$$= 1\,\mathrm{kNm} + 1\,\mathrm{kNm}^{-1}.7.(1\,\mathrm{m})^2 - 2\,\mathrm{kNm}^{-1}.2{,}625.(1\,\mathrm{m})^2 + 3\,\mathrm{kN}.1\,\mathrm{m} = 5{,}75\,\mathrm{kNm}$$

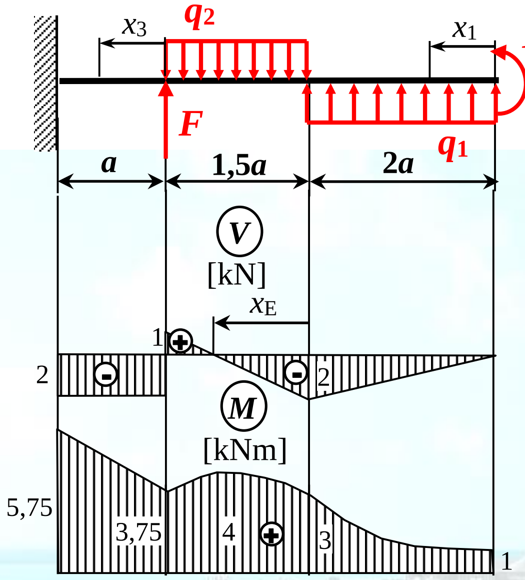
Výpočet polohy extrému ohybového momentu x_E:

$$0 = -q_1.2a + q_2.x_E \Rightarrow x_E = \frac{q_1.2a}{q_2} = \frac{1\,\mathrm{kNm}^{-1}.2.1\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{kNm}^{-1}} = 1\,\mathrm{m}$$

Výpočet hodnoty extrému ohybového momentu $M(x_E)$:

$$M(x_E) = M + q_1.2a(a + x_E) - q_2.\frac{x_E^2}{2} = 1\,\mathrm{kNm} + 1\,\mathrm{kNm}^{-1}.2.1\,\mathrm{m}.(1\,\mathrm{m} + 1\,\mathrm{m}) - 2\,\mathrm{kNm}^{-1}.\frac{(1\,\mathrm{m})^2}{2} = 4\,\mathrm{kNm}$$

Priebehy vnútorných síl sú na obr. 6.9



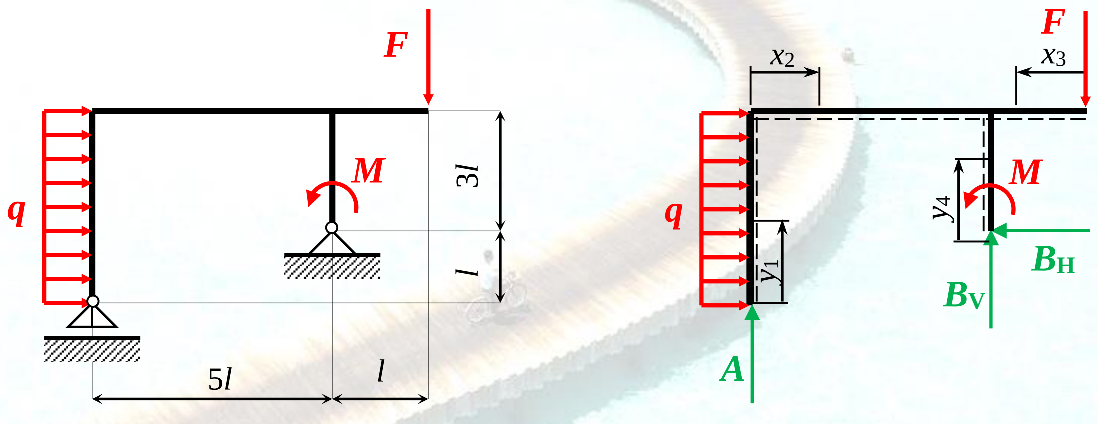
Obr. 6.9

Príklad 6.4 (typ príkladov C5-C12)

Lomený nosník je zaťažený silou F, ohybovým momentom M a rovnomerným spojitým zaťažením q a má rozmery l podľa obr. 6.12. Zostrojte priebehy normálovej sily „N“, posúvajúcej sily „V“ a ohybového momentu „M“.

D: $F = 40$ kN, $M = 40$ kNm, $q = 20$ kNm^{-1}, l=1m

H: „N“, „V“, „M“



Obr. 6.12

Pri lomených nosníkoch platí rovnaký postup a znamienková dohoda ako pri priamych nosníkoch! Rezy sú umiestnené aj zvislo y1 a y2, polohu spodného vlákna (čiarkovaná čiara) si volím alebo je zadaná v príklade. V príkladoch C5-C8 sú potrebné 4 rezy, podobne ako v tomto príklade, C9-C12 majú rezy priamo v zadaní príkladu, t.j. od voľného konca.

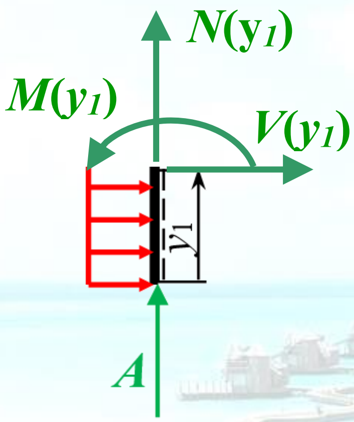
Výpočet reakcií:

$$\sum F_{iH} = 0;\quad q.4l - B_{\mathrm{H}} = 0 \qquad \Rightarrow B_{\mathrm{H}} = q.4l = 20\,\mathrm{kNm}^{-1}.4.1\mathrm{m} = 80\,\mathrm{kN}$$

$$\sum F_{iV} = 0;\quad A + B_{\mathrm{V}} - F = 0 \qquad \Rightarrow B_{\mathrm{V}} = F - A = 40\,\mathrm{kN} + 16\,\mathrm{kN} = 56\,\mathrm{kN}$$

$$\underline{\sum M_{i\mathrm{B}} = 0;\quad F.l - M + A.5l + q.4l.l = 0} \Rightarrow A = \frac{1}{5l}\left(-F.l + M - q4l^2\right) = -16\,\mathrm{kN}$$

Určenie vnútorných síl v reze y_1 (rez zdola), znamienková dohoda rovnaká ako pri priamych nosníkoch:



$$N(y_1) = -A \qquad N(y_1) = 16\,\mathrm{kN}$$

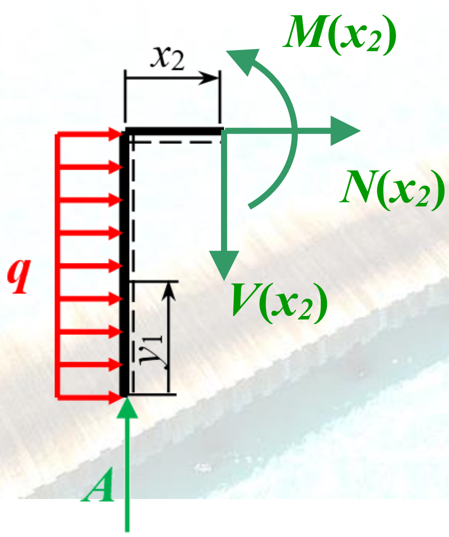
$$V(y_1) = -q.y_1 \qquad V(y_1 = 0) = 0$$

$$V(y_1 = 4l) = q.4l = -80\,\mathrm{kN}$$

$$M(y_1) = -\frac{q.y_1^2}{2} \qquad M(y_1 = 0) = 0$$

$$M(y_1 = 4l) = -\frac{q.l^2}{2} = -\frac{20\,\mathrm{kNm}^{-1}.(4\,\mathrm{m})^2}{2} = -160\,\mathrm{kNm}$$

Určenie vnútorných síl v reze x_2 (rez zľava):



$$N(x_2) = -q.4l \qquad N(x_2) = -80\,\mathrm{kN}$$

$$V(x_2) = A \qquad V(x_2) = -16\,\mathrm{kN}$$

$$M(x_2) = A.x_2 - q.4l.2l \qquad M(x_2 = 0) = -q8l^2 = -160\,\text{kNm}$$

$$M(x_2 = 5l) = -16\,\text{kN}.5\text{m} - 20\,\text{kNm}^{-1}.4.1\text{m}.2.1\text{m} = -240\,\text{kNm}$$

Určenie vnútorných síl v reze x_3:

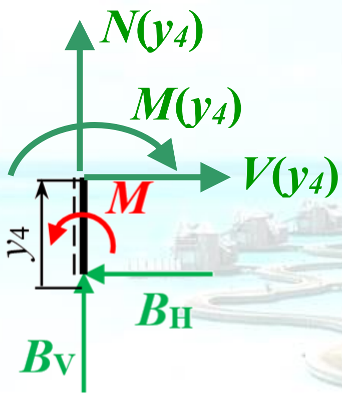
$$N(x_3) = 0$$

$$V(x_3) = F \qquad V(x_3) = 40\,\text{kN}$$

$$M(x_3) = -F.x_3 \qquad M(x_3 = 0) = 0$$

$$M(x_3 = l) = -F.l = -40.1\text{m} = -40\,\text{kNm}$$

Určenie vnútorných síl v reze y_4:



$$N(y_4) = -B_\text{V} \qquad N(y_4) = -56\,\text{kN}$$

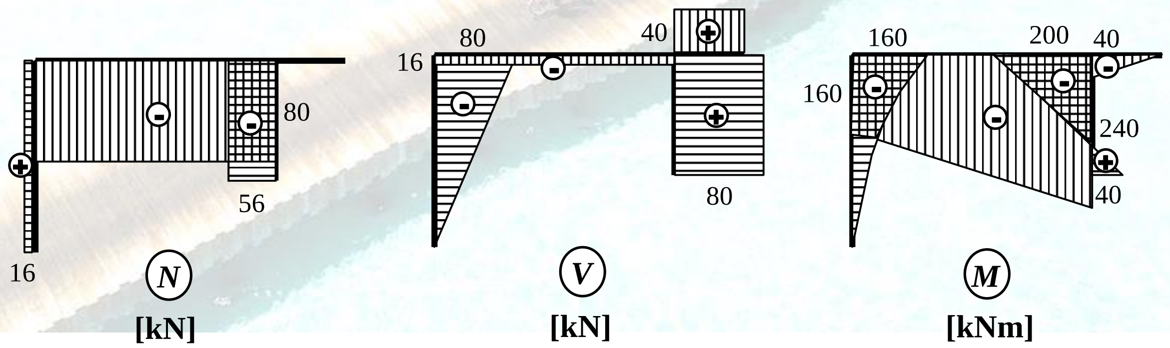
$$V(y_4) = B_\text{H} \qquad V(y_4) = 80\,\text{kN}$$

$$M(y_4) = -B_\text{H}.y_4 + M \qquad M(y_4 = 0) = M = 40\,\text{k1m}$$

$$M(y_4 = 3l) = -80\,\text{kN}.3.1\text{m} + 40\,\text{kNm} = -200\,\text{kNm}$$

Určenie extrému ohybového momentu $M(x_E)$ pre tento nosník, nie je potrebné vykonať, lebo na žiadnom úseku nie je priečna sila V=0. Krajná hodnota $V(y_1$=0) je rovná nule, ale to nie je prípad vzniku extrému ohybového momentu.

Graficky znázorníme priebehy vnútorných síl (obr. 6.13). Nulová čiara má tvar lomeného nosníka. Na stranu spodného vlákna vykresľujeme hodnoty s mínusom.



Obr. 6.13

Príklady 6.7-6.9 obsahujú aj výpočet šmykového napätia. K príkladom C to nepotrebujete.

Príklad 6.7

Pre priamy nosník z príkladu 6.2 vykreslite priebehy normálového a šmykového napätia vo votknutí, ak je daný obdĺžnikový prierez 50x80mm.

H: „σ“, „τ“

Ohybový moment vo votknutí pre nosník z príkladu 6.2 je $M_{votknutie}$ = +5,75kNm a priečna sila vo votknutí je $V_{votknutie}$ = - 2kN.

V zadaní máte „zostrojte priebeh normálového napätia „σ“ v mieste maximálneho ohybového momentu $M_{\max}$ „, takže nájdite vo Vašom priebehu ohybového momentu M jeho maximálnu hodnotu (môže to byť kdekoľvek na nosníku) a použite ju pri výpočte normálového napätia.

Kvadratický moment k centrálnej osi y pre obdĺžnikový prierez:

$$I_y = \frac{b.h^3}{12} = \frac{50.80^3}{12}\,\mathrm{mm}^4 = 2\,133333\,\mathrm{mm}^4$$

Normálové napätie vo votknutí v horných vláknach:

$$|\sigma_A| = \frac{M_{votknutie}}{I_y}.z_A = \frac{5{,}75.10^6\ \mathrm{Nmm}}{2\,133\,333\,\mathrm{mm}^4}.40\,\mathrm{mm} = 107{,}8\,\mathrm{MPa}$$

Keďže z_A=z_B=40mm, potom normálové napätie vo votknutí v spodných vláknach:

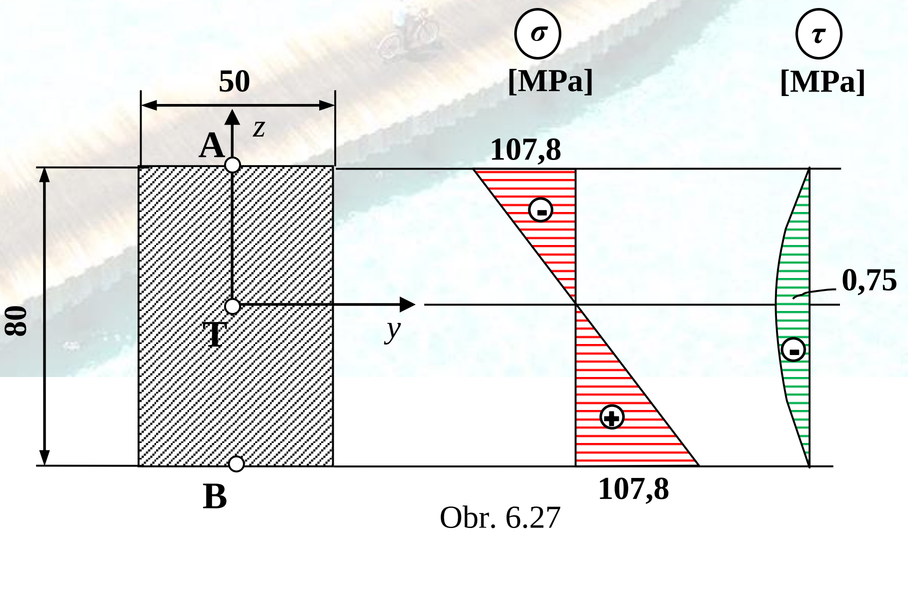
$$|\sigma_A| = |\sigma_B| = 107{,}8\mathrm{MPa}$$

Šmykové napätie vo votknutí v horných a spodných vláknach:

$$\tau_A = \tau_B = 0$$

Šmykové napätie vo votknutí v ťažisku prierezu:

$$\tau_T = \frac{V_{votknutie}.S_y^*}{b.I_y} = \frac{V_{votknutie}.\left(z_{T^*}.A^*\right)}{b.I_y} = \frac{2.10^3\ \mathrm{N}.(25.50.40)\,\mathrm{mm}^3}{50\,\mathrm{mm}.2\,133\,333\,\mathrm{mm}^4} = 0{,}75\,\mathrm{MPa}$$



Obr. 6.27

Keďže ohybový moment *M* je s kladným znamienkom, znamená to podľa znamienkovej dohody, že spodné vlákno je ťahané, t.j. v spodnom vlákne je ťah – podľa toho vykreslím v spodnom vlákne (bod B) +.