

5 ZÁKLADY ANALYTICKEJ DYNAMIKY

V predošlých kapitolách sme pri **zostavovaní pohybových rovníc** mechanických sústav vychádzali **z Newtonových zákonov**. V takto zostavených pohybových rovniciach sú vzťahy medzi veličinami, ktorými je charakterizovaný pohyb a pôsobiacimi silami vyjadrené **vektorovými veličinami** - hybnosť a sila. V tejto súvislosti hovoríme o **vektorovej dynamike**.

V **analytickej dynamike** sú základom riešenia problémov dynamiky **skalárne veličiny**, ktoré úzko súvisia s **energetickými veličinami** (kinetická energia, práca). Chovanie skúmaného objektu je popísané jednou vetou, ktorá sa považuje za základnú tézu. Túto tézu nazývame princípom. Z princípov potom cestou matematickej analýzy dostávame východiskové (obvyčajne vlastné) *pohybové rovnice* skúmaného hmotného objektu.

J. L. Lagrange, vedec francúzskeho pôvodu, vo svojej práci uvádza dve metódy riešenia, ktoré sú súčasťou analytickej dynamiky:

- Prvá je založená **na určení práce vonkajších a zotrvačných síl pri virtuálnej zmene polohy mechanickej sústavy**, nazýva sa **princíp virtuálnych prác** alebo princíp d'Alambert-Lagrangeov, často tiež hovoríme o všeobecnej rovnici dynamiky.
- Druhá metóda je založená na poznaní **kinetickej a potenciálnej energie mechanickej sústavy, ktoré vyjadrené pomocou zovšeobecnených súradníc** tvoria základ **Lagrangových rovníc II. druhu**.

 *Poznámka:* Postupy *vektorovej dynamiky*, sú vhodné pre riešenie problémov dynamiky v technickej praxi v prípade jednoduchých dynamických modelov sústav telies a pre výpočet reakcií vo väzbách.

Metodický postup pri zostavovaní pohybových rovníc *metódami analytickej dynamiky* sa podstatne líši od postupov vektorovej dynamiky. Vyžaduje si zavedenie nových pojmov a používa matematické postupy, ktorých výhody sa prejavajú až pri zostavovaní pohybových rovníc u zložitejších mechanických sústav.

5.1 ZÁKLADNÉ POJMY

5.1.1 Klasifikácia väzieb

Uvažujme voľné teleso, ktoré koná všeobecný priestorový pohyb. Na jednoznačné určenie jeho polohy je nutné v každom časovom okamihu poznať 6 nezávislých parametrov. Pretože pri použití rôznych súradnicových sústav existuje viacero možností voľby parametrov určujúcich polohu telesa, z hľadiska univerzálneho použitia používame v analytickej mechanike pojem „**zovšeobecnené súradnice**“ q_i . Je to množina ľubovoľných nezávislých parametrov, ktoré jednoznačne určujú polohu telesa alebo sústavy telies. Ich počet určuje **počet stupňov voľnosti pohybu „ n “**. Môžu to byť súradnice dĺžkové alebo uhlové, pričom $i=1, \dots, n$ je počet stupňov voľnosti pohybu sústavy.

Ked' upevníme voľné teleso na rám, prípadne na iné teleso mechanickej sústavy, obmedzíme jeho možnosti pohybu (znížime počet stupňov voľnosti). Potom kinematické veličiny, ktoré

charakterizujú pohyb telesa, musia spĺňať určité podmienky, ktoré nazývame *väzbové podmienky*, resp. *väzby*. Vo všeobecnom prípade väzbové podmienky v analytickom tvare sú určité funkcie obsahujúce súradnice, rýchlosti a čas, pričom ich konkrétny tvar závisí od druhu a konštrukcie väzby. Keď je väzbová podmienka vyjadrená funkciou obsahujúcou len súradnice alebo primitívnou funkciou rýchlosti, hovoríme o *holonómnej väzbe*. V tomto prípade väzbová podmienka obmedzuje polohu telesa, resp. sústavy telies. Jej derivovaním dostaneme rovnocennú väzbovú podmienku obmedzujúcu voľbu rýchlosti, čo však neplatí obrátene. Ak je väzba určená ďalej neintegrovateľnou funkciou obsahujúcou súradnice a rýchlosti, hovoríme o *neholonómnej väzbe*. V tomto prípade je súčasne obmedzená väzba súradníc a rýchlostí, preto *neholonómne väzby* nazývame aj *kinematické väzby*. Väzby ďalej delíme z hľadiska ich závislosti na čase na *skleronómne*, ktoré nie sú funkciou času a *reónómne*, ktoré závisia na čase. Podľa charakteru väzieb sa potom rozlišujú a pomenúvajú i jednotlivé mechanické sústavy (napr. sústavy holonómne-skleronómne, holonómne-reónómne a pod.).

Poloha j -teho ľubovoľného bodu holonómne-skleronómnej sústavy „ N “ hmotných bodov s „ n “ stupňami voľnosti je určená rovnicami väzby nasledovne:

$$\bar{r}_j = \bar{r}_j(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (5.1)$$

pri sústave holonómne-reónómnej

$$\bar{r}_j = \bar{r}_j(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (5.2)$$

5.1.2 Druhy posunutí

Základný význam pre analytickú mechaniku (statiku i dynamiku) majú ďalej pojmy *skutočný a virtuálny pohyb*, resp. *premiestnenie* (posunutie, pootočenie).

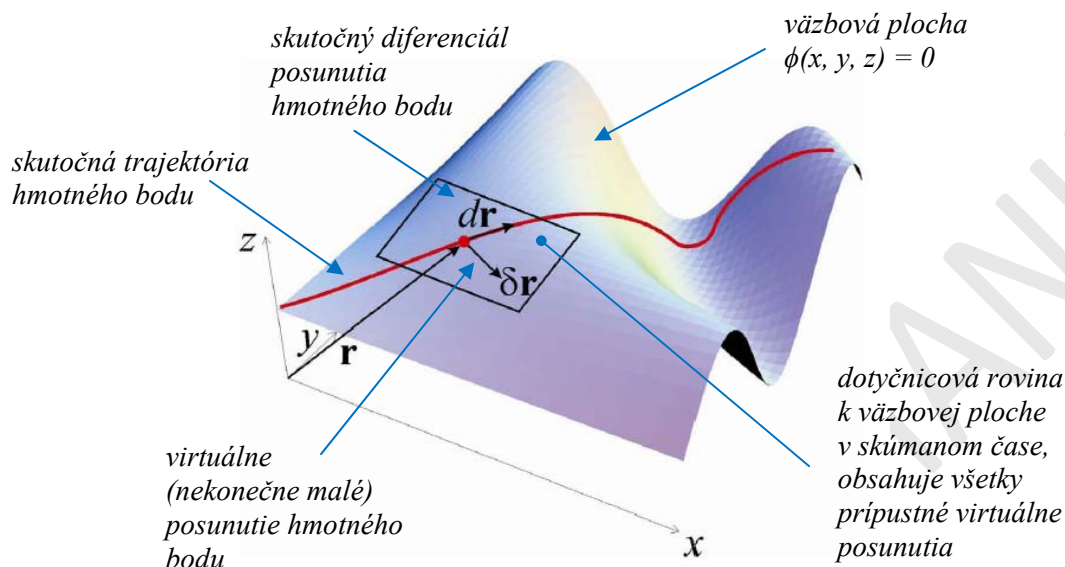
Pod *skutočným pohybom* rozumieme ten pohyb, ktorý *koná sústava v čase pod vplyvom na ňu pôsobiacich síl*. Elementárny skutočný pohyb budeme označovať symbolom „ d “, diferenciály premenných veličín, označované v matematike „ d “ budú znamenať diferenciály veličín príslušných skutočnému pohybu.

Virtuálny pohyb je *myslený možný pohyb* sústavy okolo polohy, ktorú má sústava vo všeobecnom okamihu t , a ktorý väzby sústavy pripúšťajú, pričom *čas považujeme za zastavený*, t.j. chápeme ho ako konštantu. Virtuálny pohyb ako aj príslušné zmeny ostatných veličín budeme označovať symbolom „ δ “ pred značkou danej veličiny. Symbol „ δ “ v matematike označuje variáciu – v tomto prípade tzv. izochronnú variáciu, pretože $t = \text{konšt.}$. Pravidlá pre výpočet variácie sú zhodné s pravidlami pre výpočet diferenciálu.

Pri skutočnom pohybe je elementárne premiestnenie j -teho ľubovoľného bodu sústavy „ N “ hmotných bodov pri daných pôsobiacich silách, väzbách a začiatočných podmienkach dané vzhľadom na vzťahy (5.1) a (5.2),

$$d\bar{r}_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} dq_i \quad (5.3)$$

$$\text{resp. } d\vec{r}_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t} dt \quad (5.4)$$



Obrázok 5.1

Pri virtuálnom pohybe je premiestnenie v oboch prípadoch vyjadrené rovnako, pretože čas sa nemení (považujeme ho za konštantu), teda

$$\delta \vec{r}_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \delta q_i \quad (5.5)$$

kde δq_i sú ľubovoľné, navzájom nezávislé hodnoty virtuálnych zmien zovšeobecnených súradníc, ktoré väzby pripúšťajú. Pri skutočnom pohybe dq_i nie sú ľubovoľné, pretože znamenajú zmenu zovšeobecnených súradníc pri pohybe sústavy za čas dt .

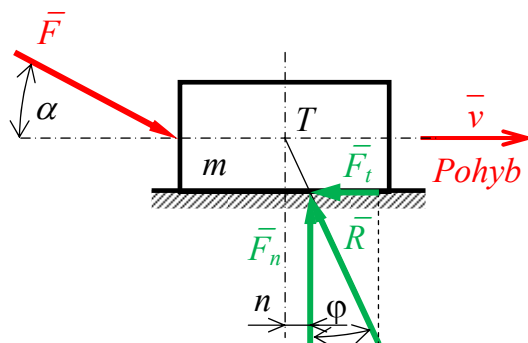
Poznámka: Pri riešení jednotlivých úloh je potrebné všetky kinematické veličiny telies nahradiť ich závislosťami na kinematických veličinách i -tého člena (teda člena, na ktorý redukuje, resp. ktorý svojím pohybom reprezentuje pohyb celej mechanickej sústavy). Získame ich z doplnkových rovníc kinematických závislostí pre jednotlivé členy sústavy – napríklad z podmienok valenia pre ozubené prevody a z podmienok lanových prevodov.

5.1.3 Ideálne väzby

Príčinou pohybu telesa, alebo sústavy telies sú vonkajšie sily, ktoré nazývame *pracovné sily* (*hnacie, resp. akčné sily*). Je známe, že vo väzbách sa realizuje určité mechanické pôsobenie jedného telesa na iné teleso, pričom vznikajú ďalšie sily, ktoré nazývame *vážbové reakcie*. Sú dôsledkom pôsobenia hnacích síl a existencie väzbových podmienok.

Napríklad pri posuvnom pohybe telesa po drsnej podložke účinkom hnacej sily $\vec{F}$ vznikne okrem normálovej zložky $\vec{F}_n$ väzbovej reakcie aj jej tangenciálna zložka $\vec{F}_t$, ktorú nazývame

trecia sila. Nositeľka výslednej väzbovej reakcie je potom odklonená od normály k podložke o uhol φ , pre ktorý platí $\operatorname{tg}\varphi = f$.



Obrázok 5.2

Vieme, že veľkosť trecej sily $F_t = f F_n$ závisí okrem iného od veľkosti normálovej zložky väzbovej reakcie, jej orientácia je opačná ako orientácia relatívnej rýchlosti telesa vzhľadom na podložku. Trecia sila znižuje posuvný účinok hnacej sily, časť vykonanej práce hnacej sily pri premiestnení telesa po podložke sa spotrebuje na prekonanie práce trecej sily. Čím sú hladšie povrchy telesa a podložky, tým je uhol φ menší. V prípade dokonale hladkých plôch je uhol φ rovný nule, t. j. nositeľka väzbovej reakcie je kolmá na podložku. Potom elementárna práca výslednej väzbovej reakcie pri ľubovoľnom virtuálnom posunutí telesa po podložke sa rovná nule.

Všeobecne možno povedať, že pri pohybe pohyblivej mechanickej sústavy, ktorá je mechanickým modelom konkrétneho strojového zariadenia, vždy existujú vo väzbách väčšie alebo menšie pasívne odpory, ktoré konajú prácu na úkor práce hnacích (pracovných) síl a tým znižujú účinnosť strojového zariadenia. Jedným z hlavných kritérií konštrukcie strojov je v súčasnosti dosiahnutie ich vysokej účinnosti. Hľadajú sa nové druhy materiálov, uplatňujú sa nové konštrukčné riešenia väzieb, ktoré znižujú veľkosť trecích síl. Potom **pri riešení mnohých dynamických problémov mechanických sústav môžeme v prvom priblížení zanedbať pasívne odpory vo väzbách.** Takúto zidealizovanú mechanickú sústavu nazývame *sústavou s ideálnymi väzbami*. Na základe predchádzajúcich úvah môžeme definovať *ideálne väzby* v sústave takto:

$$\delta A^V = \sum_{j=1}^N \bar{F}_j^V \delta \bar{r}_j = 0 \quad (5.6)$$

kde δA^V - výsledná elementárna práca väzbových reakcií,
 $\bar{F}_j^V$ - väzbová reakcia,
 $\delta \bar{r}_j$ - virtuálne premiestnenie.

Ked' výsledná elementárna práca väzbových reakcií pri ľubovoľnej virtuálnej zmene polohy sústavy sa rovná nule, potom väzby v sústave sú ideálne.

5.1.4 Zovšeobecnená sila

Uvažujme pohyblivú sústavu „ N “ hmotných bodov s „ ν “ holonómnymi väzbami, ktorej počet stupňov voľnosti potom je $n = 3N - \nu$. Na jednoznačné určenie okamžitej polohy sústavy potrebujeme poznať „ n “ zovšeobecnených súradníc $q_1, q_2, \dots, q_n$. Ak podľa (5.2) môžeme polohový vektor $\bar{r}_j$ každého hmotného bodu v ľubovoľnom časovom okamihu vyjadriť pomocou zovšeobecnených súradníc a času:

$$\bar{r}_j = \bar{r}_j(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

potom aj pravouhlé súradnice x_j, y_j, z_j jednotlivých hmotných bodov vyjadríme podobným spôsobom:

$$\begin{aligned} x_j &= x_j(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ y_j &= y_j(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ z_j &= z_j(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Keď chceme určiť dráhu každého hmotného bodu sústavy v pravouhle súradnicovej sústave, treba najprv poznať časovú zmenu všetkých zovšeobecnených súradníc. Na základe vzťahov (5.7) medzi pravouhlými a zovšeobecnenými súradnicami potom určíme časovú závislosť pravouhlých súradníc každého hmotného bodu sústavy.

Na každý hmotný bod sústavy pôsobí pracovná (hnacia) sila $\bar{F}_j^P$ a väzbová reakcia $\bar{F}_j^V$. Keď predpokladáme ideálne väzby, potom elementárna práca síl pôsobiacich na hmotné body pri ľubovoľnom virtuálnom posunutí sústavy sa rovná súčtu elementárnych prác jednotlivých pracovných síl potrebných na virtuálne posunutia hmotných bodov t. j.

$$\delta A^P = \bar{F}_1^P \delta \bar{r}_1 + \bar{F}_2^P \delta \bar{r}_2 + \dots + \bar{F}_N^P \delta \bar{r}_N \quad (5.8a)$$

$$\text{resp. } \delta A^P = \sum_{j=1}^N \bar{F}_j^P \delta \bar{r}_j \quad (5.8b)$$

 **Poznámka:** Elementárnu prácu pri virtuálnom posunutí nazývame *virtuálna práca*.

Každá virtuálna zmena je izochrónna, čiže nezávisí od času. Po dosadení vzťahu (5.5) pre virtuálne posunutie za $\delta \bar{r}_j$ do vzťahu (5.8b) bude

$$\delta A^P = \sum_{j=1}^N \bar{F}_j^P \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} \delta q_i \right)$$

Keď zmeníme poradie vykonania jednotlivých súčtov, upravíme predchádzajúci vzťah na tvar

$$\delta A^P = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^N \bar{F}_j^P \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} \right) \delta q_i \quad (5.9)$$

Označme

$$Q_i = \sum_{j=1}^N \bar{F}_j^P \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} \quad (5.10)$$

Skalárnu veličinu Q_i nazývame v analytickej mechanike *zovšeobecnenou silou* zodpovedajúcou i -tej zovšeobecnenej súradnici q_i .

Zovšeobecnenú silu Q_i definujeme ako náhradnú silu, ktorá pri premiestnení δq_i vykoná rovnakú prácu ako všetky pracovné sily celej sústavy pri tom istom pohybe.

Dosadením vzťahu (5.10) do rovnice (5.9) dostaneme

$$\delta A^P = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \quad (5.11)$$

Poznámka: Rozmer zovšeobecnenej sily závisí od rozmeru zovšeobecnenej súradnice. Ak má zovšeobecnená súradnica q_i rozmer *dĺžky*, zovšeobecnená sila má rozmer *sily*, ak je zovšeobecnená súradnica q_i vyjadrená *uhlom*, zovšeobecnená sila má rozmer *momentu sily* tak, aby súčin $Q_i \delta q_i$ mal rozmer *práce*.

APLIKÁCIA PRE POHYBLIVÚ ROVINNÚ SÚSTAVU TELIES

Vo všeobecnom prípade pohyblivej sústavy „ N “ telies je okamžitá poloha sústavy určená napr. polohovými vektormi $\bar{r}_{Tj}$ ťažísk jednotlivých telies a ich pootočeniami φ_j okolo ťažísk. Keď má sústava „ n “ stupňov voľnosti, t. j. na určenie okamžitej polohy potrebujeme poznať „ n “ zovšeobecnených súradníc, môžeme $\bar{r}_{Tj}$ a φ_j vyjadriť v tvare

$$\begin{aligned} \bar{r}_{Tj} &= \bar{r}_{Tj}(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ \bar{\varphi}_j &= \bar{\varphi}_j(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \end{aligned} \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (5.12)$$

Virtuálne posunutia $\delta \bar{r}_{Tj}$ a virtuálne pootočenia $\delta \varphi_j$ potom sú

$$\delta \bar{r}_{Tj} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_{Tj}}{\partial q_i} \delta q_i; \quad \delta \varphi_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{\varphi}_j}{\partial q_i} \delta q_i \quad (5.13)$$

Na každé teleso sústavy pôsobia pracovné sily F_j^P a momenty M_{Tj}^P svojím posuvným a otáčavým účinkom. Ak väzby v sústave sú ideálne, elementárna práca pracovných síl pri ľubovoľnej virtuálnej zmene polohy sústavy je

$$\delta A^P = \sum_{j=1}^N \left(\bar{F}_j^P \delta \bar{r}_{Tj} + M_{Tj}^P \delta \bar{\varphi}_j \right) \quad (5.14)$$

Dosadením vzťahov (5.13) do rovnice (5.14) po úprave dostaneme

$$\delta A^P = \sum_{i=1}^n \delta q_i \left[\sum_{j=1}^N \left(\bar{F}_j^P \frac{\delta \bar{r}_{Tj}}{\delta q_i} + M_{Tj}^P \frac{\delta \bar{\varphi}_j}{\delta q_i} \right) \right] \quad (5.15)$$

Označme výraz v hranatej zátvorke

$$Q_i = \sum_{j=1}^N \left(\bar{F}_j^P \frac{\delta \bar{r}_{Tj}}{\delta q_i} + M_{Tj}^P \frac{\delta \bar{\varphi}_j}{\delta q_i} \right) \quad (5.16)$$

Výraz (5.16) určuje zovšeobecnenú silu zodpovedajúcu j -tej zovšeobecnenej súradnici v prípade pohyblivej sústavy „ N “ telies konajúcich všeobecný priestorový pohyb.

Vzťahy (5.10) až (5.16) určujú zovšeobecnené sily zodpovedajúce účinkom pracovných síl. Keďže v sústave existujú aj neideálne väzby, zavádzame v analytickej mechanike pojem *zovšeobecnenej väzbovej reakcie* Q_i^V zodpovedajúcej i -tej zovšeobecnenej súradnici, ktorú na základe vzťahu (5.16) môžeme bez odvodu napísať v tvare

$$Q_i^V = \sum_{j=1}^N \left(\bar{F}_j^V \frac{\delta \bar{r}_{Tj}}{\delta q_i} + M_{Tj}^V \frac{\delta \bar{\varphi}_j}{\delta q_i} \right) \quad (5.17)$$

kde $\bar{F}_j^V$ - väzbová reakcia pôsobiaca na j -te teleso,

M_{Tj}^V - moment väzbovej reakcie $\bar{F}_j^V$ vzhľadom na ťažisko j -teho telesa.

5.2 PRINCÍP VIRTUÁLNYCH PRÁC

Hmotným objektom, s ktorým budeme pracovať pri formulovaní tohto princípu bude sústava hmotných bodov ako najvšeobecnejší model mechanickej sústavy.

Uvažujme pohyb sústavy „ N “ hmotných bodov o hmotnostiach m_j , kde $j=1,2,\dots,N$. Na j -ty hmotný bod pôsobí výslednica síl $\bar{F}_j$. Pre potreby analytickej dynamiky využijeme rozdelenie týchto síl na *sily pracovné* $\bar{F}_j^P$ a *sily väzbové* $\bar{F}_j^V$. Za väzbové sily budeme považovať tie reakcie väzieb, ktoré pri virtuálnom pohybe sústavy nekonajú prácu. Potom

$$\bar{F}_j = \bar{F}_j^P + \bar{F}_j^V, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (5.18)$$

Podľa *d'Alembertovho princípu* sú pre každý uvoľnený hmotný bod sústavy tieto *pracovné* $\bar{F}_j^P$ a *väzbové* $\bar{F}_j^V$ sily a *zotrvačná sila* F_{Dj} v rovnováhe:

$$\bar{F}_j + \bar{F}_{Dj} = \bar{0}, \quad (5.19)$$

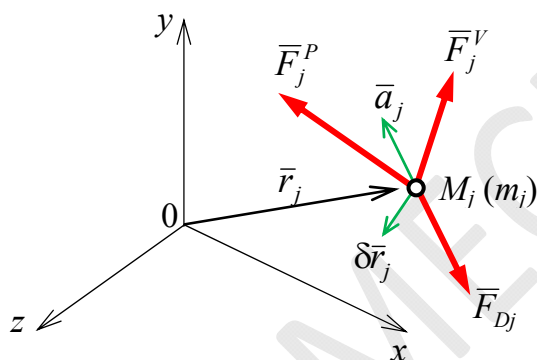
kde $\bar{F}_{Dj} = -m_j \frac{d^2 \bar{r}_j}{dt^2} = -m_j \bar{a}_j$

Vzhľadom na (5.18) platí $\bar{F}_j^P + \bar{F}_j^V + \bar{F}_{Dj} = \bar{0}$ (5.20)

Vykonajme ľubovoľnú virtuálnu zmenu polohy sústavy. Virtuálna práca, ktorú vykonajú sily pôsobiace na sústavu je potom daná výrazom

$$\delta A = \sum_{j=1}^N \bar{F}_j \delta \bar{r}_j \quad (5.21)$$

pričom $\bar{r}_j$ sú polohové vektory jednotlivých bodov sústavy (je potrebné zdôrazniť, že sú to vlastne polohové vektory pôsobísk j -tych síl) a $\delta \bar{r}_j$ znamenajú ich zmenu pri virtuálnom pohybe.



Obrázok 5.3

Podľa definície väzbových síl je ich práca nulová

$$\delta A^V = \sum_{j=1}^N \bar{F}_j^V \delta \bar{r}_j = 0 \quad (5.22)$$

Zo statiky vieme, že virtuálna práca vykonaná rovnovážnou sústavou síl pri ľubovoľnom virtuálnom posunutí sa rovná nule. Potom vzhľadom na vzťah (5.20) rovnica (5.21) bude mať tvar

$$\sum_{j=1}^N (\bar{F}_j^P + \bar{F}_{Dj}) \delta \bar{r}_j = 0 \quad (5.23a)$$

resp. symbolicky

$$\sum_{j=1}^N (\delta A_j^P + \delta A_j^D) = 0 \quad (5.23b)$$

Rovnica (5.23) je matematickou formuláciou **princípu virtuálnych prác v dynamike**.

Sústava sa pohybuje tak, že algebraický súčet virtuálnych prác všetkých pracovných a zotrvačných síl sa v každom okamihu rovná nule.

Vzťahom (5.10) bola v kapitole 5.1.4 definovaná *zovšeobecnená sila* Q_i zodpovedajúca *zovšeobecnenej súradnici* q_i , ako náhradná sila, ktorá pri premiestnení δq_i vykoná rovnakú prácu ako všetky pracovné sily celej sústavy pri tom istom pohybe.

$$Q_i = \sum_{j=1}^N \bar{F}_j^P \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i}$$

Podobne môžeme definovať *zovšeobecnenú zotrvačnú silu* Q_{Di} .

$$Q_{Di} = \sum_{j=1}^N \bar{F}_{Dj} \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_i} \quad (5.24)$$

Zo vzťahov (5.23) ďalej vyplýva, že

$$Q_i = \frac{\partial A^P}{\partial q_i} ; \quad \text{resp.} \quad Q_{Di} = \frac{\partial A^D}{\partial q_i} \quad (5.25)$$

Po úprave môžeme vzťah (5.23) vzhľadom na (5.10), (5.24) a (5.25) upraviť na tvar

$$\sum_{i=1}^n (Q_i + Q_{Di}) \delta q_i \quad (5.26)$$

Hodnoty δq_i sú nezávislé, preto ak má rovnica (5.26) platiť pre ľubovoľné hodnoty δq_i , musí byť splnené

$$Q_i + Q_{Di} = 0 ; \quad i=1,2,\dots,n \quad (5.27a)$$

Rovnicu (5.27a) môžeme symbolicky písať v tvare:

$$f_i(F_j^P, q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t) = 0; \quad i=1,2,\dots,n \quad (5.27b)$$

Ak „ n “ je počet stupňov voľnosti vyšetrovanej sústavy, potom rovníc tvaru (5.27) je práve „ n “. Tieto rovnice predstavujú sústavu „ n “ pohybových rovníc. Ich riešenie

$$q_i = q_i(t) ; \quad i=1,2,\dots,n \quad (5.28)$$

vyjadruje pohyb sústavy závislosťami zovšeobecnených súradníc na čase.

Rovnice (5.27) sú pre sústavy bez pasívnych odporov (s ideálnymi väzbami) *vlastné pohybové rovnice*. Pri sústavách s pasívnymi odpormi sú rovnice (5.27) *hlavnými pohybovými rovnicami*, k ich prevedeniu na vlastné je potrebné vyjadriť pasívne odpory pomocou akčných síl. K tomu je však potrebné určiť reakcie a teda aspoň niektorý z členov sústavy uvoľniť, čomu sme sa uvedenou metódou práve chceli vyhnúť. Pri rovnováhe sústavy je $Q_{Di} = 0$. Potom z rovníc (7.27) dostaneme

$$Q_i = 0, \quad i=1,2,\dots,n \quad (5.29)$$

Sú to *vlastné rovnovážne rovnice sústavy*. Umožňujú riešiť obidve základné úlohy statiky pohyblivých systémov: určiť rovnovážnu polohu sústavy pri daných akčných silách a určiť potrebné akčné sily pre dosiahnutie rovnováhy v predpísanej polohe (a teda riešiť rovnováhu tvarovo určitých sústav ich prevedením na pohyblivú sústavu).

Princíp virtuálnych prác je možné potom vyjadriť vetou

"Mechanický systém sa pohybuje tak, aby sa virtuálna práca efektívnych síl (vonkajších i zotrvačných) na virtuálnych posunutiach rovnala nule"

a matematicky zapísať v tvare

$$\delta A = 0 \quad (5.30)$$

V zovšeobecnenom vyjadrení

$$\delta A = \sum_i (Q_i - Q_{Di}) \delta q_i \quad (5.31)$$

$$\sum_i (Q_i - Q_{Di}) \delta q_i = 0 \quad (5.32)$$

kde Q_i - zovšeobecnená pracovná sila pôsobiaca na i -té teleso

Q_{Di} - zovšeobecnená d'Alambertova zotrvačná sila pôsobiaca na i -té teleso

δq_i - zovšeobecnená súradnica elementárneho posunutia i -tého telesa

Pre všeobecný rovinný pohyb telesa platí:

$$\sum_i (F_i^P - F_{Di}) \delta s_i + \sum_i (M_i^P - M_{Di}) \delta \varphi_i = 0 \quad (5.33)$$

kde F_i^P, M_i^P - pracovné sily a momenty pôsobiace na i -te teleso

F_{Di}, M_{Di} - zotrvačné sily a momenty pôsobiaca na i -te teleso

$\delta s_i, \delta \varphi_i$ - virtuálne posunutie, pootočenie i -teho telesa

 **Poznámka:** Princíp virtuálnych prác je výhodné použiť pri vyšetrovaní pohybu bodu a rovinného pohybu telies, kedy sú ľahko vyjadriteľné výsledné zotrvačné účinky. Riešenie touto metódou je vhodné najmä pre sústavy s ideálnymi väzbami. Postup riešenia je naznačený v príkladoch 5.1 a 5.2.