3 DYNAMIKA TUHÉHO TELESA

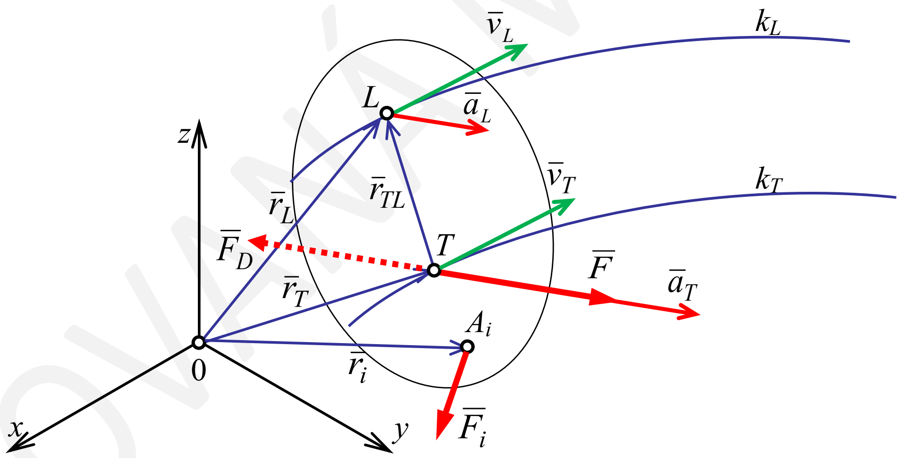
V technickej praxi sa najčastejšie stretávame s posuvným alebo rotačným pohybom telies, ktoré sú popísané príslušnými pohybovými rovnicami. V prípade všeobecného rovinného pohybu sa často využíva jeho rozklad na posuvný a rotačný pohyb. Potom je možné pre určenie jeho vlastností využiť poznatky o posuvnom a rotačnom pohybe telies.

3.1 POSUVNÝ POHYB TELESA

Pri posuvnom pohybe telesa má spojnica jeho dvoch ľubovoľných bodov vždy rovnaký smer. Ak dráhami všetkých bodov telesa sú navzájom rovnobežné, voči sebe posunuté priamky, potom teleso vykonáva *priamočiary posuvný pohyb*. Ak dráhou všetkých bodov sú navzájom posunuté rovinné krivky, potom ide o *krivočiary posuvný pohyb telesa v rovine* a ak je dráhou všetkých bodov priestorová krivka, potom teleso vykonáva *krivočiary posuvný pohyb v priestore*. Všeobecne platí:

Teleso vykonáva **posuvný pohyb** *vtedy, ak dráhy všetkých jeho bodov sú rovnaké, navzájom posunuté krivky a v každom okamihu sú rýchlosti a zrýchlenia všetkých bodov rovnaké.*

Stačí poznať dráhu, rýchlosť a zrýchlenie jedného bodu telesa a posuvný pohyb celého telesa je možné určiť rovnako ako pohyb hmotného bodu, ktorý je obvykle umiestnený v ťažisku a v ňom je sústredená hmotnosť telesa.



Obr. 3.1

Pohybová rovnica pre všetky druhy posuvného pohybu telesa:

$$\bar{F} = m\,\bar{a} \tag{3.1}$$

kde $\bar{F}$ je výslednica všetkých vonkajších síl pôsobiacich na teleso,
m je hmotnosť telesa,
$\bar{a}$ je zrýchlenie ľubovoľného bodu telesa (uvažujeme ťažisko telesa).

Na základe 1. vety o pohybe ťažiska sústavy hmotných bodov *hybnosť telesa* $\bar{H}$ pri posuvnom pohybe je:

$$\bar{H} = m\,\bar{v} \tag{3.2}$$

kde $\bar{v}$ je rýchlosť ťažiska telesa (resp. ľubovoľného bodu telesa).

Moment hybnosti $\bar{L}_0$ k určitému vzťažnému bodu (napr. k bodu 0) pri posuvnom pohybe telesa dostaneme aplikovaním záverov z dynamiky sústavy hmotných bodov:

$$\bar{L}_0 = \bar{r}_T \times m\,\bar{v}_T \tag{3.3}$$

kde $\bar{r}_T$ je polohový vektor ťažiska telesa vzhľadom na vzťažný bod,
m je hmotnosť telesa,
$\bar{v}_T$ je rýchlosť ťažiska telesa.

Ak je vzťažným bodom ťažisko T telesa, potom $\bar{L} = \bar{0}$. Nulový je aj moment vonkajších síl k ťažisku. Výsledná sila $\bar{F}$ musí potom prechádzať ťažiskom T telesa a *momentová pohybová rovnica* má tvar

$$\bar{M} = \bar{0} \tag{3.4}$$

Výsledná *zotrvačná sila* je daná súčtom zotrvačných síl jednotlivých hmotných bodov

$$\bar{F}_D = -\int_m \bar{a}\ \mathrm{d}m = -m\,\bar{a}_T \tag{3.5}$$

a predstavuje zotrvačnú silu hmoty celého telesa sústredenú v ťažisku T.

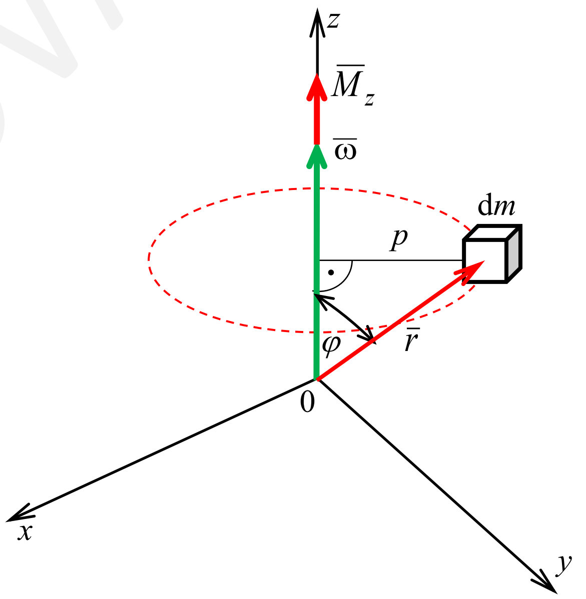
Kinetická energia E_k pri posuvnom pohybe telesa je:

$$E_k = \frac{1}{2} m\,v^2 \tag{3.6}$$

význam jednotlivých symbolov je ako v predchádzajúcich vzťahoch.

3.2 ROTAČNÝ POHYB TELESA

Teleso vykonáva **rotačný pohyb**, ak dva jeho ľubovoľné body telesa sú pri pohybe trvale v pokoji. Spojnica týchto dvoch bodov sa nazýva *stála os otáčania* alebo *stála os rotácie pohybu.* Rotačný pohyb telesa okolo stálej osi rotácie je *rovinný pohyb*. Jednotlivé body telesa sa pohybujú v *navzájom rovnobežných* rovinách, ktoré sú *kolmé* na os otáčania.



Obr. 3.2

Z kinematiky vieme, že každý bod telesa má pri rotačnom pohybe okolo stálej osi otáčania rovnakú uhlovú rýchlosť $\overline{\omega}$ a uhlové zrýchlenie $\overline{\alpha}$, ktorých smer je rovnaký so smerom osí otáčania.

Rýchlosť ľubovoľného bodu telesa pri rotačnom pohybe telesa (bod sa pohybuje po kružnici) je daná vzťahom: (*obr. 3.2*)

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r} \tag{3.7}$$

kde $\overline{r}$ je polohový vektor ľubovoľného bodu telesa.

Zrýchlenie ľubovoľného bodu telesa pri rotačnom pohybe telesa je:

$$\overline{a} = \frac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}t} = \overline{\alpha} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \overline{v} \tag{3.8}$$

Pri rotačnom pohybe telesa okolo stálej osi rotácie je príčinou pohybu otáčavý účinok vonkajších síl, ktorý sa na základe *2. Newtonovho zákona* rovná otáčavému účinku zotrvačných síl telesa. Veľkosť momentu zotrvačnej sily elementu dm k osi otáčania sa rovná súčinu tangenciálnej zložky zotrvačnej sily elementu a kolmej vzdialenosti elementu od osi otáčania (normálová zložka zotrvačnej sily pretína os rotácie). Potom na základe *obr. 3.2* je:

$$\mathrm{d}M = \mathrm{d}m\, a_t\, p \tag{3.9}$$

kde a_t je veľkosť tangenciálneho zrýchlenia elementu dm,

$p = r \sin\varphi$ - kolmá vzdialenosť elementu od osi otáčania.

Veľkosť tangenciálneho zrýchlenia na základe (3.8) je:

$$a_t = \alpha\, r \sin\varphi = \alpha\, p \tag{3.10}$$

pričom α je veľkosť uhlového zrýchlenia.

Po dosadení (3.10) do (3.9) je:

$$\mathrm{d}M = \alpha\, \mathrm{d}m\, p^2 = \alpha\, \mathrm{d}I_z \tag{3.11}$$

kde $\mathrm{d}I_z = \mathrm{d}m\, p^2$ je moment zotrvačnosti elementu k osi otáčania.

Veľkosť *výsledného momentu od zotrvačnej sily* celého telesa potom je:

$$M = \alpha \int_m \mathrm{d}m\, p^2 = \alpha\, I_z \tag{3.12}$$

kde I_z je moment zotrvačnosti telesa k osi otáčania.

Rovnica (3.12) je *pohybová rovnica rotačného pohybu telesa* okolo stálej osi otáčania. Vo vektorovom vyjadrení má tvar:

$$\overline{M} = I_z\, \overline{\alpha} \tag{3.13}$$

Zo vzťahu (3.13) vyplýva, že moment od vonkajších síl k osi otáčania je vektor, ktorý má rovnaký smer s vektorom uhlového zrýchlenia $\overline{\alpha}$, t.j. s osou otáčania.

Veľkosť momentu M od vonkajších síl k osi otáčania z sa rovná súčinu momentu zotrvačnosti I_z k osi otáčania a veľkosti uhlového zrýchlenia α.

Rovnicu (3.13) môžeme tiež zapísať v tvare

$$\overline{M} = I_z \frac{\mathrm{d}\,\overline{\omega}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}(I_z \overline{\omega})}{\mathrm{d}\,t} \tag{3.14}$$

pričom po substitúcii

$$\overline{L} = I_z\,\overline{\omega} \tag{3.15}$$

dostávame vzťah

$$\overline{M} = \frac{\mathrm{d}\,\overline{L}}{\mathrm{d}\,t} \tag{3.16}$$

kde $\overline{L}$ je moment hybnosti telesa.

Moment hybnosti telesa $\overline{L}$ *pri rotačnom pohybe okolo stálej osi rotácie sa rovná súčinu momentu zotrvačnosti telesa k osi otáčania a uhlovej rýchlosti* $\overline{\omega}$.

Z rovnice (3.14) s ohľadom na (3.16) dostaneme:

$$\overline{M}\,\mathrm{d}\,t = \mathrm{d}(I_z\,\overline{\omega}) = \mathrm{d}\,\overline{L} \tag{3.17}$$

Ľavá strana rovnice (3.17) je *impulz momentu vonkajších síl,* ktorý sa rovná odpovedajúcej zmene momentu hybnosti $\mathrm{d}\,\overline{L}$.

Kinetická energia pri rotačnom pohybe telesa okolo stálej osi rotácie je daná vzťahom

$$E_k = \frac{1}{2}\int_m \mathrm{d}\,m\,v^2 \tag{3.18}$$

kde v je veľkosť rýchlosti elementu dm.

Po dosadení (3.7) do (3.18) s ohľadom na *obr. 3.2* je:

$$E_k = \frac{1}{2}\omega^2 \int_m \mathrm{d}\,m\,(r\sin\varphi)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \int_m \mathrm{d}\,m\,p^2 = \frac{1}{2} I_z\,\omega^2 \tag{3.19}$$

3.3 VŠEOBECNÝ ROVINNÝ POHYB TELESA

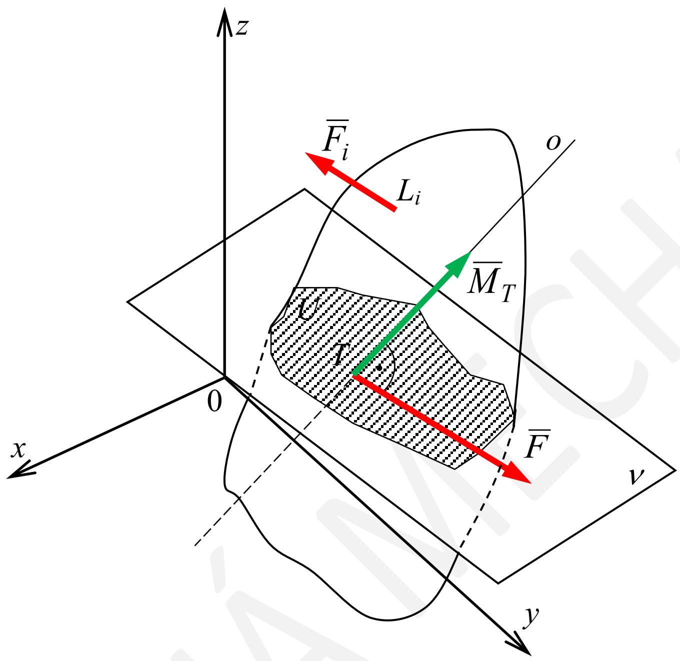
Uvažujme teleso, ktoré sa pohybuje vzhľadom na základný (inerciálny) priestor určený súradnicovou sústavou 0(x, y, z) – *obr. 3.3.* Rovina ν, ktorá prechádza ťažiskom telesa T, je jednou z rovín pohybu bodov telesa a priamka o na ňu kolmá je hlavnou centrálnou osou zotrvačnosti. Aby bol pohyb telesa rovinný, musí byť všeobecná priestorová silová sústava vonkajších síl $\overline{F_i}$ pôsobiacich na teleso nahraditeľná v ťažisku T telesa vektorom jej posuvného účinku $\overline{F} = \sum \overline{F_i}$, ktorý leží v rovine ν a vektorom jej otáčavého účinku $\overline{M_T}$, nositeľkou ktorého je os o. Pri splnení týchto podmienok stačí riešiť pohyb rovinného útvaru U (priemet telesa do roviny ν) v rovine ν.

Teleso **vykonáva všeobecný rovinný pohyb,** ak naň silové účinky pôsobia tak, že dráhy všetkých jeho bodov sú *rovinné krivky* a *roviny týchto kriviek* sú navzájom *rovnobežné.*

Pri riešení úloh môžeme potom voliť súradnicovú sústavu $0(x, y, z)$ tak, aby

$$o \,//\, z \,;\;\; \nu \equiv 0(x, y)$$

Z kinematiky vieme, že pohyb rovinného útvaru môžeme v každej okamžitej polohe rozložiť na posuvný pohyb určený pohybom ľubovoľného bodu útvaru (tzv. referenčného bodu) a na rotačný pohyb okolo osi kolmej na rovinu pohybu a prechádzajúcej zvoleným ľubovoľným bodom útvaru.



Obr. 3.3

Vzhľadom na zjednodušenie pohybových rovníc je v dynamike výhodné *rozložiť rovinný pohyb telesa na* **posuvný pohyb** *určený pohybom* **ťažiska telesa** *a na* **rotačný pohyb okolo osi kolmej na rovinu pohybu prechádzajúcej ťažiskom**.

Potom na základe druhej vety o pohybe ťažiska sústavy hmotných bodov (teleso je tiež sústava hmotných bodov s určitými podmienkami) a záverov z dynamiky rotačného pohybu telesa okolo pevnej osi rotácie, pohybové rovnice všeobecného rovinného pohybu telesa vo vektorovom tvare sú:

$$\begin{aligned} \overline{F} &= m\,\overline{a}_T \\ \overline{M} &= I_T\,\overline{\alpha} \end{aligned} \tag{3.20}$$

kde $\overline{F}$ je výslednica vonkajších síl,
m je hmotnosť telesa,
$\overline{a}_T$ je zrýchlenie ťažiska,
$\overline{M}$ je moment vonkajších síl k osi rotačného pohybu idúcej cez ťažisko,
I_T je moment zotrvačnosti telesa k osi rotačného pohybu idúcej cez ťažisko,
$\overline{\alpha}$ je uhlové zrýchlenie.

Po skalárnom vynásobení prvej rovnice (3.20) jednotkovým vektorom $\overline{i}$ a $\overline{j}$ a druhej rovnice jednotkovým vektorom $\overline{k}$ dostaneme tri pohybové rovnice všeobecného rovinného pohybu telesa v skalárnej forme:

$$\begin{aligned} F_x &= m\, a_{Tx} \\ F_y &= m\, a_{Ty} \\ M &= I_T\, \alpha \end{aligned} \tag{3.21}$$

Kinetická energia E_k všeobecného rovinného pohybu telesa sa rovná súčtu kinetickej energie posuvného pohybu ťažiska a kinetickej energie rotačného pohybu telesa okolo osi idúcej cez ťažisko kolmo na rovinu pohybu.

$$E_k = \frac{1}{2} m\, v_T^2 + \frac{1}{2} I_T\, \omega^2 \tag{3.22}$$

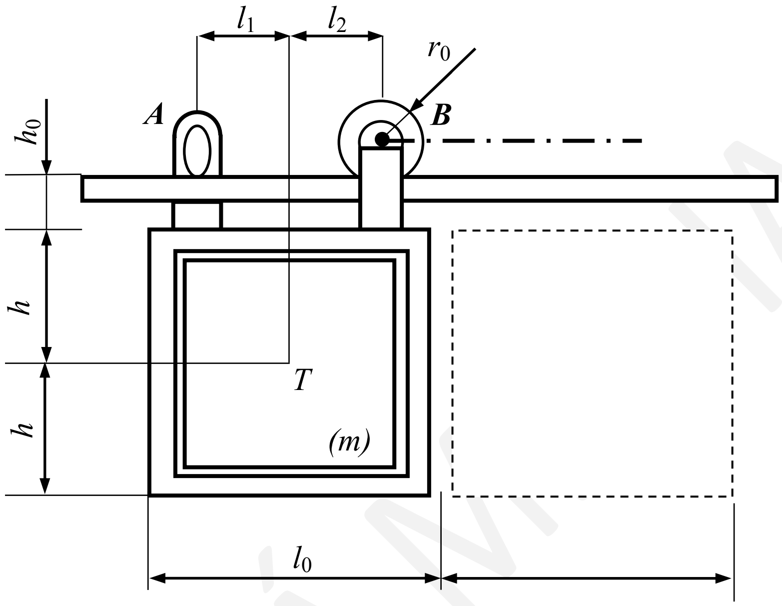
Moment hybnosti $\bar{L}$ všeobecného rovinného pohybu telesa vzhľadom na vzťažný bod sa rovná súčtu momentu hybnosti posuvného pohybu ťažiska telesa k vzťažnému bodu a momentu hybnosti rotačného pohybu telesa okolo osi idúcej cez ťažisko kolmo na rovinu pohybu.

$$\bar{L} = \bar{r}_T \times m\, \bar{v}_T + I_T\, \bar{\omega} \tag{3.23}$$

kde $\bar{r}_T$ je polohový vektor ťažiska telesa vzhľadom na vzťažný bod.

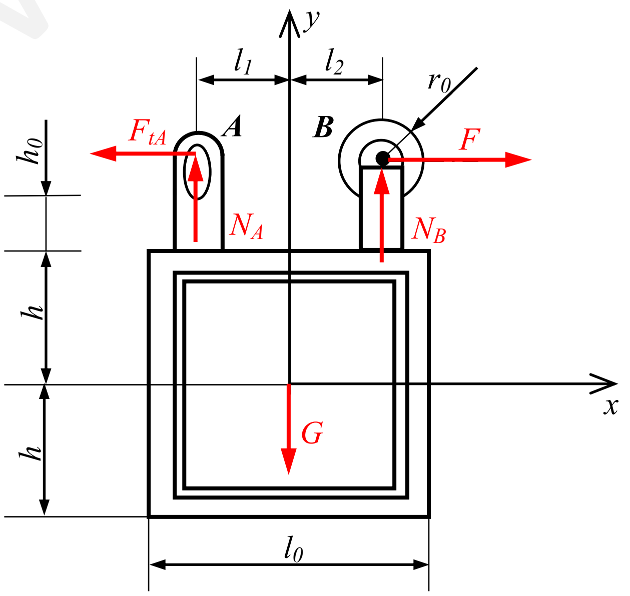
RIEŠENÉ PRÍKLADY

PRÍKLAD 3.1: Posuvné dvere (*obr. 3.4*) o hmotnosti m a rozmeroch l_0 x $2h$ sú zavesené na vodorovnom nosníku. Na pravej strane sú zavesené na kladke ***B*** so zanedbateľnými odpormi a na ľavej strane sú zavesené pomocou šmykového závesu ***A*** so súčiniteľom šmykového trenia f. V lane pripojenom ku kladke sú dvere ťahané konštantnou silou F, ktorá začne pôsobiť v čase $t = 0$ s, kedy sú dvere v pokoji. Určte akým zrýchlením a_{Tx}, sa budú dvere pohybovať a za aký čas sa dvere presunú tak, aby uzavreli otvor šírky l_0.



Obr. 3.4

RIEŠENIE: Nakreslíme obrázok uvoľnenia (*obr. 3.5*). V bode ***A*** šmykovú väzbu so súčiniteľom šmykového trenia f nahradíme trecou silou F_{tA} pôsobiacou proti pohybu dverí a reakciou od podložky N_A. V bode ***B*** pôsobí sila v lane F, ktorá uvedie dvere do pohybu. Pasívne odpory v bode ***B*** zanedbáme. Uvažujeme iba reakciu od podložky N_B. V ťažisku dverí pôsobí tiažová sila G. V prípade pôsobiacej sily F dvere konajú posuvný pohyb, pri riešení preto s výhodou volíme kartézsku súradnicovú sústavu.



Obr. 3.5

Zrýchlenie dverí a_{Tx} a čas t, za ktorý dvere uzatvoria otvor šírky l_0, určíme z pohybovej rovnice. Na základe *obrázku uvoľnenia* zostavíme pohybovú rovnicu v smere osi x, ktorá popisuje horizontálny pohyb dverí a podmienky rovnováhy:

$$\sum F_{ix} = m a_{Tx}; \qquad F - F_{tA} = m a_{Tx} \qquad \text{(a)}$$

$$\sum F_{iy} = 0; \qquad N_A + N_B - G = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$\sum M_{iT} = 0; \qquad -N_A l_1 + N_B l_2 - F(h_0 + r_0 + h) + F_{tA}(h_0 + h) = 0 \qquad \text{(c)}$$

Vzhľadom na to, že tri rovnice (a), (b), (c) obsahujú štyri neznáme: a_{Tx}, N_A, N_B, $F_{tA,}$ je potrebné z dôvodu riešiteľnosti sústavy rovníc formulovať doplnkovú rovnicu:

$$F_{tA} = f\, N_A \qquad \text{(d)}$$

Z rovnice (b) vyjadríme silu N_B

$$N_B = G - N_A \qquad \text{(e)}$$

Dosadením (d) a (e) do (c) sú vypočítané normálové sily v bodoch A a B:

$$N_A = \frac{l_2\, m\, g - F(h_0 + h + r_0)}{l_1 + l_2 - f\,(h_0 + h)}$$

$$N_B = \frac{[l_1 - f\,(h_0 + h)]\, m\, g + F(h_0 + h + r_0)}{l_1 + l_2 - f\,(h_0 + h)}$$

Z pohybovej rovnice (a) po dosadení F_{tA} je vyjadrené zrýchlenie dverí:

$$a_{Tx} = \frac{F\,(l_1 + l_2 + f\, r_0) - m\, g\, f\, l_2}{l_1 + l_2 - f\,(h_0 + h)} \qquad \text{(f)}$$

Vzhľadom na to, že všetky členy na pravej strane sú konštanty, je zrejmé, že aj zrýchlenie a_{Tx}, musí byť konštantné. Z toho dôvodu pre uvažované podmienky konajú dvere rovnomerne zrýchlený pohyb. Zrýchlenie dverí možno vyjadriť tiež všeobecne v tvare:

$$a_{Tx} = \frac{\mathrm{d}\, v_{Tx}}{\mathrm{d}\, t}$$

Odkiaľ po separácii premenných a následnej integrácii v príslušných hraniciach je vyjadrená rýchlosť posuvného pohybu dverí

$$\mathrm{d}\, v_{Tx} = a_{Tx}\, \mathrm{d}\, t \quad \Rightarrow \quad \int_0^{v_{Tx}} \mathrm{d}\, v_{Tx} = \int_0^{t} a_{Tx}\, \mathrm{d}\, t \quad \Rightarrow \quad v_{Tx} = a_{Tx}\, t$$

Ak rýchlosť nahradíme jej všeobecným vyjadrením:

$$\frac{\mathrm{d}\, x}{\mathrm{d}\, t} = a_{Tx}\, t \qquad \text{potom} \qquad \int_0^{l_0} \mathrm{d}\, x = \int_0^{t} a_{Tx}\, t\, \mathrm{d}\, t \quad \Rightarrow \quad l_0 = a_{Tx}\, \frac{t^2}{2}$$

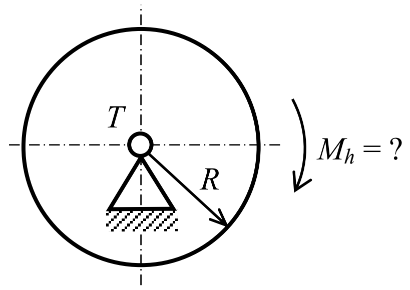
Poslednú rovnicu upravíme na tvar $t = \sqrt{\dfrac{2 l_0}{a_{Tx}}}$ a po dosadení (f) za a_{Tx} je čas potrebný pre uzatvorenie otvoru šírky l_0 vyjadrený vzťahom:

$$t = \sqrt{2\, l_0 \left[\frac{l_1 + l_2 - f\,(h_0 + h)}{F\,(l_1 + l_2 + f\, r_0) - f\, l_2\, m\, g} \right]}$$

ROTAČNÝ POHYB TELESA

PRÍKLAD 3.2: Určte veľkosť hnacieho momentu M_h, pod vplyvom ktorého sa otáča disk o polomere R a hmotnosti m okolo stálej osi rotácie podľa vzťahu $\varphi = 4t^2$. Ťažisko disku leží na osi rotácie (*obr. 3.6*). Trenie v čape zanedbajte.

Dané: $\varphi = 4t^2$ [rad]
R, m
Hľadané: M_h

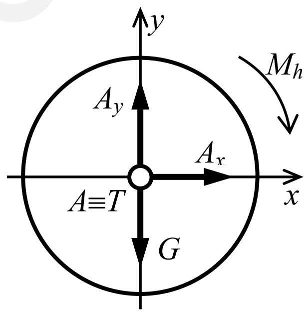


Obr. 3.6

RIEŠENIE: Použijeme metódu uvoľnenia a riešenie pomocou pohybových rovníc. Disk uvažujeme ako teleso v rovine, ktoré má tri stupne voľnosti a koná pohyb rotačný. Teleso uvoľníme – *obr. 3.7*. V prípade, ak nás nezaujímajú reakcie vo väzbách, stačí zostaviť len momentovú pohybovú rovnicu.

Základná pohybová rovnica vo vektorovom tvare:

$$\overline{M} = I\,\overline{\alpha}$$



Obr. 3.7

Skalárna momentová pohybová rovnica k osi rotácie:

$$\sum M_{iT} = I_T\,\alpha$$

$$M_h = I_T\,\alpha$$

kde pre I_T - moment zotrvačnosti valca k osi rotácie, ktorá prechádza ťažiskom platí:

$$I_T = \frac{1}{2} m R^2 \qquad \text{(a)}$$

potom

$$M_h = \frac{1}{2} m R^2 \alpha \qquad \text{(b)}$$

Deriváciou rovnice uhlovej dráhy telesa $\varphi = 4t^2$ dostaneme rovnicu uhlovej rýchlosti:

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = 8t\left[\text{rad.s}^{-1}\right] \qquad \text{(c)}$$

Deriváciou rovnice uhlovej rýchlosti telesa $\omega = 8t$ dostaneme rovnicu uhlového zrýchlenia:

$$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = \frac{d\omega}{dt} = 8\left[\text{rad.s}^{-1}\right] \qquad \text{(d)}$$

Dosadíme (d) do (b):

$$M_h = \frac{1}{2} m R^2 8 = 4 m R^2$$

PRÍKLAD 3.3: Valec tiaže G = 1000 N a polomeru R = 1m sa otáča okolo osi „o“ konštantnými otáčkami n_0 = 3000 ot.min^{-1} (*obr. 3.8*). Aké otáčky dosiahne za čas t = 10 s, ak naň začnú pôsobiť sily, ktorých moment k osi otáčania je M_o = 1000 N.m. Určte tiež otáčky valca za čas t = 10 s, ak na valec pôsobia brzdiace sily, ktorých moment k osi otáčania je 1000 Nm. Počas rozbehu a dobehu uvažujte s konštantným uhlovým zrýchlením.

Dané: G = 1000 N, r = 1m, n_0 = 3000 ot. min^{-1}, t = 10s, M_o = 1000 N.m, α = konšt.
Hľadané: *a)* otáčky pri rozbehu n_r = ?
b) otáčky pri brzdení n_b = ?

RIEŠENIE: Valec koná rovnomerne zrýchlený, resp. spomalený rotačný pohyb okolo stálej osi rotácie „o“. Úlohu riešime pomocou pohybových rovníc. Vyšetriť potrebujeme kinematické veličiny rotačného pohybu, zostavíme preto len momentovú pohybovú rovnicu.

Základná pohybová rovnica vo vektorovom tvare

$$\overline{M} = I\,\overline{\alpha}$$

Moment zotrvačnosti homogénneho valca k osi „o“

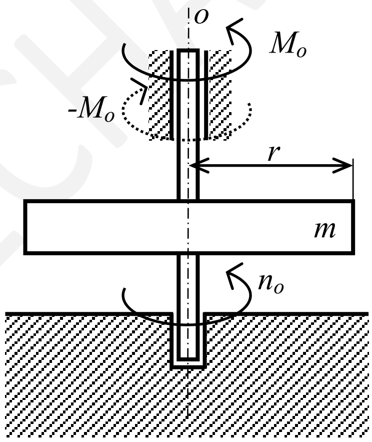
$$I_o = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{g} r^2 \qquad \text{(a)}$$

Uhlová rýchlosť na začiatku rozbehu (dobehu) v čase t_0 = 0 s:

$$\omega_0 = \frac{2\pi n_0}{60} \qquad \text{(b)}$$

Uhlová rýchlosť v čase t = 10 s od začiatku rozbehu (dobehu):

$$\omega_r = \frac{2\pi n_r}{60} \quad \text{resp.} \quad \omega_b = \frac{2\pi n_b}{60} \qquad \text{(c)}$$



Obr. 3.7

Zostavíme momentové pohybové rovnice pre jednotlivé prípady pohybu. Daný je čas zmeny otáčok, uhlové zrýchlenie preto nahradíme základnou rovnicou uhlového zrýchlenia $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$.

<u>Valec sa rozbieha</u>

$$M_o = I_o \alpha$$

$$M_o = I_o \frac{d\omega}{dt}$$

$$M_o \int_{t_0=0}^{t} dt = I_o \int_{\omega_0}^{\omega_r} d\omega$$

$$M_o t = I_o (\omega_r - \omega_0)$$

$$\omega_r = \omega_0 + \frac{M_o t}{I_o}$$

<u>Valec spomaľuje</u>

$$-M_o = I_o \alpha$$

$$-M_o = I_o \frac{d\omega}{dt}$$

$$-M_o \int_{t_0=0}^{t} dt = I_o \int_{\omega_0}^{\omega_b} d\omega$$

$$-M_o t = I_o (\omega_r - \omega_0)$$

$$\omega_r = \omega_0 - \frac{M_o t}{I_o}$$

Po zohľadnení (a), (b), (c) dosadíme dané hodnoty a vypočítame:

$$\frac{2\pi n_r}{60}=\frac{2\pi n_0}{60}+\frac{2g M_o t}{G r^2} \qquad \frac{2\pi n_r}{60}=\frac{2\pi n_0}{60}-\frac{2g M_o t}{G r^2}$$

$$n_r = n_0 + \frac{60 g M_o t}{\pi G r^2} \qquad n_b = n_0 - \frac{60 g M_o t}{\pi G r^2}$$

$$n_r = 3000 + \frac{60.1000.10.9{,}81}{\pi .1000.1^2} \qquad n_b = 3000 - \frac{60.1000.10.9{,}81}{\pi .1000.1}$$

$$\underline{n_r = 4873{,}5\ \text{ot.min}^{-1}} \qquad \underline{n_b = 1126{,}5\ \text{ot.min}^{-1}}$$

PRÍKLAD 3.4: Vrtuľa veternej elektrárne sa vplyvom vetra v danom časovom okamihu pohybuje uhlovou rýchlosťou ω (*obr. 3.9a*). Ak vietor ustane a nastane bezvetrie, vrtuľa začne rovnomerne spomaľovať vplyvom trecieho momentu v čape (*obr. 3.9b*). Určte počet otočení vrtule veternej elektrárne do zastavenia a čas do zastavenia, ak poznáme moment zotrvačnosti vrtule k osi otáčania I, polomer čapu $r_č$, koeficient čapového trenia $f_č$ a výsledná reakcia v čape je rovná tiaži vrtule g. Odpor vzduchu zanedbajte.

Obr. 3.9

RIEŠENIE: Na začiatku v čase t_0 = 0s má vrtuľa veternej elektrárne uhlovú rýchlosť $\omega_0 = \omega$. Uhol pootočenia v danom časovom okamihu (na začiatku deja) považujeme za nulový $\varphi_0 = 0$.

Na konci deja (v okamihu zastavenia) je uhlová rýchlosť $\omega_{zast} = \omega_1 = 0$ a uhol pootočenia vrtule nech je $\varphi_{zast} = \varphi_1$.

Na vrtuľu pôsobí počas zastavovania len čapový moment $M_č$ = konšt., pričom platí:

$$M_č = r_č\, f_č\, R$$

Po dosadení za výslednú reakciu v čape $R = G$ má vzťah pre čapový moment tvar:

$$M_č = r_č\, f_č\, G$$

a) Riešenie pomocou pohybových rovníc

Určenie počtu otočení vrtule do zastavenia

V okamihu, keď prestane fúkať vietor, vrtuľa začne spomaľovať. Vychádzame zo základnej pohybovej rovnice pre rotačný pohyb.

$$\boxed{M = I\alpha} \tag{1}$$

Z obrázka uvoľnenia (*obr. 3.9b*) vyplýva, že na vrtuľu pôsobí len konštantný moment čapového trenia, ktorý je orientovaný proti pohybu vrtule, preto jeho znamienko po dosadení do pohybovej rovnice bude záporné.

$$-M_{\check{c}} = I\,\alpha$$

$$-r_{\check{c}}\, f_{\check{c}}\, G = I\alpha \tag{2}$$

Ďalej využijeme tzv. rozšírený vzťah pre uhlové zrýchlenie

$$\alpha = \frac{\omega\,\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,\varphi} \tag{3}$$

Dosadením (3) do (2)

$$-r_{\check{c}}\, f_{\check{c}}\, G = I\,\frac{\omega\,\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,\varphi} \qquad /.\mathrm{d}\varphi$$

$$-r_{\check{c}}\, f_{\check{c}}\, G\,\mathrm{d}\,\varphi = I\,\omega\,\mathrm{d}\,\omega$$

$$-r_{\check{c}}\, f_{\check{c}}\, G\int_0^{\varphi_1}\mathrm{d}\,\varphi = I\int_{\omega}^{0}\omega\,\mathrm{d}\,\omega$$

$$-r_{\check{c}}\, f_{\check{c}}\, G\,\varphi_1 = I\,(0-\frac{\omega^2}{2})$$

$$r_{\check{c}}\, f_{\check{c}}\, G\,\varphi_1 = I\,\frac{\omega^2}{2}$$

$$\varphi_1 = I\,\frac{\omega^2}{2\,r_{\check{c}}\, f_{\check{c}}\, G}$$

Pri jednom otočení sa vrtuľa veternej elektrárne pootočí o uhol 360° ($\varphi=2\pi$). Po „N“ otočeniach je uhol potočenia, resp. uhlová dráha sprievodiča ľubovoľného bodu vrtule

$$\varphi_1 = 2\pi N\,;$$

potom počet otočení „N“ na základe známeho uhla určíme

$$N = \frac{\varphi_1}{2\pi}$$

$$N = \frac{I\,\omega^2}{2\,\pi\,2\,r_{\check{c}}\, f_{\check{c}}\, G}$$

$$N = \frac{I\,\omega^2}{4\,\pi\,G\,r_{\check{c}}\, f_{\check{c}}}$$

Určenie času vrtule do zastavenia

Táto časť úlohy súvisí s časom, preto využijeme základný vzťah pre uhlové zrýchlenie

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

a dosadíme do základnej pohybovej rovnice rotačného pohybu (2)

$$-r_č\, f_č\, G = I\,\alpha$$

$$-r_č\, f_č\, G = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \qquad /.\mathrm{d}t$$

$$-r_č\, f_č\, G\int_0^{t_1}\mathrm{d}t = I\int_{\omega}^{0}\mathrm{d}\omega$$

$$-r_č\, f_č\, G\, t_1 = I\,(0-\omega)$$

$$r_č\, f_č\, G t_1 = I\,\omega$$

$$t_1 = \frac{I\,\omega}{G\, r_č\, f_č}$$

b) Riešenie pomocou základných viet dynamiky

Určenie počtu otočení vrtule do zastavenia súvisí s určením uhlovej dráhy.

Na riešenie použijeme *Vetu o zmene kinetickej energie rotujúceho telesa*.

$$\mathrm{d}E_k = \mathrm{d}A, \qquad \textit{resp.} \qquad \mathrm{d}\,E_k = \int M\,\mathrm{d}\varphi$$

alebo

$$\boxed{\Delta E_k = A} \tag{5}$$

Kinetická energia telesa vykonávajúceho rotačný pohyb

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}I\omega^2} \tag{6}$$

Práca telesa vykonávajúceho rotačný pohyb

$$\boxed{A = \int M\,\mathrm{d}\varphi} \tag{7}$$

Po dosadení (6) a (7) do (5)

$$\frac{1}{2}I\,\omega_{kon}^2 - \frac{1}{2}I\omega_{zač}^2 = \int_{\varphi_{zač}}^{\varphi_{kon}} M\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Na základe zadania platí:

$$0 - \frac{1}{2}I\,\omega_0^2 = \int_0^{\varphi_1} -M_č\,\mathrm{d}\varphi$$

$$-\frac{1}{2} I\,\omega^2 = -M_č \int_0^{\varphi_1} \mathrm{d}\varphi$$

$$\frac{1}{2} I\,\omega^2 = M_č\,\varphi_1$$

$$\frac{1}{2} I\,\omega^2 = r_č\, f_č\, G\,\varphi_1$$

$$\varphi_1 = \frac{I\omega^2}{2\,r_č\, f_č\, G}$$

Počet otočení „N":

$$\varphi_1 = 2\pi N\,;$$

$$N = \frac{\varphi_1}{2\pi}$$

$$N = \frac{I\,\omega^2}{2\,\pi\,2\,r_č\, f_č\, G}$$

$$N = \frac{I\,\omega^2}{4\,\pi\,G\,r_č\, f_č}$$

Určenie času vrtule do zastavenia pomocou *Vety o zmene momentu hybnosti rotujúceho telesa*

$$\boxed{M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}}, \tag{8}$$

alebo

$$\Delta L = \int M\,\mathrm{d}t \tag{9}$$

Pre moment hybnosti rotujúceho telesa platí

$$L = I\,\omega \tag{10}$$

Dosadením (10) do (9)

$$I\,\omega_{kon} - I\,\omega_{zač} = \int_{t\,zač}^{t\,kon} M\,\mathrm{d}t$$

Na základe zadania (v momente zastavenia je rýchlosť nulová) platí:

$$0 - I\omega = \int_0^{t_1} -M_č\,\mathrm{d}t$$

$$0 - I\omega = -M \int_0^{t_1} \mathrm{d}t$$

$$I\omega = r_č\, f_č\, G \int_0^{t_1} \mathrm{d}t$$

$$I\omega = r_č\, f_č\, G t_1 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \frac{I\,\omega}{G\,r_č\, f_č}$$

PRÍKLAD 3.5: Homogénna tyč OA tiaže G a dĺžky l je v kĺbe O zavesená na vodorovnej osi otáčania a začne padať z vodorovnej polohy bez počiatočnej rýchlosti (*obr. 3.10*). Určte uhlovú rýchlosť a uhlové zrýchlenie tyče v závislosti od uhla φ.

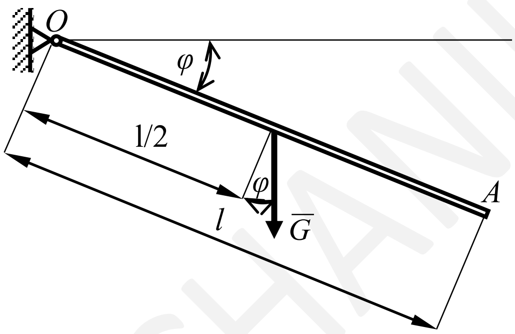
Riešenie: Tyč koná rotačný pohyb okolo stálej osi rotácie O. Rotačný pohyb je vyvolaný momentom od vlastnej tiaže tyče. Závislosť uhlového zrýchlenia na uhlovej dráhe (uhol φ) tyče odvodíme zo základnej momentovej pohybovej rovnice.

Pohybová rovnica vo vektorovom tvare:

$$\overline{M} = I\,\overline{\alpha}$$

Momentová pohybová rovnica v skalárnom tvare k osi „o“ prechádzajúcej bodom O:

$$\sum M_{io} = I_o\,\alpha \qquad \text{(a)}$$



Obr. 3.10

Pre moment zotrvačnosti homogénnej tyče zanedbateľného prierezu k osi prechádzajúcej jej krajným bodom platí:

$$I_o = \frac{1}{3} m l^2 = \frac{1}{3}\frac{G}{g} l^2 \qquad \text{(b)}$$

Dosadíme (b) do (a) a na základe obrázku uvoľnenia tyče v jej všeobecnej polohe (*obr. 3.10*) upravíme pohybovú rovnicu na tvar:

$$G\cos\varphi\,\frac{l}{2} = \frac{1}{3}\frac{G}{g} l^2\,\alpha$$

Odvodíme závislosť $\alpha = f(\varphi)$

$$\alpha = \frac{3g\cos\varphi}{2l} \qquad \text{(c)}$$

Pre hľadanú závislosť $\omega = f(\varphi)$ nahradíme v (c) uhlové zrýchlenie tzv. rozšírenou definíciou (rovnicou) uhlového zrýchlenia $\alpha = \frac{\omega\,\mathrm{d}\omega}{d\varphi}$. Rovnicu (c) upravíme separáciou premenných a integrovaním.

$$\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{3g\cos\varphi}{2l}$$

$$\int_0^{\omega} \omega\,\mathrm{d}\omega = \frac{3g}{2l}\int_0^{\varphi} \cos\varphi$$

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{3g}{2l}\sin\varphi$$

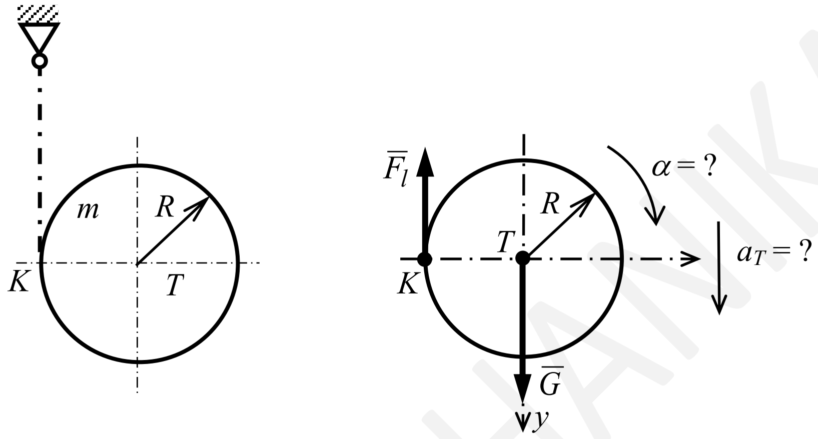
$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}\sin\varphi}$$

VŠEOBECNÝ ROVINNÝ POHYB TELESA

PRÍKLAD 3.6: Valec o hmotnosti m a polomere R sa na jednom konci odvíja lanom a je pustený voľným pádom zvislo nadol. Určte veľkosť sily v lane F_l, uhlové zrýchlenie α a zrýchlenie ťažiska valca a_T.

Dané: m, R

Hľadané: F_l, α, a_T



Obr. 3.8

RIEŠENIE: Teleso uvoľníme – *obr. 3.11b*. Zmysel pohybu zakreslíme *podľa skutočnosti*. Valec koná všeobecný rovinný pohyb VRP, pričom sa v danom okamihu vzhľadom na rám otáča okolo okamžitého stredu otáčania K. Ťažisko T zvolíme za referenčný bod a výsledný pohyb valca rozložíme na translačný pohyb ťažiska T a relatívny rotačný ostatných bodov telesa okolo osi idúcej ťažiskom.

Ťažisko valca koná priamočiary pohyb smerom dolu. Os y volíme tak, aby bola totožná s dráhou ťažiska. Kladný zmysel súradnicovej osi y volíme *súhlasne* so zmyslom pohybu ťažiska T.

Pohybové rovnice pre VRP vo vektorovom tvare:

$$\overline{F} = m\overline{a}_T \qquad \text{(a)}$$

$$\overline{M}_T = I_T\,\overline{\alpha} \qquad \text{(b)}$$

Skalárne priemety pohybových rovníc do smeru osí x, y a osi rotácie:

$$\sum F_{ix} = 0; \qquad 0 = 0 \qquad \text{(c)}$$

$$\sum F_{iy} = m\,a_T; \qquad G - F_l = m\,a_T \qquad \text{(d)}$$

$$\sum M_{iT} = I_T\,\alpha; \qquad F_l\,R = I_T\,\alpha \qquad \text{(e)}$$

Moment zotrvačnosti valca k osi idúcej ťažiskom T: $\quad I_T = \frac{1}{2} m R^2 \qquad$ (f)

Pre VRP valca musí byť splnená *podmienka valenia*: $\quad a_T = \alpha R \qquad$ (g)

Hľadané veličiny dostaneme riešením sústavy rovníc (c), (d), (e), (f), (g). Dosadíme (f) do (e)

$$F_l\,R = I_T\,\alpha$$

$$F_l\,R = \frac{1}{2} m R^2 \alpha$$

$$F_l = \frac{1}{2} m R \alpha \qquad \text{(h)}$$

Dosadíme (h) do (d) a odvodíme vzťah pre uhlové zrýchlenie α

$$G - F_l = m a_T$$

$$G - \frac{1}{2} m R \alpha = m \alpha R$$

$$m g - \frac{1}{2} m R \alpha = m \alpha R$$

$$2g - R\alpha = 2R\alpha$$

$$2g = 3R\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{2g}{3R} \qquad \text{(i)}$$

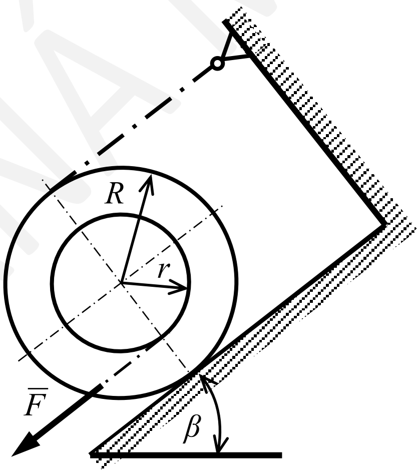
Dosadením (i) do podmienky valenia (g) a rovnice (h) vypočítame zrýchlenie ťažiska a_T a silu v lane F_1

$$a_T = \alpha R = \frac{2g}{3R} R \qquad \Rightarrow \qquad a_T = \frac{2}{3} g$$

$$F_l = \frac{1}{2} m R \alpha = \frac{1}{2} m R \frac{2g}{3R} = \frac{1}{3} m g \qquad \Rightarrow \qquad F_l = \frac{1}{3} G$$

PRÍKLAD 3.7: Teleso odstupňovaného priemeru sa pohybuje po naklonenej rovine pôsobením vlastnej tiaže $\overline{G}$ a vonkajšej sily $\overline{F}$. Vypočítajte veľkosť uhlového zrýchlenia α telesa a ťahovej sily v lane $\overline{F_l}$.

Dané: m, R, r, f, β, i_T
Hľadané: α, F_l



Obr. 3.12

RIEŠENIE: Teleso uvoľníme – *obr. 3.13*. Zmysel pohybu valca nakreslíme *podľa skutočnosti*. Valec koná všeobecný rovinný pohyb (VRP) s okamžitým stredom otáčania v bode K. Výsledný pohyb valca rozložíme na translačný pohyb ťažiska T valca a relatívny rotačný pohyb telesa okolo osi idúcej ťažiskom T.
S výhodou volíme súradnicovú sústavu tak, aby os x prechádzala ťažiskom valca a jej smer a orientáciu volíme *súhlasne* so smerom a zmyslom priamočiareho pohybu ťažiska T.

Pohybové rovnice pre VRP telesa vo vektorovom tvare:

$$\overline{F} = m \overline{a}_T \qquad \text{(a)}$$

$$\overline{M}_T = I_T \overline{\alpha} \qquad \text{(b)}$$

Skalárne priemety pohybových rovníc do smeru osí x, y a osi rotácie:

$$\sum F_{ix} = m a_T ; \qquad F - F_t - F_l + G \sin \beta = m a_T \tag{c}$$

$$\sum F_{iy} = 0 ; \qquad F_N - G \cos \beta = 0 \tag{d}$$

$$\sum M_{iT} = I_T \alpha ; \qquad F r + F_l R - F_t R = I_T \alpha \tag{e}$$

Doplnkové rovnice:

Moment zotrvačnosti valca k osi idúcej ťažiskom T: $\quad I_T = m i_T^{\,2} \quad$ (f)

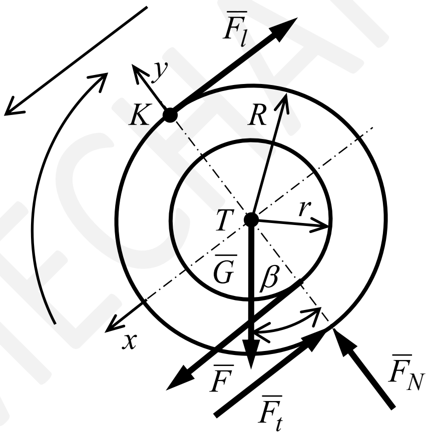
Pre VRP valca musí byť splnená *podmienka valenia*: $\quad a_T = \alpha R ; \quad$ resp. $\alpha = \dfrac{a_T}{R}$ (g)

Ak z (d) vyplýva

$$F_N = G \cos \beta = m g \cos \beta \tag{h}$$

Potom pre treciu silu platí

$$F_t = f F_N = f m g \cos \beta \tag{i}$$



Výpočet veľkosti ťahovej sily F_l vo vonkajšej väzbe lanom a uhlového zrýchlenia α.

Riešime sústavu rovníc (c) - (i).

z (e) $\quad F_l = \dfrac{F_t R - F r + m i_T^{\,2} \alpha}{R}$

Dosadíme do (c)

Obr. 3.13

$$F - G \cos \beta f - \left(\frac{F_t R - F r + m i_T^{\,2} \alpha}{R} \right) + G \sin \beta = m a_T$$

$$F - G \cos \beta f - \left(\frac{G \cos \beta f R - F r + m i_T^{\,2} \alpha}{R} \right) + G \sin \beta = m R \alpha$$

$$F R - G \cos \beta f R - G \cos \beta f R + F r - m i_T^{\,2} \alpha + G \sin \beta R = m \alpha R^2$$

$$F (R + r) - 2 m g \cos \beta f R + m g \sin \beta R = m i_T^{\,2} \alpha + m \alpha R^2$$

$$\alpha = \frac{F (R + r) - 2 m g \cos \beta f R + m g \sin \beta R}{m \left(R^2 + i_T^{\,2} \right)}$$

LITERATÚRA

[1] MONKOVÁ, K.- ŠMERINGAIOVÁ, A.: *Vybrané kapitoly z dynamiky I.* Praha: Asociace RISE, 2013, 192 s. ISBN 978-80-87670-11-8

[2] ŠMERINGAIOVÁ, A.- GAŠPÁR, Š.: *Technická mechanika II.* Návody na cvičenia. Prešov: FVT TU, 2013. 175 s. ISBN 978-80-553-1583-6