OBSAH

1 MECHANIZMY S KONŠTANTNÝM PREVODOM

K mechanizmom so stálym prevodom patria najmä *mechanizmy s ozubenými kolesami*, *trecie prevody* a niektoré zvláštne prípady *kĺbových mechanizmov*. Pri kinematickom riešení mechanizmu s konštantným prevodom určujeme najčastejšie prevod, uhlové rýchlosti, uhlové zrýchlenia a pootočenia jednotlivých kolies, niekedy i rýchlosti a zrýchlenia ich významných bodov.

Ak hnací *m* aj hnaný *n* člen mechanizmu vykonávajú pohyb rotačný, potom prevod p_{mn} je daný pomerom uhlov pootočenia hnaného a hnacieho člena mechanizmu, resp. pomerom ich uhlových rýchlostí:

$$p_{mn} = \frac{d\varphi_{n1}}{d\varphi_{m1}} = \frac{\omega_{n1}}{\omega_{m1}}, \tag{1.1}$$

kde φ_{n1} - pootočenie *n*-tého (hnaného) člena mechanizmu,

φ_{m1} - pootočenie *m*-tého (hnacieho) člena mechanizmu,

ω_{n1}, ω_{m1} - príslušné uhlové rýchlosti.

Ak $p_{mn} > 1$, ide o prevod do rýchla, ak $p_{mn} < 1$, ide o prevod do pomala.

1.1 MECHANIZMY S OZUBENÝMI KOLESAMI

Mechanizmy s ozubenými kolesami umožňujú prenos krútiaceho momentu z hnacieho hriadeľa na hnaný. Používajú sa predovšetkým v prípade prevodov so stálym prevodovým pomerom a malou osovou vzdialenosťou hriadeľov.

Podľa druhu použitých ozubených kolies delíme mechanizmy s ozubenými kolesami na:

- *rovinné* (s čelnými ozubenými kolesami),
- *sférické* (s kužeľovými ozubenými kolesami),
- *priestorové*.

Rozdelenie podľa iných hľadísk:

- *predlohové* (1° voľnosti, všetky členy konajú pohyb rotačný; hrebeň posuvný),
- *planétové* (1° voľnosti, niektoré členy konajú všeobecný rovinný pohyb),
- *diferenciály* (2° voľnosti).

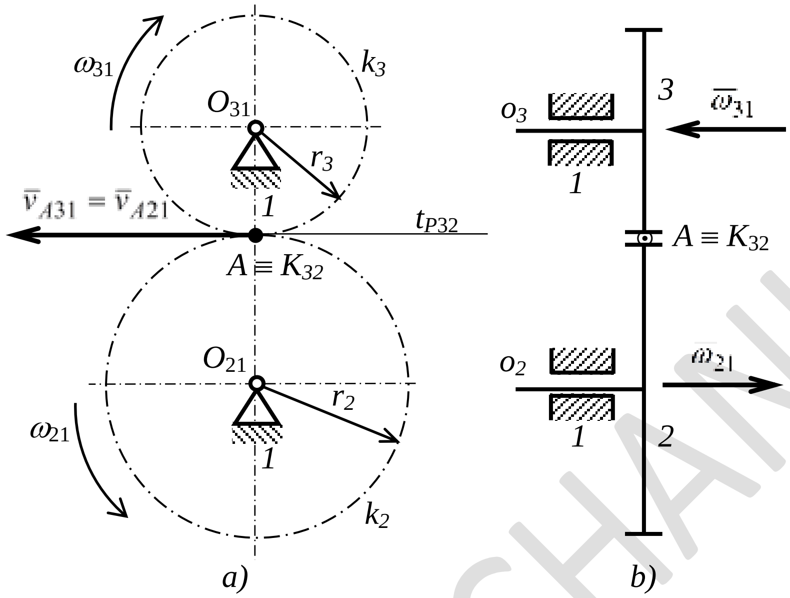
1.1.1 Jednoduché rovinné mechanizmy s čelnými ozubenými kolesami.

Rovinné mechanizmy s čelnými ozubenými kolesami slúžia k transformácii rotačných pohybov medzi rovnobežnými hriadeľmi. Patria k nim i mechanizmy s ozubeným hrebeňom. Najjednoduchším z týchto mechanizmov je trojčlenný mechanizmus s jednou všeobecnou kinematickou dvojicou (*obr. 1.1*), kde osi členov *2* a *3* sú navzájom rovnobežné ($o_{21} // o_{31}$). Určenie prevodového pomeru tohto mechanizmu vysvetlíme v *príklade 1.1*.

Príklad 1.1: Určte prevod p_{23}, uhlovú rýchlosť ω_{31} a uhlové zrýchlenie α_{31} hnaného kolesa ozubeného prevodu na *obr. 1.1*, ak uhlovú rýchlosť ω_{21} a uhlové zrýchlenie α_{21} hnacieho kolesa a rozmery (polomery rozstupových kružníc ozubených kolies r_2, r_3) ozubených kolies poznáme.

Dané: ω_{21}, α_{21}, r_2, r_3

Hľadané: p_{23}, ω_{31}, α_{31}



Obr. 1.1

Riešenie: Na *obr. 1.1* je zobrazená kinematická schéma prevodu tvoreného dvoma čelnými ozubenými kolesami. V ozubenom prevode sa hnací účinok prenáša z hnacieho hriadeľa na hnaný cez dotyk bokmi zubov ozubených kolies (väzba opretím). Pre plynulý prenos hnacieho účinku musí byť splnená *podmienka valenia*: v každom okamihu pohybu sa spoluzaberajúce kolesá valia po sebe svojimi rozstupovými kružnicami.

V kinematickej schéme označme *bod valenia A* (bod,v ktorom sa v danom okamihu spoluzaberajúce kolesá 2 a 3 dotýkajú rozstupovými kružnicami). K bodu *A* nakreslíme vektor jeho pólovej rýchlosti a vektory uhlových rýchlostí (resp. zmysel otáčania) ozubených kolies. Orientácie vektorov *pólových rýchlostí* bodu *A* a *uhlových rýchlostí* kolies predpokladáme *podľa skutočnosti* a vo *vzájomnej zhode* (pravidlo pravej ruky). Hľadané kinematické veličiny určíme na základe *podmienky valenia* polódií k_2 a k_3 v okamžitom strede otáčania (póle) $K_{32} \equiv A$:

$$\bar{v}_{A31} = \bar{v}_{A21} \tag{a}$$

Ak vyjadríme rýchlosť bodu *A* pomocou uhlových rýchlostí a vzdialeností bodov od stredov otáčania ozubených kolies *2* a *3*, môžeme podmienku valenia napísať v tvare:

$$\omega_{31}\,\overline{AO}_{31} = \omega_{21}\,\overline{AO}_{21}; \qquad \text{resp.} \qquad \omega_{31}\,r_3 = \omega_{21}\,r_2\,. \tag{b}$$

Potom

$$p_{23} = \frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = \frac{\overline{AO}_{21}}{\overline{AO}_{31}} = \frac{r_2}{r_3} \tag{c$_1$}$$

Ak uvažujeme mechanizmus s konštantným prevodom p_{23} = konšt., potom poloha K_{32} na priamke $\overline{O_{21}O_{31}}$ musí byť stála. Z rovnice (c$_1$) vyplýva:

$$\omega_{31} = p_{23}\,\omega_{21} \tag{d}$$

$$\alpha_{31} = p_{23}\,\alpha_{21} \tag{e}$$

Kladná hodnota p_{23} znamená, že predpoklad orientácie vekrora ω_{31} bol správny.

Pretože platí:

$$\omega_{21} = 2\pi\, n_{21}\ ; \quad \omega_{31} = 2\pi\, n_{31};$$

$$d_2 = m\, z_2 \quad \Rightarrow \quad r_2 = \frac{m\, z_2}{2}; \quad d_3 = m\, z_3; \quad \Rightarrow \quad r_3 = \frac{m\, z_3}{2},$$

kde n_{21}, n_{31} sú otáčky, d_2, d_3 priemery rozstupových kružníc, r_2, r_3 polomery rozstupových kružníc, m je modul a z_2, z_3 počty zubov jednotlivých ozubených kolies; rovnicu (b) môžeme po úprave napísať v tvare:

$$\omega_{31}\, z_3 = \omega_{21}\, z_2; \tag{f}$$

resp.

$$n_{31}\, z_3 = n_{21}\, z_2 \tag{g}$$

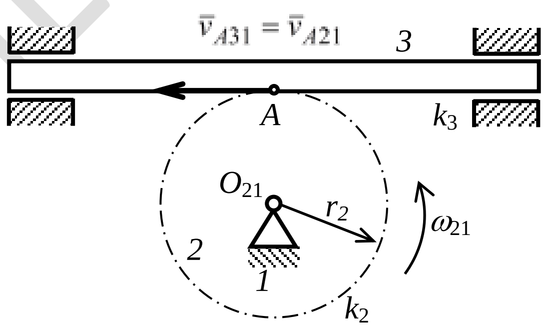
Poznámka: *Spoluzaberajúce ozubené kolesá majú rovnaký modul m.*

Vzťah (c_1) pre výpočet prevodového pomeru p_{23} je možné doplniť na tvar:

$$p_{23} = \frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = \frac{r_2}{r_3} = \frac{n_{31}}{n_{21}} = \frac{z_2}{z_3} \tag{c$_2$}$$

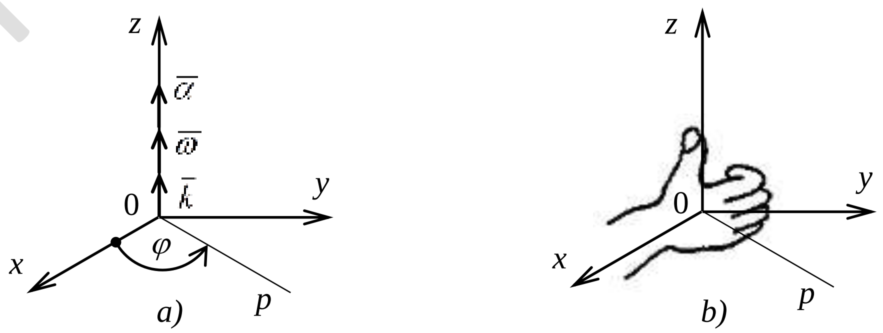
V prípade, že budeme zväčšovať polomer kolesa $r_3 \to \infty$ u mechanizmu podľa *obr. 1.1* prejde ozubené koleso *3* v ozubený hrebeň. Dostávame prevod s ozubeným hrebeňom (*obr. 1.2*), kde člen *3* vykonáva priamočiary posuvný pohyb.
Polódia k_3 relatívneho pohybu prejde v priamku. Pre bod $K_{32} \equiv A$ opäť platí podmienka valenia (a), teda:

$$\omega_{21}\, r_2 = v_{A31} = v_{31} \tag{h}$$



Obr. 1.2

Poznámka: *Zmysel vektora $\bar{\omega}$ je správne určený vtedy, ak z jeho špičky vidíme otáčanie priamky p proti pohybu hodinových ručičiek (obr. 1.3a); alebo pomocou pravej ruky: ak prsty pravej ruky určujú zmysel otáčania priamky p, palec určuje zmysel vektora $\bar{\omega}$ (obr. 1.3b).*



Obr. 1.3

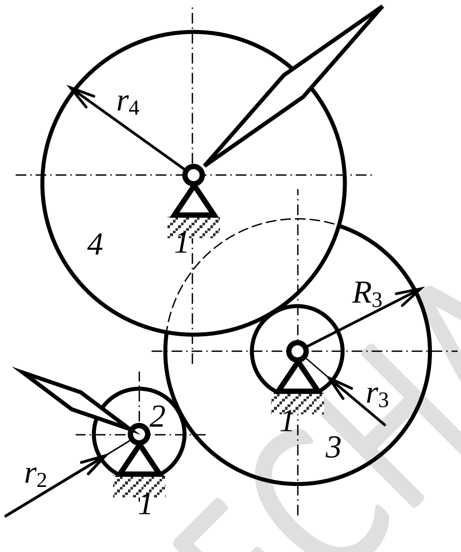
Príklad 1.2: V rovinnom mechanizme hodinového stroja znázorneného na *obr. 1.4* sa realizuje prevod zo sekundovej ručičky na ručičku minútovú, prostredníctvom ozubených kolies *2, 3, 4*. Sekundová ručička je pevne spojená s ozubeným kolesom *2*, minútová s kolesom *4*. Určte polomer rozstupovej kružnice r_3 kolesa 3, ak dané polomery kolies sú r_2 = 8 mm, R_3 = 60 mm, r_4 = 64 mm.

Dané: $r_2 = 8\text{mm}$,

$R_3 = 60\text{ mm}$,

$r_4 = 64\text{ mm}$

Hľadané: $r_3 = ?$



Obr. 1.4

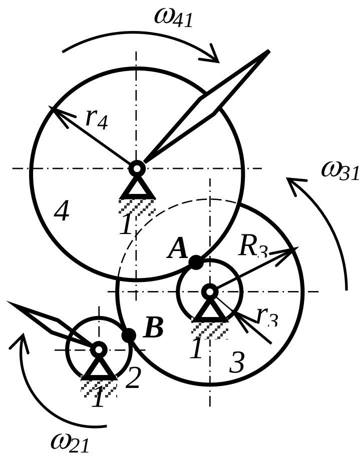
Riešenie: Podmienky valenia:

$$A: \quad \bar{v}_{A41} = \bar{v}_{A31}$$

$$B: \quad \bar{v}_{B31} = \bar{v}_{B21}$$

$$A: \quad r_4\, \omega_{41} = r_3\, \omega_{31} \qquad (1)$$

$$B: \quad R_3\, \omega_{31} = r_2\, \omega_{21} \qquad (2)$$



Obr. 1.5

Podmienka prevodu zo sekundovej na minútovú ručičku, resp. z ozubeného kolesa 2 na ozubené koleso *4*:

$$p_{24} = \frac{\omega_{41}}{\omega_{21}} = \frac{1}{60} \qquad (3)$$

z (2) $$\omega_{31} = \frac{r_2}{R_3}\, \omega_{21} \qquad (4)$$

do (1) $$r_4\, \omega_{41} = \frac{r_3\, r_2}{R_3}\, \omega_{21} \qquad (5)$$

Zohľadnením (3) a úpravou (2) dostaneme

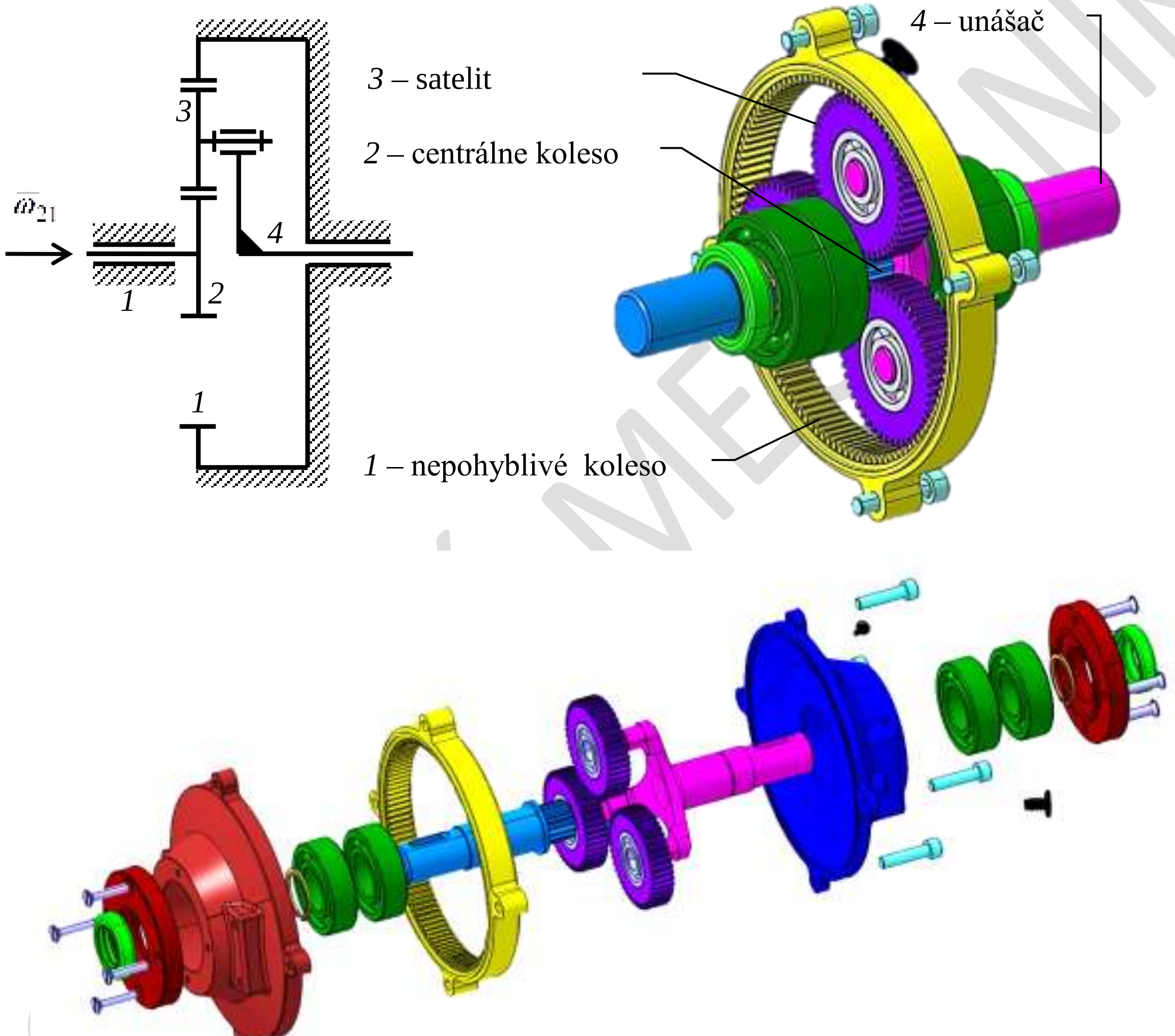
$$p_{24} = \frac{\omega_{41}}{\omega_{21}} = \frac{r_3\, r_2}{R_3\, r_4}$$

$$r_3 = p_{24} \frac{R_3\, r_4}{r_2} = \frac{1}{60} \cdot \frac{60 \cdot 64}{8}; \qquad \underline{r_3 = 8\text{ mm}}$$

1.1.2 Planétové mechanizmy s čelnými ozubenými kolesami.

Planétový mechanizmus je prevodový mechanizmus s konštantným prevodom tvorený ozubenými kolesami a unášačom, kde jedno koleso, resp. skupina kolies koná všeobecný rovinný pohyb, t.j. pohyb zložený z dvoch rotačných pohybov.

Príklad 1.3: Na *obr. 1.6* je daný planétový mechanizmus s jednoduchým satelitom. Určte prevod p_{24}, ak je daná uhlová rýchlosť ω_{21} hnacieho člena *2* a polomery rozstupových kružníc r_1, r_2, a r_3 ozubených kolies.



Obr. 1.6

Riešenie: Na *obr. 1.6* je zobrazený model planétového mechanizmu s jednoduchým satelitom. Planétové súkolesie je tvorené hnacím pastorkom (tzv. *centrálne koleso 2*), *satelitom 3*, *unášačom 4* a *nepohyblivým kolesom 1*. Hľadané kinematické veličiny určíme na základe *podmienok valenia* vo vhodne zvolených okamžitých stredoch otáčania. Pre kinematické riešenie planétových mechamizmov je vhodné zvoliť nasledujúci postup:

a) Rozbor pohybu a identifikácia jednotlivých členov mechanizmu

- *Koleso 1* s vnútorným ozubením je *nepohyblivé* a je spojené s rámom. Jeho os je súosá s centrálnou osou celého mechanizmu.

- Os pastorka (*centrálne koleso 2*) je súosá s osou unášača *4* a centrálnou osou celého mechanizmu. Pastorok (v tomto prípade je súčasťou hnacieho hriadeľa) koná vzhľadom na rám rotačný pohyb uhlovou rýchlosťou ω_{21}.
- Unášač *4* je vidlica, ktorá sa otáča okolo pevnej centrálnej osi uhlovou rýchlosťou ω_{41}.
- Satelit *3* je ozubené koleso rotačne uložené na vidlici unášača. Svojím ozubením satelit *3* zaberá na jednej strane s ozubením pastorka *2*, na strane druhej jeho ozubenie zapadá do vnútorného ozubenia korunového kolesa *1*. Satelit koná vzhľadom na rám všeobecný rovinný pohyb (*výsledný pohyb* 31), pri ktorom sa otáča okolo osi vidlice unášača *4* (*relatívny* pohyb 34). Súčasne sa valí po vnútornom povrchu korunového kolesa a núti unášač *4* konať rotačný pohyb (*unášavý pohyb* 41). Rozklad *výsledného pohybu* satelitu 31 na dva *jednoduché rotačné pohyby* 34 a 41 symbolicky zapíšeme:

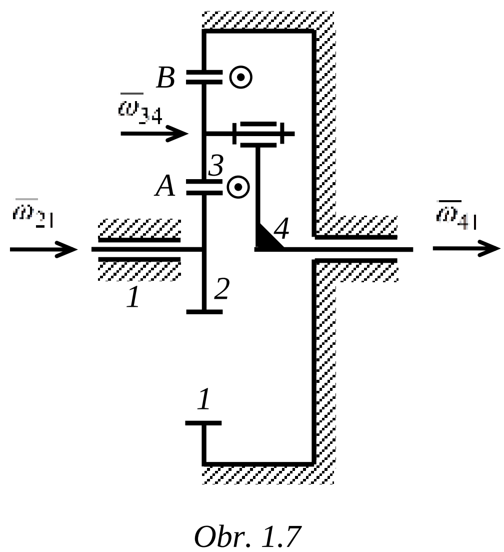
$$31 = 34 + 41, \qquad \text{(a)}$$

Rýchlosť výsledného pohybu ľubovoľného bodu satelitu *3* vzhľadom na rám je potom určená vektorovým súčtom rýchlostí:

$$\bar{v}_{31} = \bar{v}_{34} + \bar{v}_{41} \qquad \text{(b)}$$

b) Určenie bodov valenia. Predpoklad orientácií vektorov uhlových rýchlostí ozubených kolies a obvodových rýchlostí valivých bodov - Obr. 1.7

- Podmienka valenia musí byť splnená pre body, v ktorých sa po sebe valia spoluzaberajúce ozubené kolesá svojimi rozstupovými kružnicami. Okamžitý stred otáčania (pól) $K_{32} \equiv A$ je spoločným bodom kolies *2* a *3,* a bod $K_{31} \equiv B$ je v danom okamihu spoločným bodom kolies *3* a *1*.
- K členom, ktoré konajú rotačný pohyb, nakreslíme na ich nositeľky (osi rotácií) vektory uhlových rýchlostí s predpokladanou orientáciou. Predpokladáme <u>*rovnaké*</u> orientácie vektorov uhlových rýchlostí $\bar{\omega}_{21}, \bar{\omega}_{41}, \bar{\omega}_{34}$, <u>*súhlasne*</u> s orientáciou vektora danej uhlovej rýchlosti $\bar{\omega}_{21}$.
- K valivým bodom *A* a *B* nakreslíme grafické značky (⊗,⊙) orientácií vektorov ich obvodových (pólových) rýchlostí. Predpokladáme <u>*rovnaké*</u> orientácie vektorov pólových rýchlostí <u>*v zhode*</u> so zmyslom otáčania určeným orientáciou $\bar{\omega}_{21}$.



Obr. 1.7

c) Zostavenie podmienok valenia

Vektorové podmienky valenia v okamžitých stredoch otáčania $A \equiv K_{32}$ a $B \equiv K_{31}$:

$$\textbf{\textit{A}}: \quad \bar{v}_{A21} = \bar{v}_{A31} \tag{c$_1$}$$

$$\textbf{\textit{A}}: \quad \bar{v}_{A21} = \bar{v}_{A34} + \bar{v}_{A41} \tag{c$_2$}$$

$$\textbf{\textit{B}}: \quad \bar{0} = \bar{v}_{B31} \tag{d$_1$}$$

$$\textbf{\textit{B}}: \quad \bar{0} = \bar{v}_{B34} + \bar{v}_{B41}. \tag{d$_2$}$$

Podmienky valenia (c_2) a (d_2) v skalárnom tvare:

$$\textbf{\textit{A}}: \quad \omega_{21} r_2 = -\omega_{34} r_3 + \omega_{41} r_2 \tag{e}$$

$$\textbf{\textit{B}}: \quad 0 = \omega_{34} r_3 + \omega_{41} r_1 \tag{f}$$

Poznámka: *Ako bolo uvedené vyššie, pri riešení je potrebné predpokladať rovnakú orientáciu vektorov všetkých uhlových rýchlostí, výhodne pritom súhlasnú s vektorom danej uhlovej rýchlosti, teda rovnaký zmysel otáčania všetkých členov planétového mechanizmu. Výhoda takéhoto predpokladu spočíva v tom, že je tým daná vzájomná súvislosť medzi zmyslami otáčania hnacieho a hnaných členov, t. j. pri vypočítanej kladnej hodnote uhlových rýchlostí hnaných členov bude ich zmysel otáčania súhlasný so zmyslom otáčania hnacieho člena, pri zápornej hodnote bude ich zmysel otáčania opačný.*

Znamienko (-) pred druhým členom rovnice (e) vyjadruje nesúlad predpokladanej orientácie vektora pólovej rýchlosti bodu *A* kolesa *3* (zmysel otáčania kolesa *3*) pri relatívnom pohybe 34, so správnou orientáciou vektora pólovej rýchlosti $\bar{v}_{A34}$ závislou na zvolenej orientácii vektora uhlovej rýchlosti $\bar{\omega}_{34}$.

Znamienko (-) alebo (+) určujeme podľa *pravidla pravej ruky*: napr. ak palec pravej ruky naznačuje smer a zvolenú orientáciu vektora uhlovej rýchlosti $\bar{\omega}_{34}$ (*obr. 1.7*), potom prsty pravej ruky ukazujú správnu orientáciu vektora pólovej rýchlosti bodu *A* satelitu 3 (zmysel otáčania satelitu), od predpokladaného vektora uhlovej rýchlosti.

d) Výpočet kinematických veličín

Zo známych hodnôt potrebujeme vypočítať prevodový pomer daný podielom uhlových rýchlostí

$$p_{24} = \frac{\omega_{41}}{\omega_{21}}.$$

Tento podiel získame riešením sústavy rovníc (d) a (e), z ktorých vylúčime ω_{34}.

Z rovnice (f) vyplýva:

$$\omega_{34} = -\frac{\omega_{41} r_1}{r_3} \tag{g}$$

Dosadíme (g) do (e):

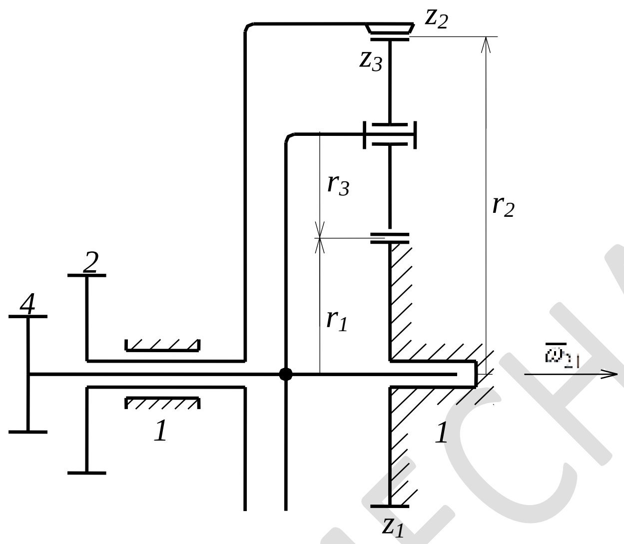
$$\omega_{21} r_2 = -\left(-\frac{\omega_{41} r_1}{r_3}\right) r_3 + \omega_{41} r_2$$

$$\omega_{21} r_2 = \omega_{41}(r_1 + r_2)$$

$$\boxed{p_{24} = \frac{\omega_{41}}{\omega_{21}} = \frac{r_2}{r_1 + r_2}}$$

Príklad 1.4: Na *obr. 1.8* je planétové súkolesie s jednoduchým ky n_{41} a n_{34} a určte tiež uhlovú rýchlosť $\omega_{31.}$ satelitom *3*, pevným planétovým kolesom *1* a centrálnym kolesom *2* s vnútorným ozubením. Počty zubov z_1 a z_2 kolies *1* a 2 a otáčky n_{21} sú dané. Vypočítajte prevod p_{24}, otáč

Dané: $z_1 = 28,\ z_2 = 72,\ n_{21} = 240\,\text{ot.min}^{-1}$
Hľadané: p_{24}, n_{41}, n_{34}



Obr. 1.8

Riešenie:

a) Rozbor pohybu a identifikácia jednotlivých členov mechanizmu

- *Nepohyblivé koleso 1* s vonkajším ozubením je pevne spojené s rámom.
- *Centrálne koleso 2* s vnútorným ozubením sa otáča uhlovou rýchlosťou ω_{21} okolo osi, ktorá je súosá s centrálnou osou mechanizmu.
- *Unášač 4* sa otáča okolo pevnej centrálnej osi uhlovou rýchlosťou ω_{41}.
- *Satelit 3* je ozubené koleso spojené rotačnou väzbou s unášačom. Svojím ozubením satelit *3* zaberá na jednej strane s vnútorným ozubením kolesa *2*, na strane druhej jeho ozubenie zapadá do vonkajšieho ozubenia planétového kolesa *1*. Satelit *3* koná všeobecný rovinný pohyb *31*, ktorý rozložíme na dva jednoduché rotačné pohyby *34* a *41*:

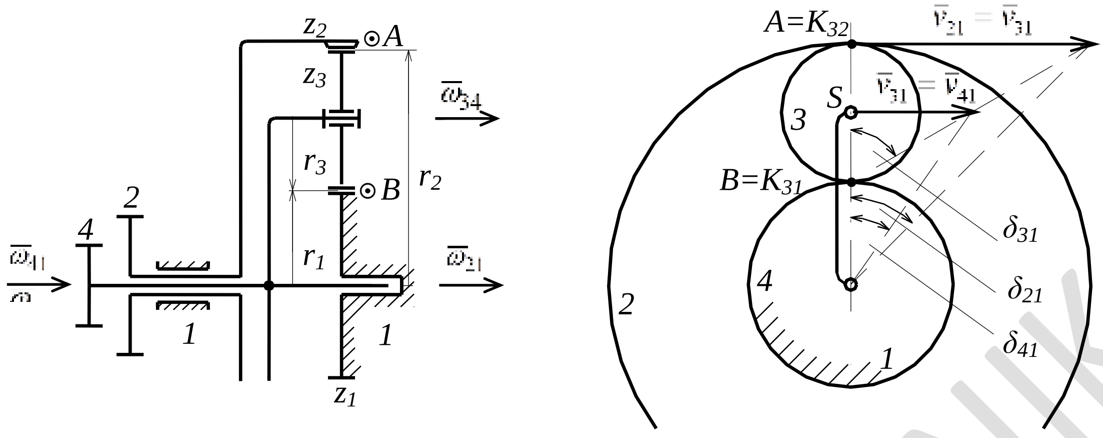
$$31 = 34 + 41, \tag{a}$$

Rýchlosť výsledného pohybu bodov satelitu *3* je potom určená vektorovým súčtom rýchlostí:

$$\bar{v}_{31} = \bar{v}_{34} + \bar{v}_{41} \tag{b}$$

b) Určenie bodov valenia. Predpoklad orientácií uhlových rýchlostí kolies a obvodových rýchlostí valivých bodov - Obr. 1.9

- Bod $A \equiv K_{32}$ je v danom okamihu spoločným bodom kolies *2* a *3* a bod $B \equiv K_{31}$ spoločným bodom kolies *3* a *1*.
- Predpokladáme <u>*rovnaké*</u> orientácie vektorov uhlových rýchlostí $\omega_{21}, \omega_{41}, \omega_{34}$.
- Predpokladáme <u>*rovnaké*</u> orientácie vektorov pólových rýchlostí (⊙) valivých bodov *A* a *B*.



Obr. 1.9

c) Zostavenie podmienok valenia

Vektorové podmienky valenia v okamžitých stredoch otáčania $A \equiv K_{32}$ a $B \equiv K_{31}$:

$$A: \quad \bar{v}_{A21} = \bar{v}_{A31} \qquad (c_1)$$

$$A: \quad \bar{v}_{A21} = \bar{v}_{A34} + \bar{v}_{A41} \qquad (c_2)$$

$$B: \quad \bar{0} = \bar{v}_{B31} \qquad (d_1)$$

$$B: \quad \bar{0} = \bar{v}_{B34} + \bar{v}_{B41}. \qquad (d_2)$$

Podmienky valenia (c_2) a (d_2) po dosadení príslušných uhlových rýchlostí a polomerov v skalárnom tvare:

$$A: \quad \omega_{21} r_2 = \omega_{34} r_3 + \omega_{41} r_2 \qquad (e)$$

$$B: \quad 0 = -\omega_{34} r_3 + \omega_{41} r_1 \qquad (f)$$

Poznámka: *V praktických úlohách sú obvykle dané počty zubov a otáčky. Pre lepšie pochopenie podstaty metódy riešenia* ($v = \omega r$) *boli do skalárnych rovníc dosadené uhlové rýchlosti a polomery rozstupových* (*valivých*) *kružníc* (*vzdialenosť vyšetrovaného bodu od stredu otáčania*). *Otáčky a počty zubov dosadíme až do výsledných vzťahov.*

d) Výpočet kinematických veličín

Zo známych hodnôt potrebujeme vypočítať prevodový pomer daný podielom uhlových rýchlostí, resp. otáčok

$$p_{24} = \frac{\omega_{41}}{\omega_{21}} = \frac{n_{41}}{n_{21}}. \qquad (g)$$

Tento podiel získame riešením sústavy rovníc (e) a (f), z ktorých vylúčime ω_{34}.

Z rovnice (f) vyplýva:

$$\omega_{34} = \omega_{41} \frac{r_1}{r_3} \qquad (h)$$

Dosadíme (h) do (e):

$$\omega_{21} r_2 = \left(\frac{\omega_{41} r_1}{r_3} \right) r_3 + \omega_{41} r_2$$

$$\omega_{21} r_2 = \omega_{41} (r_1 + r_2). \qquad \text{(i)}$$

Rovnicu (i) upravíme s ohľadom na (g) na tvar:

$$p_{24} = \frac{\omega_{41}}{\omega_{21}} = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \qquad \text{(j)}$$

Úpravou (i), resp. (j) dostaneme vzťah pre výpočet ω_{41}

$$\omega_{41} = \omega_{21} \frac{r_2}{r_1 + r_2} \qquad \text{(k)}$$

Podľa *obr. 1.9* polomer valivej kružnice kolesa *2* je:

$$r_2 = r_1 + 2 r_3 \quad \Rightarrow \quad r_3 = \frac{r_2 - r_1}{2} \qquad \text{(l)}$$

Dosadením rovníc (k) a (l) do rovnice (h) dostávame:

$$\omega_{34} = \omega_{21} \frac{r_2}{(r_1 + r_2)} \frac{r_1}{\frac{(r_2 - r_1)}{2}} = \omega_{21} \frac{2\, r_1\, r_2}{(r_1 + r_2)(r_2 - r_1)}$$

$$\omega_{34} = \omega_{21} \frac{2 r_1 r_2}{r_2^2 - r_1^2} \qquad \text{(m)}$$

Vo všetkých spoločných bodoch dvoch spoluzaberajúcich kolies (póloch) platí, že pólové rýchlosti obidvoch kolies v spoločnom bode sú rovnaké. Vzhľadom na to, že medzi uhlovými rýchlosťami ω a otáčkami *n*, resp. polomermi rozstupových kružníc *r* a počtami zubov *z*, platia známe závislosti:

$$\omega = \frac{2 \pi n}{60} \qquad \text{(n)}$$

$r = \frac{m}{2} z$, *m* – modul ozubenia je pre spoluzaberajúce kolesá rovnaký (o)

v každom póle môžeme pólovú rýchlosť nahradiť nielen súčinom

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 , \qquad \text{(p)}$$

ktorý charakterizuje priamo veľkosť pólovej rýchlosti, ale aj súčinmi:

$$\omega_1 z_1 = \omega_2 z_2 , \qquad \text{(r)}$$

$$n_1 r_1 = n_2 r_2 , \qquad \text{(s)}$$

$$n_1 z_1 = n_2 z_2 , \qquad \text{(t)}$$

podľa toho, ktoré veličiny sú známe.

Vzhľadom na túto skutočnosť môžeme vzťahy (k) a (m) prepísať do tvaru:

$$n_{41} = \frac{z_2}{z_1 + z_2} n_{21} \quad \text{a} \quad n_{34} = \frac{2 z_1 z_2}{z_2^2 - z_1^2} n_{21},$$

z ktorých po dosadení daných hodnôt dostaneme:

$$n_{41} = \frac{z_2}{z_1 + z_2} n_{21} = \frac{72}{28 + 72} \cdot 240 = \underline{172{,}8 \text{ ot.min}^{-1}}$$

$$n_{34} = \frac{2 z_1 z_2}{z_2^2 - z_1^2} n_{21} = \frac{2.28.72}{72^2 - 28^2} \cdot 240 = \underline{219{,}9 \text{ ot.min}^{-1}}$$

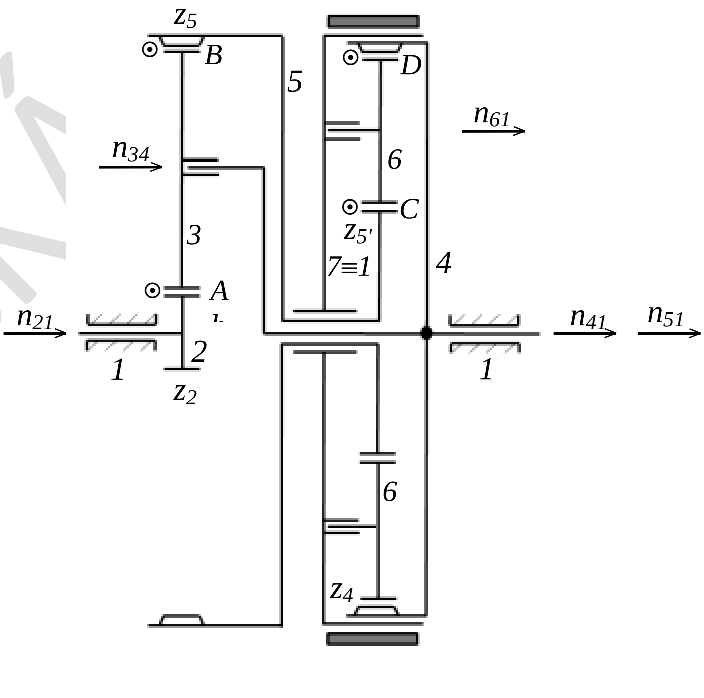
Prevod, ktorý je definovaný ako pomer výstupnej a vstupnej uhlovej rýchlosti, bude na základe (j) rovný:

$$p_{24} = \frac{z_2}{z_1 + z_2} = \frac{72}{28 + 72} = \underline{0{,}72}$$

Príklad 1.5: Na *obr. 1.10* je nakreslený prvý rýchlostný stupeň planétovej prevodovky typu „*Wilson*“. Vypočítajte prevod z hnacieho na hnaný hriadeľ a otáčky hnaného hriadeľa pri zabrzdenej brzde.

Dané: z_2 = 24,
z_4 = 76,
z_5 = 84,
$z_{5'}$ = 38,
n_{21} = 2 530 ot.min^{-1}

Hľadané: p_{24}, n_{41}



Obr. 1.10

Riešenie: Predpokladáme <u>*rovnaké*</u> zmysly otáčok n_{21}, n_{34}, n_{41}, n_{51}, n_{61} a orientácií vektorov pólových rýchlostí valivých bodov, ako je vyznačené na *obr. 1.10* a riešime pomocou podmienok valenia v bodoch *A*, *B*, *C* a *D*, kde dochádza k záberu medzi kolesami. Pôsobením pásovej brzdy je zabrzdený člen *7* mechanizmu, ktorý sa tak stáva súčasťou rámu 7 ≡ 1.

Ozubené koleso *3* koná všeobecný rovinný pohyb. Ak jeho výsledný pohyb 31 rozložíme podľa rovnice

31 = 34 + 41

na dva jednoduché rotačné pohyby 34 a 41, potom pre rýchlosť bodov satelitu 3 platí:

$$\bar{v}_{31} = \bar{v}_{34} + \bar{v}_{41}$$

Pri písaní podmienky valenia pre bod A vychádzame z rovnice:

$$A: \quad \bar{v}_{A21} = \bar{v}_{A31}$$

$$A: \quad \bar{v}_{A21} = \bar{v}_{A34} + \bar{v}_{A41}$$

$$A: \quad n_{21} z_2 = -n_{34} z_3 + n_{41} z_2 \qquad \text{(a)}$$

Podmienka valenia pre bod B:

$$B: \quad \bar{v}_{B51} = \bar{v}_{B31}$$

$$B: \quad \bar{v}_{B51} = \bar{v}_{B34} + \bar{v}_{B41}$$

$$B: \quad n_{51} z_5 = n_{34} z_3 + n_{41} z_5 \qquad \text{(b)}$$

Vzhľadom na to, že na člen *7* pôsobí pásová brzda, člen *7* má nulovú rýchlosť a člen *6* sa tak stáva centrálnym kolesom so stálou osou rotácie. Pri písaní podmienky valenia pre bod C platí:

$$C: \quad \bar{v}_{C51} = \bar{v}_{C61}$$

$$C: \quad n_{51} z_{5'} = -n_{61} z_6 \qquad \text{(c)}$$

Pre podmienku valenia v bode D platí:

$$D: \quad \bar{v}_{D41} = \bar{v}_{D61}$$

$$D: \quad n_{41} z_4 = n_{61} z_6 \qquad \text{(d)}$$

Dosadením rovnice (d) do (c):

$$n_{51} z_{5'} = -n_{41} z_4 \quad \Longrightarrow \quad n_{51} = -\frac{n_{41} z_4}{z_{5'}} \qquad \text{(e)}$$

Dosadením rovnice (e) do (b):

$$-\frac{n_{41} z_4}{z_{5'}} z_5 = n_{34} z_3 + n_{41} z_5$$

$$-n_{34} = \frac{n_{41} z_5}{z_3} + \frac{n_{41} z_4 z_5}{z_3 z_{5'}} \quad \Longrightarrow \quad -n_{34} = \frac{n_{41}\left(z_5 z_{5'} + z_4 z_5\right)}{z_3 z_{5'}} \qquad \text{(f)}$$

Dosadením rovnice (f) do (a):

$$n_{21} z_2 = \frac{n_{41}\left(z_5 z_{5'} + z_4 z_5\right) z_3}{z_3 z_{5'}} + n_{41} z_2$$

$$n_{21} z_2 z_{5'} = n_{41}\left(z_5 z_{5'} + z_4 z_5 + z_2 z_{5'}\right)$$

$$n_{21} z_2 z_{5'} = n_{41}\left[z_4 z_5 + z_{5'}\left(z_2 + z_5\right)\right]$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{n_{41} = \frac{n_{21} z_2 z_{5'}}{z_4 z_5 + z_{5'}\left(z_2 + z_5\right)}} \tag{g}$$

Dosadením známych veličín do vzťahu (g) určíme výstupné otáčky n_{41} hnaného hriadeľa *4*:

$$n_{41} = \frac{n_{21}\, z_2\, z_{5'}}{z_4\, z_5 + z_{5'}\left(z_2 + z_5\right)} = \frac{2530 \cdot 24 \cdot 38}{76.84 + 38 \cdot \left(24 + 84\right)}$$

$$n_{41} = \underline{220{,}11\,\mathrm{ot.min^{-1}}}$$

Prevod p_{24} medzi hnacím hriadeľom *2* a hnaným hriadeľom *4* je definovaný vzťahom:

$$p_{24} = \frac{n_{41}}{n_{21}} = \frac{\dfrac{n_{21}\, z_2\, z_{5'}}{z_4\, z_5 + z_{5'}\left(z_2 + z_5\right)}}{n_{21}}$$

$$\boxed{p_{24} = \frac{n_{41}}{n_{21}} = \frac{z_2\, z_{5'}}{z_4\, z_5 + z_{5'}\left(z_2 + z_5\right)}}$$

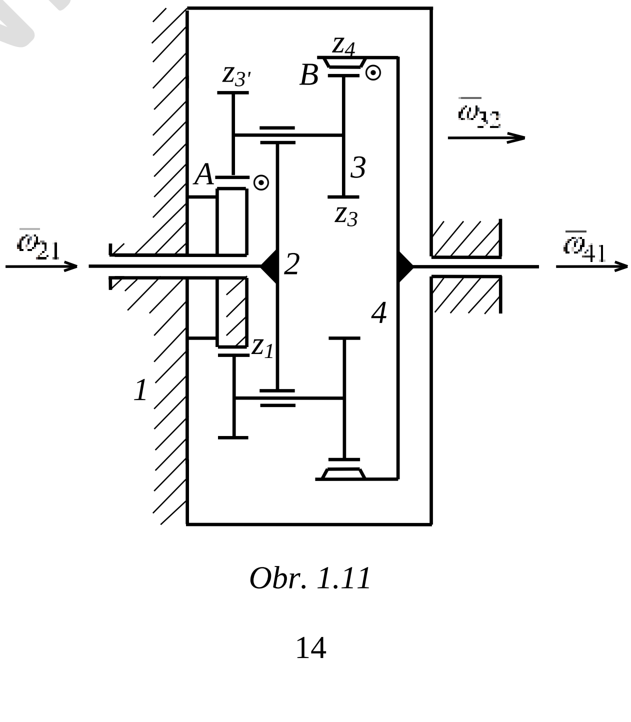
$$p_{24} = \frac{24 \cdot 38}{76 \cdot 84 + 38 \cdot \left(24 + 84\right)} = \underline{0{,}087}$$

$$p_{24} = \underline{0{,}087}$$

Príklad 1.6: Na *obr. 1.11* je planétová prevodovka s dvoma dvojitými satelitmi *3* a pevným vnútorným planétovým kolesom *1*. Vypočítajte uhlovú rýchlosť ω_{41} kolesa *4* a prevod p_{24}, ak sú dané počty zubov z_1, z_3, $z_{3'}$, z_4 a vstupná uhlová rýchlosť ω_{21}.

Dané: z_1, z_3, $z_{3'}$, z_4, ω_{21}

Hľadané: p_{24}, n_{41}



Obr. 1.11

Riešenie: Os nepohyblivého planétového kolesa *1* je súosá s osou hnaného centrálneho kolesa *4*. Vstupným, hnacím členom je unášač *2*, ktorý sa rovnako ako centrálne koleso *4* otáča okolo pevnej centrálnej osi. S unášačom *2* je rotačnou väzbou spojený dvojnásobný (dve ozubené kolesá uložené na tom istom hriadeli) satelit *3*, ktorý koná všeobecný rovinný pohyb. Na základe rozkladu pohybu 31 na dva jednoduché rotačné pohyby

31 = 32 + 21

napíšeme vektorovú rovnicu rýchlosti výsledného pohybu 31 bodov satelitu v tvare

$$\bar{v}_{31} = \bar{v}_{32} + \bar{v}_{21}$$

Predpokladáme *rovnaké* orientácie vektorov uhlových rýchlostí $\bar{\omega}_{21}, \bar{\omega}_{41}, \bar{\omega}_{32}$ a tiež *rovnaké* orientácie vektorov pólových rýchlostí bodov valenia *A* a *B*. Zostavíme podmienky valenia:

$$A: \quad \bar{0} = \bar{v}_{A31}$$

$$A: \quad \bar{0} = \bar{v}_{A32} + \bar{v}_{A21}$$

$$A: \quad 0 = -\omega_{32}\, z_3' + \omega_{21}\, z_1 \qquad \text{(a)}$$

$$B: \quad \bar{v}_{B41} = \bar{v}_{B31}$$

$$B: \quad \bar{v}_{B41} = \bar{v}_{B32} + \bar{v}_{B21}$$

$$B: \quad \omega_{41}\, z_4 = \omega_{32}\, z_3 + \omega_{21}\, z_4 \qquad \text{(b)}$$

Prevodový pomer $p_{24} = \dfrac{\omega_{41}}{\omega_{21}}$ určíme riešením sústavy rovníc (a) a (b). Z rovnice (a) vyplýva

$$0 = -\omega_{32}\, z_{3'} + \omega_{21}\, z_1 \quad \Rightarrow \quad \omega_{32} = \omega_{21} \frac{z_1}{z_3'} \qquad \text{(c)}$$

Dosadením (c) do (b):

$$\omega_{41}\, z_4 = \omega_{21} \frac{z_1\, z_3}{z_3'} + \omega_{21}\, z_4$$

$$\omega_{41}\, z_4\, z_3' = \omega_{21}\left(z_1\, z_3 + z_4\, z_3'\right) \quad \Rightarrow \quad \omega_{41} = \omega_{21}\left(1 + \frac{z_1\, z_3}{z_4\, z_3'}\right)$$

Prevod p_{24} určíme:

$$p_{24} = \frac{\omega_{41}}{\omega_{21}} = \frac{\omega_{21}\left(1 + \dfrac{z_1\, z_3}{z_4\, z_{3'}}\right)}{\omega_{21}} = 1 + \frac{z_1\, z_3}{z_4\, z_{3'}}$$

$$\boxed{p_{24} = 1 + \frac{z_1\, z_3}{z_4\, z_{3'}}}$$

1.1.3 Sférické mechanizmy s kužeľovými ozubenými kolesami.

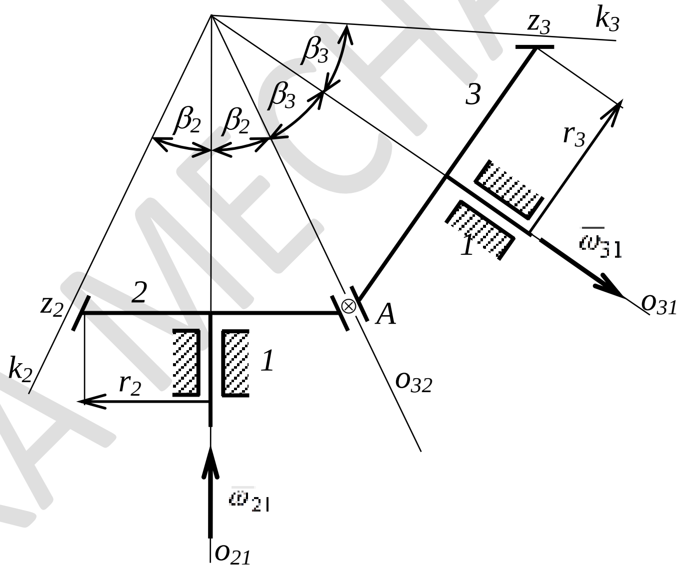
Sférické mechanizmy s kužeľovými ozubenými kolesami slúžia k transformácii rotačných pohybov medzi rôznobežnými hriadeľmi. Pre kinematické riešenie používame *metódu podmienok valenia* pre body okamžitých osí relatívnych sférických pohybov spoluzaberajúcich ozubených kolies. Osou okamžitého relatívneho pohybu kužeľových ozubených kolies je spoločná povrchová priamka rozstupových kužeľov, ktorá prechádza ich spoločným vrcholom.

V prípade planétového mechanizmu jedno kužeľové koleso, resp. skupina kolies koná sférický pohyb, ktorý sa skladá z dvoch súčasných rotačných pohybov okolo rôznobežných (obvykle na seba navzájom kolmých) osí.

Príklad 1.7: Daný je trojčlenný sférický mechanizmus s kužeľovými ozubenými kolesami. Poznáme uhlovú rýchlosť a uhlové zrýchlenie člena *2*. Určte prevod p_{23}, uhlovú rýchlosť a uhlové zrýchlenie člena *3*.

Dané: ω_{21}, α_{21}
z_2, z_3

Hľadané: p_{23}, ω_{31}, α_{31}



Obr. 1.12

Podmienka valenia polódiových kužeľov k_2, k_3 v ľubovoľnom bode *A* na osi o_{32} je:

$$A: \quad \bar{v}_{A21} = \bar{v}_{A31} \tag{a}$$

Orientácia vektora $\bar{\omega}_{31}$ na o_{31} je predpokladaná, ako je nakreslené v *obr. 1.12*. Potom podmienku valenia v skalárnom tvare napíšeme

$$A: \quad \omega_{21} r_2 = \omega_{31} r_3 \tag{b}$$

Z (b) odvodíme vzťah pre výpočet prevodového pomeru a vzhľadom na dané počty otáčok, nahradíme nimi polomery rozstupových kružníc

$$\boxed{p_{23} = \frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = \frac{r_2}{r_3} = \frac{z_2}{z_3}} \tag{c}$$

Uhlová rýchlosť a uhlové zrýchlenie člena *3* je:

$$\omega_{31} = \omega_{21}\frac{z_2}{z_3} = \omega_{21}\, p_{23}$$

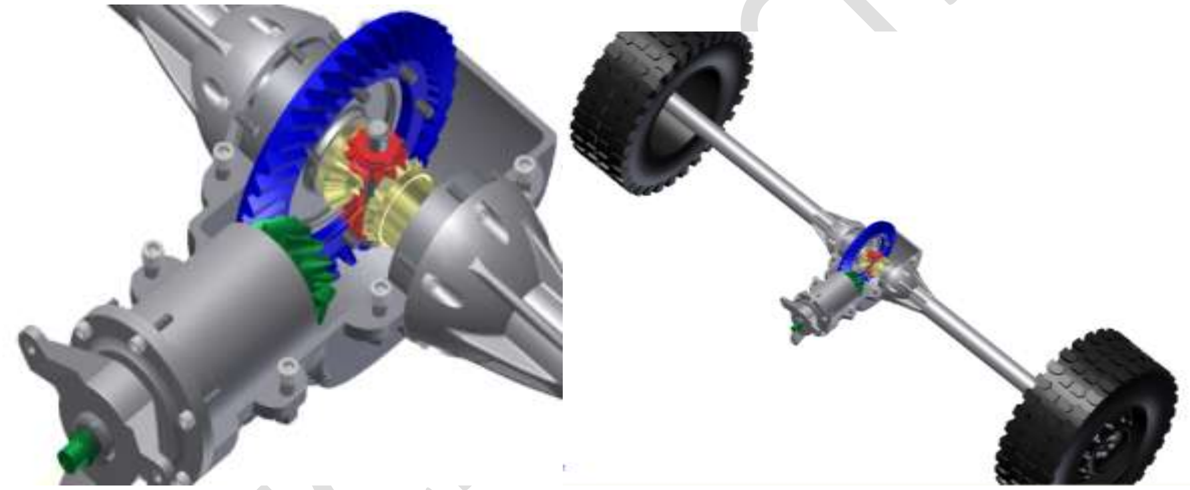
$$\omega_{31} = \omega_{21}\, p_{23} \qquad \text{(d)}$$

$$\alpha_{31} = \alpha_{21}\, p_{23} \qquad \text{(e)}$$

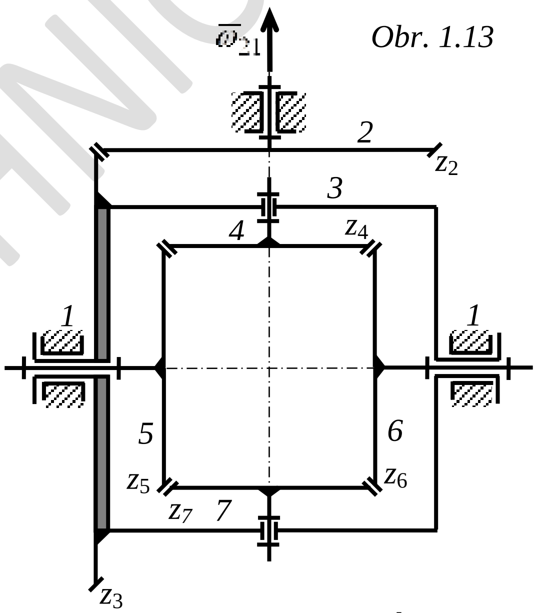
Príklad 1.8: Na *obr. 1.13* je zobrazený model planétového sférického mechanizmu automobilového diferenciálu s kužeľovými ozubenými kolesami. Na *obr. 1.14* je jeho kinematická schéma. Pastorok *2* (hnací člen mechanizmu) sa otáča stálou uhlovou rýchlosťou $\omega_{21.}$ Daná je uhlová rýchlosť ω_{21} hnacieho člena a počty zubov všetkých kužeľových ozubených kolies z_2, z_3, $z_4 = z_7$, $z_5 = z_6$.

a) Určte prevod p_{25}, resp. p_{26} pri jazde po priamej ceste, ak $\omega_{51} = \omega_{61}$.

b) Určte uhlové rýchlosti ω_{51} a ω_{61} pri jazde v zákrute, ak $\omega_{51} \neq \omega_{61}$.



Obr. 1.13



Obr. 1.14

Riešenie: Kužeľové ozubené kolesá *4* a *7* (satelity) konajú sférický pohyb 41 (71), ktorý sa skladá z dvoch súčasných rotácií okolo rôznobežných navzájom kolmých osí (*obr. 1.15a*), a to unášavý rotačný pohyb 31 spolu s unášačom *3* okolo pevnej osi o_{31} a okolo vlastnej pohyblivej osi o_{43} (o_{73}) unášanej unášačom *3* (z konštrukčného hľadiska klietka pevne spojená s tanierovým kolesom *3* – pozri *obr. 1.13* a *1.14*). Tieto osi sa pretínajú v bode Ω, ktorý je stredom sférického pohybu kužeľového ozubeného kolesa *4* (satelitu). Rozklad pohybu satelitu *4* (*7*) symbolicky zapíšeme

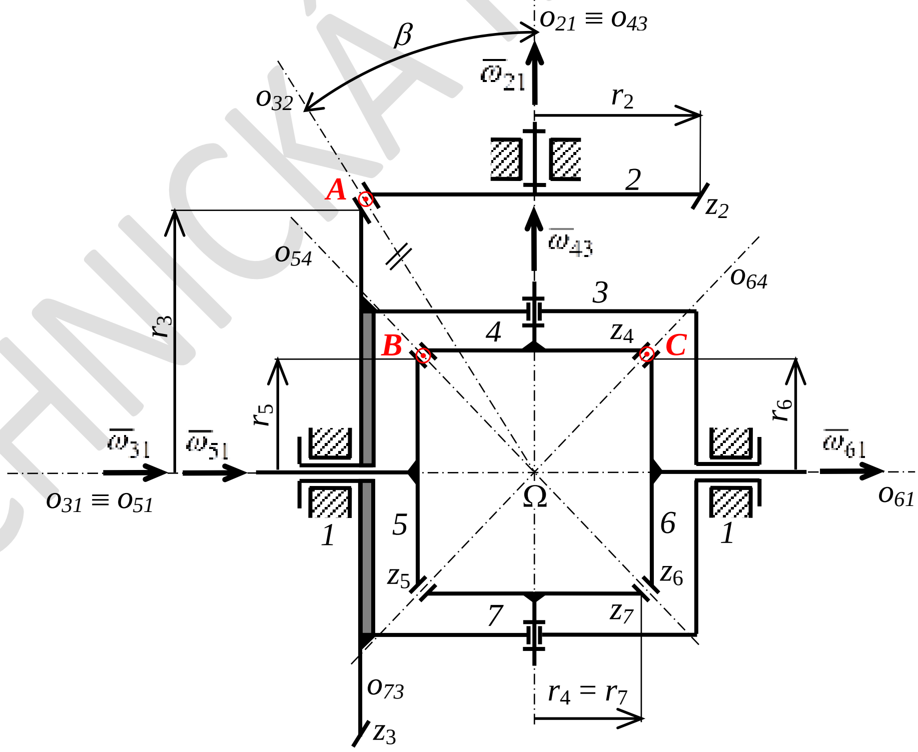
$$41 = 43 + 31$$

$$(71 = 73 + 31)$$

Hnacie kužeľové ozubené koleso *2* s tanierovým kužeľovým ozubeným kolesom unášača *3* tvoria sférický mechanizmus, v ktorom ich osi o_{21} a o_{31} sú pevné, navzájom kolmé a pretínajú sa v spoločnom bode Ω, ktorý je stredom relatívneho sférického pohybu 32 spoluzaberajúcich kužeľových ozubených kolies.

Daný planétový sférický mechanizmus musí mať teda spoločný stred sférického pohybu Ω – *obr. 1.15*.

Hľadanú závislosť medzi uhlovou rýchlosťou hnacieho člena *2* a hnaných členov *5* a *6* určíme na základe *podmienok valenia* v bodoch *A*, *B*, *C*, ktoré sú bodmi okamžitých osí rotácie o_{32}, o_{54}, o_{64} relatívnych sférických pohybov. Z hľadiska geometrie kužeľových ozubených kolies sú tieto osi spoločné povrchové priamky rozstupových (polódiových) kužeľov spoluzaberajúcich ozubených kolies, ktoré prechádzajú spoločným vrcholom kužeľov, t. j. stredom sférického pohybu Ω.



Obr. 1.15

V bodoch *A*, *B*, *C* platia *podmienky valenia*:

A: $\bar{v}_{A21} = \bar{v}_{A31}$ (a)

B: $\bar{v}_{B51} = \bar{v}_{B41}$; pričom $\bar{v}_{B41} = \bar{v}_{B43} + \bar{v}_{B31}$ (b)

B: $\bar{v}_{B51} = \bar{v}_{B43} + \bar{v}_{B31}$

C: $\bar{v}_{C61} = \bar{v}_{C41}$; pričom $\bar{v}_{C41} = \bar{v}_{C43} + \bar{v}_{C31}$ (c)

C: $\bar{v}_{C61} = \bar{v}_{C43} + \bar{v}_{C31}$

Vektory rýchlostí bodov A, B, C vo vektorových rovniciach (a), (b), (c) určíme analogicky ako pri rovinných planétových mechanizmoch, pričom vzdialenosti bodov A, B, C od príslušných osí rotácie určíme pomocou polomerov rozstupových kužeľov v daných bodoch a orientáciu vektorov hľadaných uhlových rýchlostí predpokladáme, pozri *obr. 1.15*.

Po premietnutí vektorových rovníc (a), (b), (c) do vhodného smeru, napr. do smeru vektora rýchlosti $\bar{v}_{A21}$, pri zohľadnení predpokladaných orientácií vektorov uhlových rýchlostí dostaneme nasledujúce priemetové (skalárne) rovnice:

A: $\omega_{21} r_2 = \omega_{31} r_3$ (d)

B: $\omega_{51} r_5 = \omega_{43} r_4 + \omega_{31} r_5$ (e)

C: $\omega_{61} r_6 = -\omega_{43} r_4 + \omega_{31} r_6$ (f)

z ktorých, ak platí rovnosť polomerov $r_5 = r_6$, dostaneme

$$\omega_{31} = \omega_{21} \frac{r_2}{r_3} \qquad \text{(g)}$$

$$\omega_{51} + \omega_{61} = 2\,\omega_{21} \frac{r_2}{r_3} \qquad \text{(h)}$$

a) Pri jazde vozidla po priamej dráhe musí byť splnená podmienka $\omega_{51} = \omega_{61} = \omega$. Podľa (h) potom platí

$$\omega = \omega_{21} \frac{r_2}{r_3} \qquad \text{(i)}$$

Prevod p_{25}, resp. p_{26} bude

$$p_{25} = p_{26} = \frac{\omega}{\omega_{21}} = \frac{r_2}{r_3}$$

b) Vo všeobecnom prípade (jazda po zakrivenej dráhe) platí $\omega_{51} \neq \omega_{61}$, resp. $\omega_{51} = k\,\omega_{61}$, pričom konštanta k je určená polomerom jazdnej dráhy a vzdialenosťou medzi kolesami auta na osiach 5 a 6.

1.2 JEDNODUCHÉ SÚSTAVY TELIES.

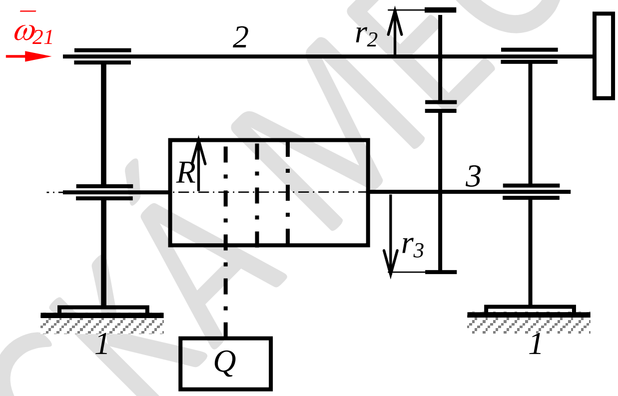
K mechanizmom s konštantným prevodom patria tiež jednoduché sústavy telies, ako sú remeňové, lanové a reťazové prevody, kladkostroje, jednoduché zdvíhacie zariadenia a tiež niektoré zvláštne prípady kĺbových mechanizmov (napr. kĺbový paralelogram, Oldhamová spojka). Veľkú časť z nich je možné označiť spoločným názvom *mechanizmy s ohybnými členmi*.

Pri kinematickom riešení ohybné členy (laná, remene, reťaze) považujeme za dokonale ohybné a nepredĺžiteľné. V tomto prípade je výhodné použiť graficko-analytické riešenie.

Príklad 1.9: Bremeno Q je zavesené na lane, navinutom na bubon polomeru R = 15 cm. Bremeno má byť po dobu 5 sekúnd dvíhané konštantným zrýchlením $a_0 = 0{,}2\pi$ m.s^{-2}. Určte, koľko otočení vykoná za ten čas hnací hriadeľ *2*, ak je začiatočná rýchlosť bremena $v_0 = 0{,}1\pi$ m.s^{-1} a polomery kolies sú r_2 = 10 cm, r_3 = 20 cm.

Dané: $a_0 = 0{,}2\pi$ m.s^{-2}, $v_0 = 0{,}1\pi$ m.s^{-1}, R = 15 cm, r_2 = 10 cm, r_3 = 20 cm

Hľadané: $N_{21(t=5)} = ?$



Obr. 1.16

Riešenie: V zdvíhacom mechanizme na *obr. 1.16* je hnací účinok prenášaný cez kombinovaný prevodový mechanizmus tvorený dvoma čelnými ozubenými kolesami a lanovým prevodom. Prevodové pomery medzi jednotlivými členmi mechanizmu riešime postupne. Metódu riešenia volíme s ohľadom na typ prevodu.

1. *Vypočet okamžitej rýchlosti bodu B na obvode navíjacieho bubna v čase t* = 5s.

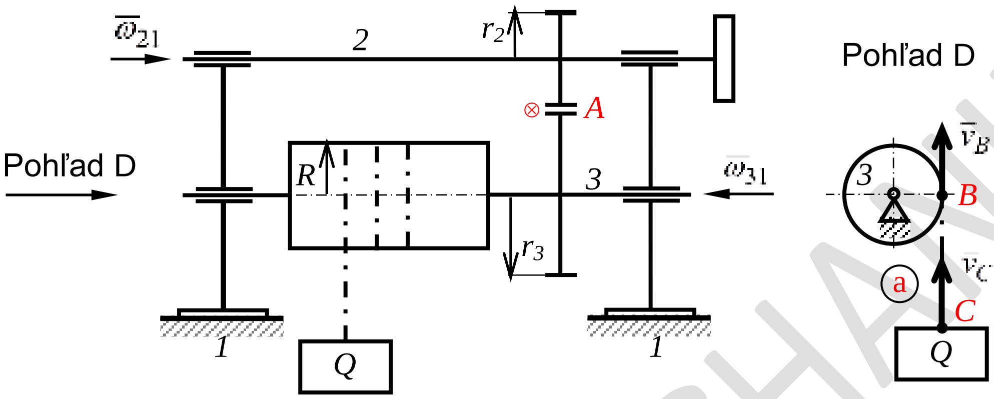
➢ Určíme prevodový pomer v ozubenom prevode medzi hnacím a hnaným hriadeľom p_{23}. Z *podmienky valenia v bode A* (*obr. 1.17*) vyplýva:

A: $\bar{v}_{A21} = \bar{v}_{A31}$

A: $r_2\,\omega_{21} = r_3\,\omega_{31}$

$$p_{23} = \frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = \frac{r_2}{r_3} = \frac{10[\mathrm{cm}]}{20[\mathrm{cm}]} = \frac{1}{2}$$

➢ Pri určovaní prevodového pomeru v lanovom prevode vychádzame z predpokladu, že rýchlosť lana je v bodoch *B* a *C* rovnaká a rovná sa rýchlostiam príslušných bodov bubna *3* a zdvíhaného bremena *Q* (*obr. 1.17* – Pohľad D). Kinematické veličiny jednotlivých pohyblivých členov nakreslíme do obrázku kinematickej schémy. Orientácie vektorov rýchlostí, ako aj zmysel otáčania predpokladáme podľa skutočnosti.



Obr. 1.17

Z hľadiska prevodových pomerov pre koncové body vnútornej väzby lanom „**a**" platí:

a: $\bar{v}_C = \bar{v}_B$, a zároveň platí $\bar{a}_C = \bar{a}_{tB}$

potom $a_C = a_{tB} = a_0 = 0{,}2\pi$ m.s^{-2} a pre pohyb bodu *B* po kružnici s polomerom *R* platí:

$$a_0 = a_{tB} = \frac{dv}{dt} = \text{konšt.}$$

$$a_0 \int_0^t dt = \int_{v_0}^{v} dv$$

$$a_0 t = v - v_0$$

$$v = v_0 + a_o t$$ Rovnica rýchlosti bodu *B*

V čase $t = 5$s :

$$v_5 = 0{,}1\pi + 0{,}25\pi.5$$

$$\underline{\underline{v_5 = 1{,}1\pi}}$$

2. *Výpočet počtu otočení hriadeľa 3 (resp. navíjacieho bubna) z celkovej dráhy s_5, ktorú bod B prešiel za čas t* = 5s.

$$a_0 = \frac{v dv}{ds} = \text{konšt.}$$

$$a_0 \int_0^{s_5} ds = \int_{v_0}^{v_5} v\, dv \,,$$ kde dráha bodu *B* je $s_5 = 2\pi R N_{31}$

$$a_0\, 2\pi R N_{31} = \frac{v_5^2 - v_0{}^2}{2}$$

$$N_{31} = \frac{v_5^2 - v_0{}^2}{4\pi R a_0}$$

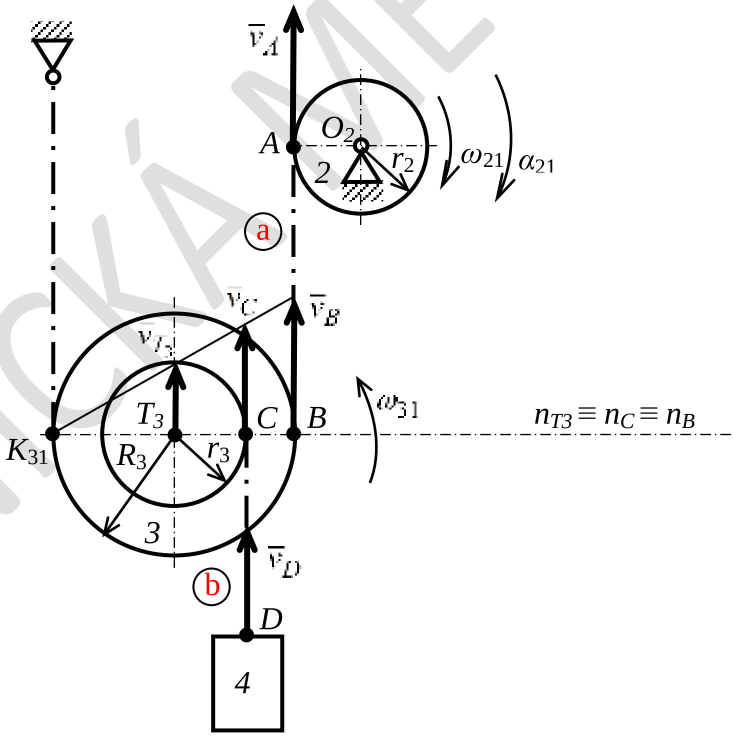
$$N_{31} = \frac{(1{,}1\pi)^2 - (0{,}1\pi)^2}{4\pi\ 0{,}15.0{,}2\pi} = \underline{10{,}1\overline{66}}$$

Z prevodového pomeru $p_{23} = \frac{1}{2} = \frac{N_{31}}{N_{21}}$ vyplýva, že hnací hriadeľ *2* vykoná 2 x N_{31} otočení

t.j. $N_{21} \doteq 20$ otočení.

Príklad 1.10: Jednoduché zdvíhacie zariadenie na *obr. 1.18* je tvorené navíjacím bubnom *2*, ktorý sa otáča s konštantným uhlovým zrýchlením α_{21}, a voľnou kladkou *3*. Určte rýchlosť zdvihu a zrýchlenie bremena *4* v danej okamžitej polohe, ak veľkosť uhlovej rýchlosti ω_{21} a uhlového zrýchlenia α_{21} bubna *2* v danom okamihu poznáme.

Dané: ω_{21}, α_{21}, r_2, r_3, R_3
Hľadané: v_4, a_4



Obr. 1.18

Riešenie: Závislosť kinematických veličín jednotlivých členov zdvíhacieho zariadenia je určená vzájomnými prevodovými pomermi. *Väzbové podmienky* resp. *prevodové pomery* určíme pomocou závislostí rýchlostí pohyblivých členov mechanickej sústavy. V prípade kinematickej analýzy lanových prevodov je vhodné úlohu riešiť *graficko-analytickým spôsobom*, kde vzťahy pre výpočet kinematických veličín odvodíme z náčrtu „*poľa* *rýchlostí"*, resp. *grafického riešenia rýchlostí* (*obr. 1.18*). Pre ďalšie riešenie je dôležité správne určiť pohyb jednotlivých členov danej sústavy vzhľadom na rám:

Teleso 2: rotačný pohyb (RT) okolo stálej osi rotácie ($O_2 \equiv K_{21}$).
Teleso 3: všeobecný rovinný pohyb (VRP). V danom okamihu sa teleso vzhľadom na rám otáča okolo okamžitého stredu otáčania K_{31}.
Teleso 4: translačný pohyb (TP).

Poznámka: *Polohu okamžitého stredu otáčania K určujeme na základe indícií:*
1) - pól pohybu,
2) - bod telesa, ktorý má v danom okamihu nulovú rýchlosť,
3) - je to miesto, ktorom je teleso vonkajšou väzbou viazané (spojené) s rámom.

Jednotlivé členy sústavy telies sú navzájom viazané vnútornými väzbami lanom. Označme ich „**a**" a „**b**". Ďalej označme ich koncové body (*A, B, C, D*) a ďalšie významné body pohyblivých členov (T_3 - stred, resp. ťažisko kladky *3*). K označeným bodom v obrázku mechanizmu nakreslíme vektory ich okamžitých rýchlostí. Smer a orientáciu vektorov rýchlostí, ako aj zmysel pohybu jednotlivých telies predpokladáme *podľa skutočnosti*. Pri výpočte vychádzame z *obr. 1.18.*

Väzbové podmienky

➢ Pre rýchlosti koncových bodov väzby lanom „**a**" a zároveň bod *A* telesa *2* a bod *B* telesa *3* platí:

a: $\bar{v}_A = \bar{v}_B$

a: $$\omega_{21}\, r_2 = \omega_{31}\, 2R_3 \qquad \text{(a)}$$

Z (a) odvodíme vzťahy pre výpočet okamžitej uhlovej rýchlosti a analogicky aj uhlového zrýchlenia rotačnej zložky pohybu voľnej kladky *3*:

$$\omega_{31} = \omega_{21} \frac{r_2}{2R_3}$$

$$\alpha_{31} = \alpha_{21} \frac{r_2}{2R_3}$$

Pre posuvnú zložku pohybu kladky 3 charakterizovanú pohybom jej ťažiska T_3 platí:

$$v_{T_3} = \omega_{31} R_3 = \omega_{21} \frac{r_2}{2R_3} R_3 = \omega_{21} \frac{r_2}{2}$$

$$a_{T_3} = a_{tT_3} = \alpha_{31} R_3 = \alpha_{21} \frac{r_2}{2}$$

➢ Pre rýchlosti koncových bodov väzby lanom „**b**" a zároveň bod *C* telesa *3* a bod *D* telesa *4* platí:

b: $\bar{v}_C = \bar{v}_D$

b: $$\omega_{31}(r_3 + R_3) = v_4 \qquad \text{(b)}$$

Z (b) odvodíme vzťahy pre výpočet okamžitej rýchlosti a analogicky aj zrýchlenia zdvihu bremena 4:

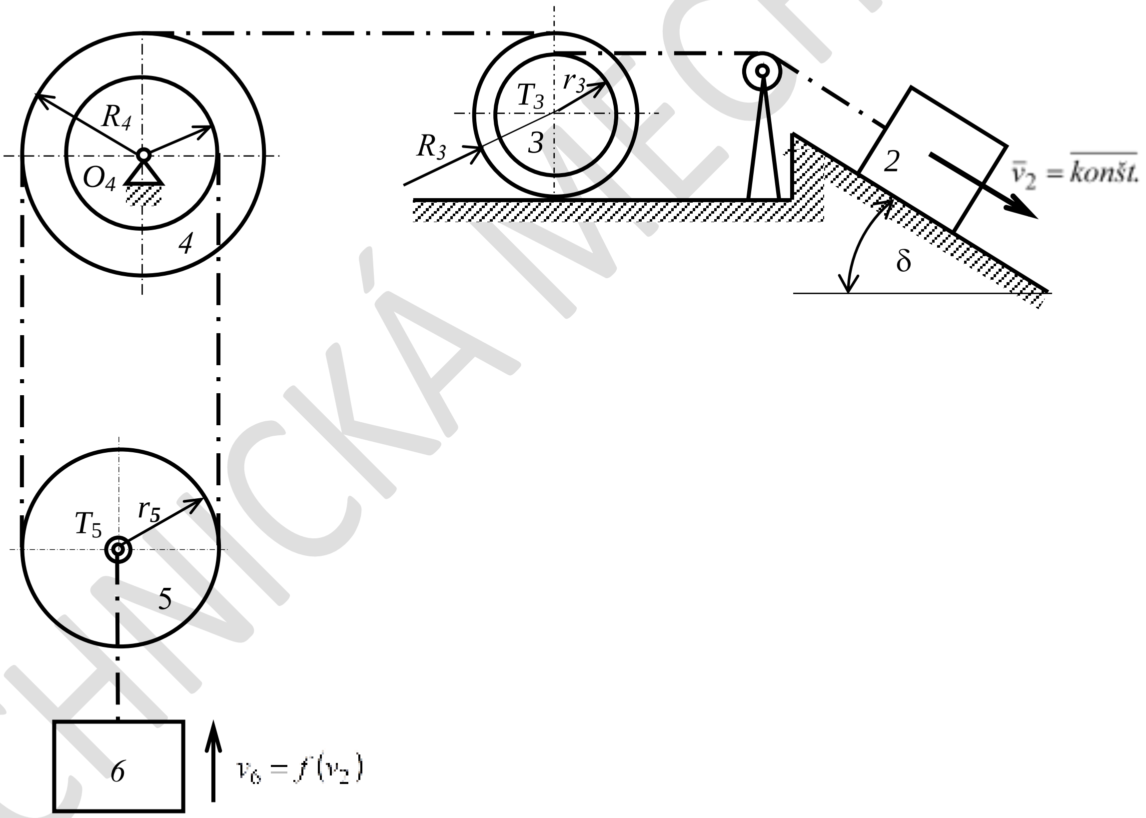
$$v_4 = \omega_{21} \frac{r_2}{2R_3}(r_3 + R_3)$$

$$a_4 = \alpha_{21} \frac{r_2}{2R_3}(r_3 + R_3)$$

Príklad 1.11: Rovnomerný pohyb bremena *6* je ovládaný zdvíhacím mechanizmom na *obr. 1.19*. Voľná kladka *5* je zavesená na lane, ktoré je navinuté na dvojitej pevnej kladke *4*. Koniec tohto lana je navinutý a upevnený na väčšom priemere navíjacieho bubna *3* uloženého voľne na podložke. Pohyb telesa *3* je ovládaný pohybom hranola *2* na naklonenej rovine. Určte závislosť rýchlosti zdvihu bremena *6* na rýchlosti pohybu telesa 2.

Dané hodnoty: r_3, R_3 r_4, $R_4 = 1{,}5r_4$, r_5, δ, $\bar{v}_2 = \overline{konšt.}$

Hľadané hodnoty: $v_6 = f(v_2)$



Obr. 1.19

Riešenie: Zdvíhací mechanizmus na *obr. 1.19* predstavuje 6-člennú rovinnú pohyblivú sústavu telies s jedným stupňom voľnosti. Sústava má 5 pohyblivých členov. Číslom 1 označíme pevný rám. Prevody kinematických veličín danej mechanickej sústavy sú konštantné a jednotlivé členy vykonávajú rovinné pohyby. Úlohu budeme riešiť graficko-analytickou metódou.

Rozbor pohybu jednotlivých pohyblivých členov mechanickej sústavy:

Teleso 2: translačný pohyb (TP)

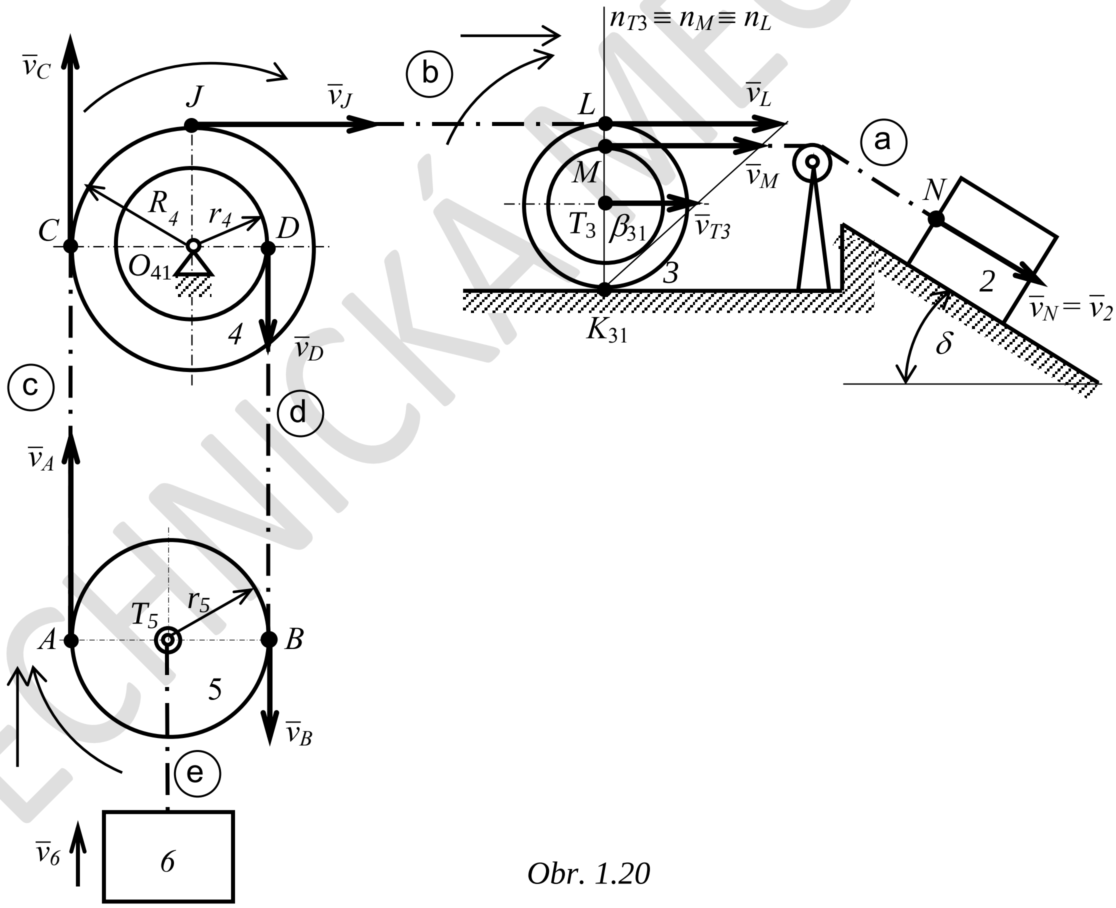
Teleso 3: všeobecný rovinný pohyb (VRP). V danom okamihu sa teleso vzhľadom na rám otáča okolo okamžitého stredu otáčania K_{31}.

Teleso 4: rotačný pohyb (RT) okolo stálej osi rotácie ($O_{41} \equiv K_{41}$).

Teleso 5: všeobecný rovinný pohyb (VRP). V danom okamihu sa teleso vzhľadom na rám otáča okolo okamžitého stredu otáčania K_{51}.

Teleso 6: translačný pohyb (TP)

Jednotlivé členy sústavy telies sú navzájom viazané vnútornými väzbami lanom. Označme ich **a**, **b**, **c**, **d**, **e** - *obr. 1.20*. Ďalej označíme ich koncové body ***A*** ÷ ***N*** a ďalšie významné body pohyblivých členov (***T*₃, *T*₅**). K označeným bodom nakreslíme vektory ich rýchlostí. Okamžité stredy otáčania, smer a orientáciu vektorov rýchlostí, ako aj zmysel pohybu jednotlivých telies predpokladáme podľa skutočnosti. Pri výpočte vychádzame z *obr. 1.20* a *1.21*.



Obr. 1.20

➢ Pre vnútornú väzbu lanom „**a**“ platí: ak lano je objektom, ktorý koná pohyb posuvný, všetky jeho body majú v danom okamihu rovnaké rýchlosti. Potom pre koncové body lana *N* a *M* a zároveň bod *N* telesa 2 a bod *M* telesa 3 platí:

a: $\bar{v}_N = \bar{v}_M$

a: $v_2 = \omega_{31}(R_3 + r_3)$ (a)

kde v_2 je rýchlosť posuvného pohybu telesa *2* a $v_M = \omega_{31}(R_3 + r_3)$ je okamžitá rýchlosť bodu *M*, ktorý sa v danom okamihu otáča spolu s telesom *3* okolo jeho okamžitého stredu otáčania K_{31}. Okamžitý stred otáčania leží v mieste vonkajšej väzby opretím telesa *3* vzhľadom na rám. Úpravou (a) dostaneme uhlovú rýchlosť telesa *3* v danom okamihu

$$\omega_{31} = \frac{v_2}{(R_3 + r_3)}$$

Pre posuvnú zložku pohybu valca *3* charakterizovanú pohybom jeho ťažiska T_3 platí:

$$v_{T3} = \omega_{31} R_3$$

$$v_{T3} = v_2 \frac{R_3}{(R_3 + r_3)}$$

- Pre väzbu lanom „**b**“ platí:

b: $\bar{v}_L = \bar{v}_J$

b: $\omega_{31} 2R_3 = \omega_{41} R_4$ (b)

z (b) $\Rightarrow$ $\omega_{41} = \omega_{31} \dfrac{2R_3}{R_4}$

$$\omega_{41} = v_2 \frac{2R_3}{R_4(R_3 + r_3)}$$

V prípade voľnej kladky *4* neexistuje priama vonkajšia väzba telesa k rámu. Okamžitý stred otáčania K_{51} preto nevieme určiť na základe indícií uvedených v *príklade 1.10*. Vzťahy potrebné pre určenie K_{51} odvodíme z geometrie obrázku – *obr. 1.21*.

- Pre väzby lanom „**c**“ a „**d**“ platí:

$$\left.\begin{array}{ll} \textbf{c:} & \bar{v}_C = \bar{v}_A \\ \textbf{c:} & \omega_4 R_4 = \omega_{51} \cdot ? \quad \text{(c)} \\ \textbf{d:} & \bar{v}_D = \bar{v}_B \\ \textbf{d:} & \omega_4 r_4 = \omega_{51} \cdot ? \quad \text{(d)} \end{array}\right\} \boldsymbol{K_{51} = ?}$$

Ak platí: $\begin{array}{l} v_A = v_C = \omega_{41} R_4 \\ v_B = v_D = \omega_{41} r_4 \end{array}$; potom $v_A \rangle v_B$.

Vektory rýchlostí $\bar{v}_A, \bar{v}_B$ nakreslíme k bodom *A* a *B* – *obr. 1.21*.

Ďalej uvažujeme následovne:

- Platí: Okamžitý stred otáčania telesa konajúceho všeobecný rovinný pohyb leží v priesečníku normál k dráham všetkých jeho bodov.

- Ak sa teleso *5* v danom okamihu otáča okolo K_{51}, všetky jeho body sa pohybujú po kružniciach so stredom v K_{51}. Okamžitý stred otáčania K_{51} leží potom v priesečníku normál k dráham všetkých bodov telesa *5*.
- Poznáme normály k dráham bodov *A, B* a T_5. Pretože v tomto prípade ide o totožné priamky $n_A \equiv n_{T5} \equiv n_B$, ich priesečník nevieme nájsť.
- Pre teleso *5* platí tiež *Veta o zorných uhloch*: Z okamžitého stredu otáčania K_{51} vidíme rýchlosti všetkých bodov telesa *5* (aj bodov *A*, *B*, T_5) pod tým istým zorným uhlom β_{51}. K_{51} leží potom v priesečníku spoločnej normály a spojnice koncových bodov vektorov rýchlosti bodov *A* a *B*.
- Z náčrtu vektorov rýchlostí na *obr. 1.21* vyplýva

$$\boxed{\omega_{51} = tg\,\beta_{51} = \frac{\left|\bar{v}_{T_5}\right|}{x_5} = \frac{\left|\bar{v}_A\right|}{r_5 + x_5} = \frac{\left|\bar{v}_B\right|}{r_5 - x_5}\ ,}$$

odkiaľ vyberieme $\dfrac{v_A}{r_5 + x_5} = \dfrac{v_B}{r_5 - x_5}$

$$\frac{\omega_4 R_4}{r_5 + x_5} = \frac{\omega_4 r_4}{r_5 - x_5} \qquad /\cdot \frac{(r_5 + x_5)(r_5 - x_5)}{\omega_4}$$

$$R_4 (r_5 - x_5) = r_4 (r_5 + x_5)$$

$$R_4 r_5 - R_4 x_5 = r_4 r_5 + r_4 x_5$$

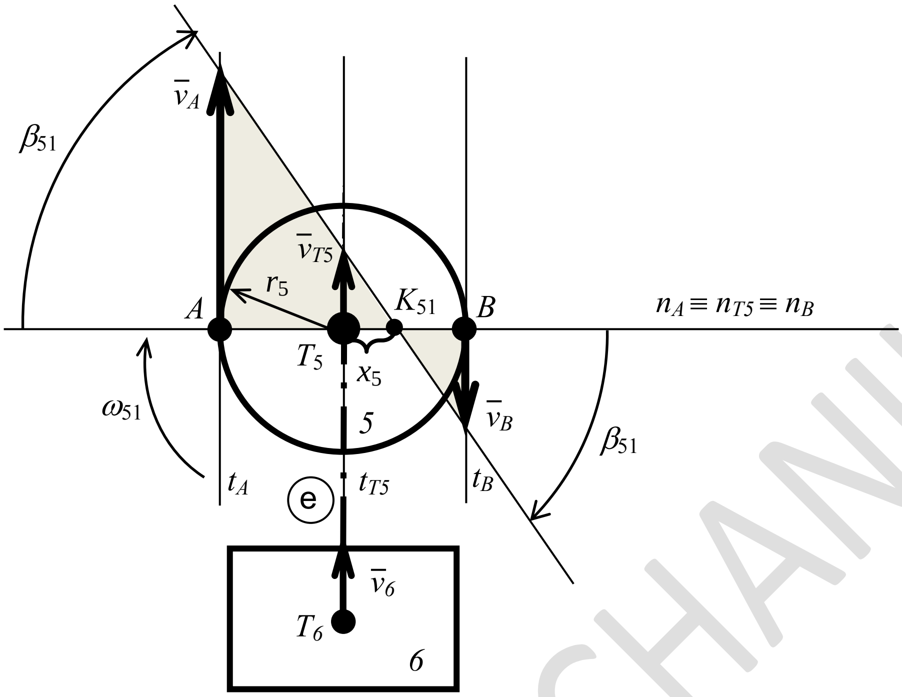
$$R_4 x_5 + r_4 x_5 = R_4 r_5 - r_4 r_5$$

$$x_5 (R_4 + r_4) = r_5 (R_4 - r_4)$$

$$x_5 = \frac{r_5 (R_4 - r_4)}{(R_4 + r_4)} = \frac{r_5 (1{,}5 r_4 - r_4)}{(1{,}5 r_4 + r_4)}$$

$$\underline{\underline{x_5 = 0{,}2\, r_5}}$$

kde x_5 je vzdialenosť jedného z bodov *A,* B alebo T_5 a K_{51} (tu $x_5 = \overline{K_{51}\, T_5}$).



Obr. 1.21

Uhlovú rýchlosť ω_{51} a rýchlosť $\bar{v}_{T_5}$ ťažiska telesa *5* v danom okamihu odvodíme doplnením a úpravou vzťahu (c) alebo (d):

c: $$\omega_{41} R_4 = \omega_{51}(r_5 + x_5) \qquad \text{(c)}$$

$$\omega_{41} R_4 = \omega_{51}(r_5 + 0{,}2 r_5) = \omega_{51} 1{,}2 r_5$$

$\Rightarrow$ $$\omega_{51} = \omega_{41} \frac{R_4}{1{,}2 r_5}$$

$$\omega_{51} = v_2 \frac{2 R_3 R_4}{1{,}2 r_5 R_4 (R_3 + r_3)}$$

$$v_{T5} = \omega_{51} x_5 = v_2 \frac{2 R_3 R_4}{1{,}2 r_5 R_4 (R_3 + r_3)} 1{,}2 r_5$$

$$v_{T5} = v_2 \frac{2 R_3 R_4}{R_4 (R_3 + r_3)}$$

- Pre väzbu lanom „**e**“ (*obr. 1.21*) platí:

e: $\bar{v}_6 = \bar{v}_{T_5}$

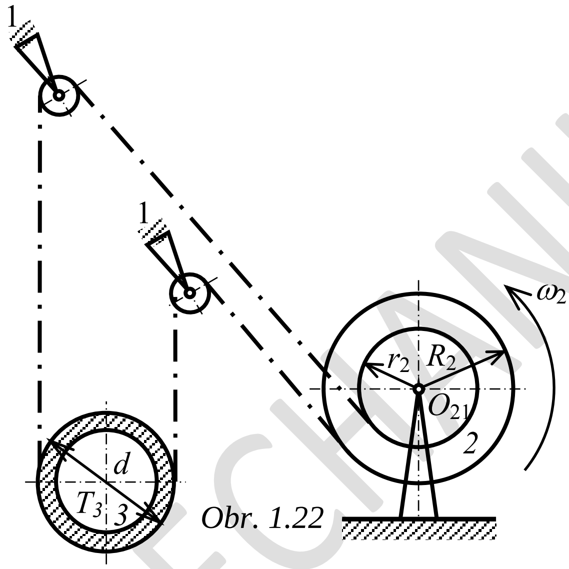
Závislosť rýchlosti zdvihu bremena 6 na rýchlosti pohybu telesa 2 je

$$v_6 = v_2 \frac{2 R_3 R_4}{R_4 (R_3 + r_3)}$$

Príklad 1.12: Zdvíhacím zariadením znázorneným na *obr. 1.22* je zdvíhaný valcový odliatok *3* s vonkajším priemerom *d*. Bubon *2* polomerov r_2, R_2 sa otáča okolo osi O_{21} konštantnou uhlovou rýchlosťou ω_{21} v naznačenom zmysle. Určte uhlovú rýchlosť ω_{31} a rýchlosť zdvihu v_{T3} valcového odliatku *3*

Dané hodnoty: d = 0,6 m,
$r_2 = 1{,}5d$,
$R_2 = 2d$,
ω_{21} = 0,8 rad.s^{-1}.

Hľadané hodnoty: ω_{31}, v_{T3}



Obr. 1.22

Riešenie: *Rozbor pohybu jednotlivých pohyblivých členov sústavy telies*:

Teleso 2: rotačný pohyb (RT) okolo stálej osi rotácie ($O_{21} \equiv K_{21}$).
Teleso 3: všeobecný rovinný pohyb (VRP). V danom okamihu sa teleso vzhľadom na rám otáča okolo okamžitého stredu otáčania K_{31}.

Telesá 2 a 3 sú navzájom viazané vnútornými väzbami lanom. Označme ich „**a**“ a **„b**“. Ďalej označme ich koncové body a ťažisko T_3, ktorého pohyb charakterizuje zdvih telesa 3. K označeným bodom nakreslíme (stačí naškicovať) vektory ich rýchlostí. Smer a orientáciu vektorov rýchlostí, ako aj zmysel pohybu jednotlivých telies predpokladáme podľa skutočnosti. Okamžitý stred otáčania K_{31} telesa *3* nájdeme pomocou *Vety o zorných uhloch.* Vychádzame z geometrie obrázku - *obr.1.23.*

- Pre väzby lanom „**a**“ a „**b**“ platí:

a: $\bar{v}_A = \bar{v}_D$

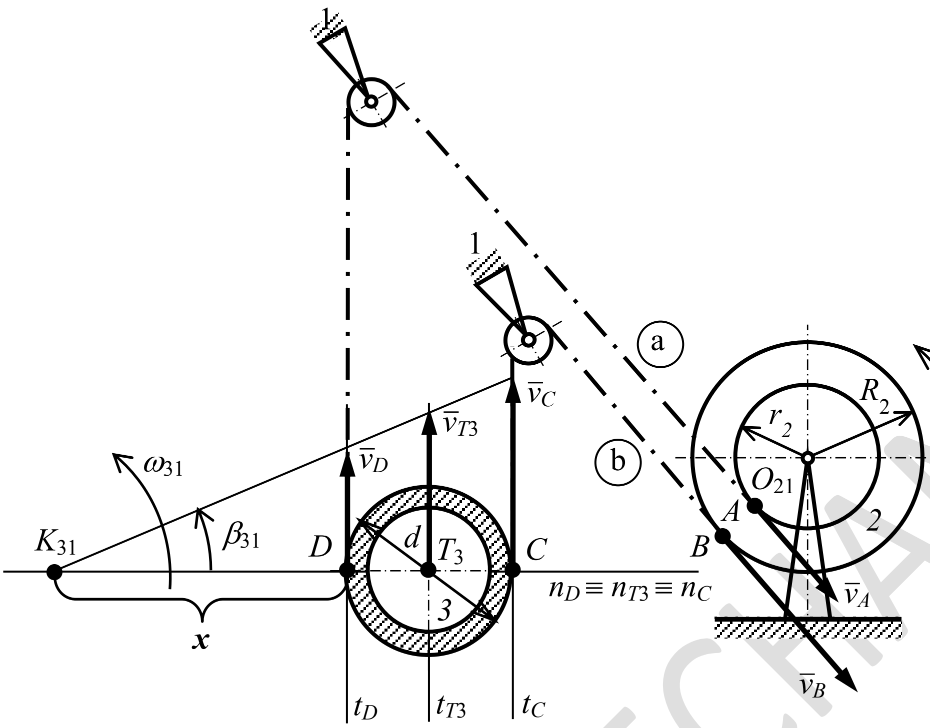
a: $\omega_{21} r_2 = \omega_{31} \cdot ?$ (a)

b: $\bar{v}_B = \bar{v}_C$

b: $\omega_{21} R_2 = \omega_{31} \cdot ?$ (b)

$\boldsymbol{K_{31} = ?}$

Ak platí: $v_A = v_D = \omega_{21} r_2$; $v_B = v_C = \omega_{21} R_2$; potom $v_C \rangle v_D$.



Obr. 1.23

Vzťahy pre ďalšie riešenie odvodíme z *náčrtu vektorov rýchlostí* (*obr. 1.23*).

$$\boxed{\omega_{31} = tg\,\beta_{31} = \frac{|\bar{v}_{T_3}|}{x + \frac{d}{2}} = \frac{|\bar{v}_D|}{x} = \frac{|\bar{v}_C|}{x+d},} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{|\bar{v}_D|}{x} = \frac{|\bar{v}_C|}{x+d}$$

$$\frac{\omega_{21} r_2}{x} = \frac{\omega_{21} R_2}{x+d} \qquad /\cdot \frac{x(x+d)}{\omega_{21}}$$

$$r_2 (x+d) = R_2\, x$$

$$x(R_2 - r_2) = r_2\, d$$

$$x(2d - 1{,}5d) = 1{,}5d^2$$

$$x = 3d$$

$$\underline{x = 1{,}8\ \mathrm{m}}$$

Uhlovú rýchlosť ω_{31} a rýchlosť v_{T3} ťažiska T_3 telesa *3* odvodíme po doplnení a úprave vzťahu (a) alebo (b):

a: $\omega_{21} r_2 = \omega_{31} x$ (a)

$$\Rightarrow \qquad \omega_{31} = \omega_{21}\frac{r_2}{x} = \omega_{21}\frac{1{,}5d}{3d}$$

$$\underline{\omega_{31} = 0{,}5\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}}$$

$$v_{T3} = \omega_{31}\left(x + \frac{d}{2}\right)$$

$$v_{T3} = \omega_{31}\left(3d + \frac{d}{2}\right)$$

$$\underline{v_{T3} = 1{,}05\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$$

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

[1] ŠMERINGAIOVÁ, A. – GAŠPÁR, Š.: *Technická mechanika II. Návody na cvičenia*. FVT TUKE so sídlom v Prešove. 2013, 75 s. ISBN 978-80-553-1583-6.

[2] PAŠKO, J. – ŠMERINGAIOVÁ, A.: *Technická mechanika I.* Prešov: FVT TU v Košiciach so sídlom v Prešove. 2012, 184 s., ISBN 978-80-553-0891-3.