4 DYNAMIKA SÚSTAV TELIES

Strojové zariadenia, s ktorými sa v praxi stretávame, je možné považovať za *mechanické sústavy* rôzneho stupňa zložitosti. Úlohou dynamiky je popísať dynamické vlastnosti alebo tiež charakteristiky vyšetrovanej mechanickej sústavy. Základom pre úspešné riešenie problémov dynamiky je zostavenie vhodného *dynamického modelu* popisujúceho *mechanickú sústavu*, z ktorého vyplývajú parametre potrebné pre nájdenie neznámych veličín. K takýmto parametrom patria napr.: údaje o silových, hmotnostných a kinematických veličinách, ako aj prenos silových a kinematických veličín medzi telesami navzájom.

Na základe dynamického modelu zostavujeme pohybové rovnice, ktoré tvoria *matematický model dynamickej sústavy*. Ich riešením dostaneme hľadané veličiny, ktoré spolu s danými vstupnými veličinami charakterizujú *dynamický stav* posudzovanej sústavy. Pri zostavovaní a riešení pohybových rovníc je obvykle potrebné zaviesť určité zjednodušujúce predpoklady, ktoré sú volené tak, aby čo najmenej ovplyvnili presnosť riešenia.

Pri riešení problémov dynamiky existujú dva typy úloh:

- *Zo známych síl je potrebné stanoviť pohyb sústavy.*
  Pohyb dynamickej sústavy je vyšetrovaný na základe známych akčných silových účinkov. Patrí tu vyšetrovanie rozbehu a dobehu strojov, nerovnomernosti chodu strojov a hľadanie možností znižovania nerovnomernosti chodu strojov.
- *Pre požadovaný pohyb je potrebné určiť silové účinky potrebné na jeho vyvodenie a udržanie.*

Pohybové rovnice mechanickej sústavy môžeme určiť nasledujúcimi metódami:

- *Metóda postupného uvoľňovania.*
- *Princíp virtuálnych prác.*
- *Lagrangeove rovnice II. druhu.*
- *Metóda redukcie hmotnostných a silových veličín.*

METÓDA POSTUPNÉHO UVOĽŇOVANIA

Tak ako v statike, aj v dynamike je metóda uvoľňovania jednotlivých telies základnou a tiež najuniverzálnejšou metódou dynamického výpočtu. Uvedenou metódou meníme úlohu o skúmaní pohybu mechanickej sústavy na skúmanie pohybu jej jednotlivých telies. Na rozdiel od statiky, namiesto statických podmienok rovnováhy riešime *pohybové rovnice pre posuvný a rotačný pohyb* jednotlivých telies.

Pohybové rovnice zostavujeme obvykle *metódou zrýchľujúcich síl*. Ak použijeme d'Alembertov princíp, riešime tzv. „*rovnice dynamickej rovnováhy*“ zostavené *metódou zotrvačných síl*, v ktorých sú zahrnuté tiež zotrvačné sily a momenty. Metóda je vhodná pre všetky druhy mechanických sústav, dokonca i pre tie, u ktorých je do dynamického modelu zahrnuté trenie. S výhodou je možné použiť túto metódu pri vyšetrovaní sústav, kde chceme poznať väzbové silové účinky.

Princíp metódy postupného uvoľňovania

Pri vlastnom riešení postupujeme tak, že jednotlivé telesá uvoľníme vo všeobecnom časovom okamihu. Uvoľnené telesá sa potom pohybujú ako telesá, na ktoré pôsobia nielen príslušné vonkajšie (akčné) sily, ale aj reakcie (reakčné sily vo väzbách) od ostatných telies, či rámu, s ktorými bolo teleso viazané kinematickými dvojicami.

Počet stupňov voľnosti pohybu vyšetrovanej sústavy je daný počtom nezávislých súradníc – tzv. *zovšeobecnených súradníc* q_i. Ide o súradnice, jednoznačne určujúce polohu vyšetrovanej sústavy. Môžu nimi byť súradnice dĺžkové ($q_i = x_i$) ako i uhlové ($q_i = \varphi_i$), pričom $i = 1,....,n$ je počet stupňov voľnosti pohybu sústavy. Všetky ostatné (pomocné) súradnice sú už *závislé na zvolených zovšeobecnených súradniciach* a prípadne tiež na čase t.

Sústavy s jedným stupňom voľnosti majú vždy iba *jednu nezávislú súradnicu* q. Okamžitá poloha jednotlivých telies je určená *polohovými vektormi* $\bar{r}_j$ ich bodov, ktoré môžeme vyjadriť v závislosti na zovšeobecnenej súradnici a čase.

$$\bar{r}_j = \bar{r}_j(q,t) \tag{4.1}$$

Deriváciou zovšeobecnených súradníc podľa času vypočítame hľadané rýchlosti a zrýchlenia

$$\dot{\bar{r}}_j = \dot{\bar{r}}_j(q,\dot{q},t) \tag{4.2}$$

$$\ddot{\bar{r}}_j = \ddot{\bar{r}}_j(q,\dot{q},\ddot{q},t) \tag{4.3}$$

Uvažujme pohyblivú rovinnú sústavu telies konajúcich posuvný, rotačný alebo všeobecný rovinný pohyb. Pohyb každého j-teho uvoľneného telesa, na ktoré pôsobí „k“ síl a momentov popíšeme pohybovými rovnicami pre posuvný a rotačný pohyb. V prípade všeobecného rovinného pohybu (VRP) rozložíme výsledný pohyb telesa na posuvný pohyb jeho ťažiska a rotačný pohyb telesa okolo osi rotácie prechádzajúcej jeho ťažiskom. Pohybové rovnice doplníme kinematickými závislosťami (väzbové podmienky) a závislosťami zo statiky (statické podmienky rovnováhy, vzťahy pre pasívne odpory).

Pre jednotlivé uvoľnené telesá zostavujeme pohybové rovnice *metódou zrýchľujúcich síl*:

$$\sum_j \sum_k \bar{F}_{jk} = \sum_j m_j \, \bar{a}_j$$ pre k síl pôsobiacich na j telies, (4.4)

$$\sum_j \sum_k \bar{M}_{jk} = \sum_j I_j \, \bar{\alpha}_j$$ pre k momentov pôsobiacich na j telies, (4.5)

alebo *metódou zotrvačných síl*:

$$\sum_j \sum_k \bar{F}_{jk} + \sum_j \bar{F}_{D_j} = \bar{0}$$ pre k síl pôsobiacich na j telies, (4.6)

$$\sum_j \sum_k \bar{M}_{jk} + \sum_j \bar{M}_{D_j} = \bar{0}$$ pre k momentov pôsobiacich na j telies. (4.7)

kde m_j - hmotnosť j-teho telesa (jeho ťažiska) konajúceho pohyb posuvný (VRP),

$\bar{a}_j$ - zrýchlenie j-teho telesa (jeho ťažiska) konajúceho pohyb posuvný (VRP),

I_j - moment zotrvačnosti j-teho telesa sústavy konajúceho rotačný pohyb k osi rotácie, resp. VRP k osi rotácie prechádzajúcej ťažiskom,

$\bar{\alpha}_j$ - uhlové zrýchlenie j-teho telesa sústavy konajúceho rotačný pohyb k osi rotácie, resp. VRP k osi rotácie prechádzajúcej ťažiskom,

$\bar{F}_{jk}$ - k-ta sila pôsobiaca na j-te teleso v smere posuvného pohybu,

$\bar{M}_{jk}$ - k-ty moment pôsobiaci na j-te teleso v smere rotačného pohybu,

$\bar{F}_{Dj}$ - zotrvačná sila pôsobiaca na j-te teleso konajúceho posuvný pohyb (VRP),

$\bar{M}_{Dj}$ - zotrvačný moment pôsobiaci na j-te teleso konajúce rotačný pohyb.

METÓDA REDUKCIE HMOTNOSTNÝCH A SILOVÝCH VELIČÍN

4.1.1 Princíp metódy redukcie hmotnostných a silových veličín

Ak je cieľom dynamickej analýzy len určenie pohybu mechanickej sústavy pri známych vonkajších silových účinkoch alebo naopak (reakcie vo väzbách nás nezaujímajú), môžeme použiť jednoduchšie riešenie metódou redukcie hmotnostných a silových veličín, pri ktorej zostavujeme len jednu pohybovú rovnicu.

Metóda redukcie hmotnostných a silových veličín je výhodná pre riešenie úloh dynamiky sústav telies s jedným stupňom voľnosti pohybu. Pohyb tejto mechanickej sústavy je možné vyjadriť pohybom mysleného člena, ktorý sa pohybuje zhodne so zvoleným *základným členom* sústavy, na ktorý redukujeme všetky zotrvačné účinky a všetky pracovné silové účinky. Za *základný člen* volíme obvykle hnací alebo hnaný člen, ktorý koná rotačný pohyb, alebo posuvný pohyb.

Vychádzame z *vety o zmene kinetickej energie* sústavy telies v tvare:

$$\frac{\mathrm{d}\,E_k}{\mathrm{d}\,t} = P^P \tag{4.8}$$

Časová zmena kinetickej energie sústavy je daná okamžitým výkonom pracovných síl.

Ďalej vychádzame z predpokladu, že *sústava telies je zvláštnym prípadom sústavy hmotných bodov*. Ak má sústava „*N*" hmotných bodov jeden stupeň voľnosti pohybu, je jej poloha jednoznačne určená jedinou *zovšeobecnenou súradnicou* q ($\dot{q}$ je príslušná rýchlosť, $\ddot{q}$ je príslušné zrýchlenie). Poloha j-tého hmotného bodu hmotnosti m_j je daná polohovým vektorom

$$\bar{r}_j = \bar{r}_j(q), \qquad j = 1, 2, \ldots\ldots, N \tag{4.9}$$

a bod má rýchlosť

$$\bar{v}_j = \frac{\mathrm{d}\bar{r}_j}{\mathrm{d}\,q}\dot{q}\,; \qquad v_j^2 = \bar{v}_j^2 = \left(\frac{\mathrm{d}\bar{r}_j}{\mathrm{d}\,q}\right)^2 \dot{q}^2 \tag{4.10}$$

Potom môžeme výraz pre *kinetickú energiu mechanickej sústavy* upraviť nasledovne

$$E_k = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} m_j v_j^2 = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{N} m_j \left(\frac{\mathrm{d}\bar{r}_j}{\mathrm{d}\,q}\right)^2\right]\dot{q}^2 \tag{4.11}$$

Výraz v hranatej zátvorke je len funkciou q. Ak ho označíme $M^*(q)$ a nazveme *zovšeobecnenou redukovanou hmotnosťou* mechanickej sústavy, potom

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} M^*(q)\, \dot{q}^2} \tag{4.12}$$

Deriváciou zloženej funkcie E_k podľa času (derivácia súčinu) dostávame

$$\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}M^*(q)}{\mathrm{d}t}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}M^*(q)\, 2\dot{q}\,\frac{\mathrm{d}\dot{q}}{\mathrm{d}t}$$

Rozšírením prvého sčítanca o zlomok $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}q}$ sa jeho hodnota nezmení

$$\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}M^*(q)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}q}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}M^*(q)\, 2\dot{q}\,\frac{\mathrm{d}\dot{q}}{\mathrm{d}t}$$

Úpravou dostávame

$$\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}M^*(q)}{\mathrm{d}q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\dot{q}^2 + M^*(q)\,\dot{q}\,\frac{\mathrm{d}\dot{q}}{\mathrm{d}t}$$

Derivácie podľa času je možné zapísať v tvare

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dot{q} \qquad ; \qquad \frac{\mathrm{d}\dot{q}}{\mathrm{d}t} = \ddot{q}$$

Potom rovnica (4.12) nadobúda tvar

$$\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}M^*(q)}{\mathrm{d}q}\dot{q}^2 + M^*(q)\,\ddot{q}\right)\dot{q} \tag{4.13}$$

Podobne *okamžitý výkon* pracovných síl pôsobiacich na jednotlivé členy mechanickej sústavy je možné vyjadriť v tvare

$$P^P = \sum_{j=1}^{N} \bar{F}_j^P\, \bar{v}_j = \sum_{j=1}^{N} \bar{F}_j^P \frac{\mathrm{d}\bar{r}_j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}q}$$

$$P^P = \left(\sum_{j=1}^{N} \bar{F}_j^P \frac{\mathrm{d}\bar{r}_j}{\mathrm{d}q}\right)\dot{q} \tag{4.14}$$

kde $\bar{r}_j$ sú polohové vektory pôsobísk pracovných síl $\bar{F}_j^P$,
$\bar{v}_j$ sú rýchlosti týchto pôsobísk.

Ak výraz v zátvorke označíme Q a nazveme *zovšeobecnená redukovaná sila*, potom

$$\boxed{P^P = Q\,\dot{q}} \tag{4.15}$$

Na základe uvedených rovníc (4.13) a (4.15) a po ich dosadení do rovnice (4.8)

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}M^*(q)}{\mathrm{d}q}\dot{q}^2 + M^*(q)\,\ddot{q}\right)\dot{q} = Q\,\dot{q} \qquad / \cdot \frac{1}{\dot{q}}$$

je možné vzťah pre *vlastnú pohybovú rovnicu sústavy s jedným stupňom voľnosti* pohybu zapísať v tvare:

$$\boxed{M^*\ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}M^*}{\mathrm{d}q}\dot{q}^2 = Q}, \tag{4.16}$$

kde M^* je zovšeobecnená redukovaná hmotnosť,
Q - zovšeobecnená redukovaná sila,
q - zovšeobecnená súradnica.

Rovnica (4.16) je základnou rovnicou *metódy redukcie hmotnostných a silových veličín*, ktorá vyjadruje závislosť zovšeobecnenej hmotnosti sústavy redukovanej na zovšeobecnenú súradnicu q a zovšeobecnenej sily danej redukciou pracovných síl na túto súradnicu.

Rovnica (4.16) má všeobecnú platnosť, pretože v praxi existujú sústavy, ktorých hmotnosť sa s prejdenou dráhou mení. Napríklad autá, rakety, lietadlá, pri ktorých dochádza k úbytku hmotnosti vplyvom spaľovania pohonných látok.

Pri sústavách, ktorých hmotnosť sa s prejdenou dráhou nemení, pre ktoré potom platí $M^*(q) = \overline{\text{konšt}}.$, je druhý člen rovnice (4.16) rovný nule

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}M^*}{\mathrm{d}q}\dot{q}^2 = 0$$

a pohybová rovnica sa potom zjednoduší na tvar:

$$\boxed{M^*\ddot{q} = Q} \tag{4.17}$$

Základný princíp riešenia dynamiky mechanických sústav metódou redukcie hmotnostných a silových veličín je možné definovať nasledovne:

Princíp metódy redukcie - *Pohyb mechanickej sústavy je vyjadrený pohybom mysleného člena, ktorý sa pohybuje zhodne so zvoleným základným členom sústavy, na ktorý redukujeme všetky zotrvačné účinky a všetky pracovné silové účinky.*

Zovšeobecnenú redukovanú hmotnosť M^* *určujeme z rovnosti kinetickej energie pôvodnej mechanickej sústavy a náhradného redukovaného člena,*

čo môžeme vyjadriť rovnicou:

$$\frac{1}{2}M^*\dot{q}^2 = \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}m_j v_j^2 \tag{4.18}$$

Zovšeobecnenú redukovanú silu *Q* *určujeme z rovnosti okamžitého výkonu pracovných síl pôsobiacich na sústavu a výkonu hľadanej zovšeobecnenej sily Q.*

$$Q\dot{q} = \sum_{j=1}^{N} \bar{F}_j^P \bar{v}_j \tag{4.19}$$

Zovšeobecnenú redukovanú silu Q môžeme určiť tiež z rovnosti elementárnych (virtuálnych) prác pracovných síl pôsobiacich na pôvodnú sústavu a elementárnej (virtuálnej) práce hľadanej zovšeobecnenej sily

$$Q\,\mathrm{d}q = \sum_j \bar{F}_j^P \mathrm{d}\bar{r}_j \tag{4.20}$$

resp.

$$Q\,\delta q = \sum_j \bar{F}_j^P \delta\bar{r}_j \tag{4.21}$$

🕮 Poznámka: *Namiesto elementárnych prác môžeme hovoriť o prácach virtuálnych, pretože v našom prípade je skutočný pohyb vždy jedným z možných pohybov. Pri všeobecnom riešení je nutné vychádzať z virtuálnych pohybov - rovnica* (4.21).

4.1.2 Aplikácia metódy redukcie pri riešení rovinných sústav telies

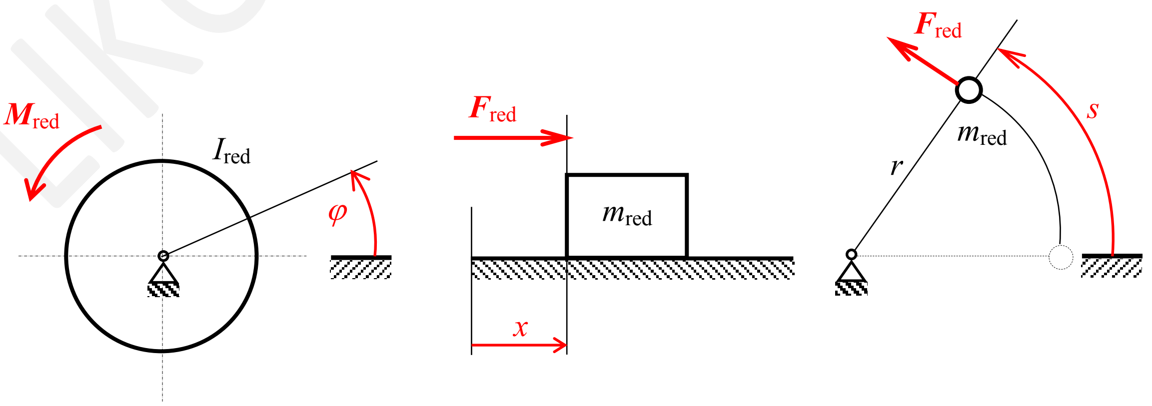
Metóda redukcie hmotnostných a silových veličín (MRHSV) je vhodná pre netlmené sústavy (*neuvažujeme vplyv pasívnych odporov*). Používa sa v prípade, keď chceme zistiť *len jeden kinematický alebo silový parameter*. Pomocou tejto metódy nie je možné vypočítať vnútorné silové účinky. Za redukovaný člen, t.j. člen. na ktorý redukujeme silové a hmotnostné účinky telies sústavy, volíme obvykle hnací člen sústavy, čo však nie je všeobecná podmienka.

Rovinnú sústavu telies tvoria telesá, ktoré môžu konať pohyb posuvný, rotačný alebo všeobecný rovinný. Zovšeobecnenou súradnicou môže byť potom *dĺžka* alebo *uhol*. Ak touto súradnicou označíme polohu posúvajúceho sa telesa, resp. posúvajúceho sa zvoleného hmotného bodu alebo rotujúceho telesa (*obr. 4.1*), hovoríme o redukcii na:

a) rotujúci kotúč,

b) posuvne pohybujúci sa člen (teleso, hmotný bod),

c) hmotný bod pohybujúci sa po kružnici.



a) *b)* *c)*

Obr. 4.1

V prípade *a)* má zovšeobecnená redukovaná hmotnosť M^* rozmer *momentu zotrvačnosti* (kg.m^2), zovšeobecnená redukovaná sila Q má rozmer *momentu* (N.m) a zovšeobecnená súradnica dráhy q je *uhol* φ (rad). Potom hovoríme o redukovanom momente zotrvačnosti a o redukovanom momente; označujeme ich $I_{\text{red}}, M_{\text{red}}$.

V prípade *b), c)* má M^* rozmer *hmotnosti* (kg); Q má rozmer *sily* (N) a q je (v prípade *b) posunutie* - x (m) a v prípade *c) dĺžka kruhového oblúka* - s(m). Potom hovoríme o redukovanej hmotnosti a redukovanej sile; označujeme $m_{\text{red}}, F_{\text{red}}$.

Pohybová rovnica v prípade *a)* má tvar

$$I_{\text{red}}\,\ddot{\varphi} = M_{\text{red}} \tag{4.22}$$

v prípade *b)* a *c)*:

$$m_{\text{red}}\,\ddot{x} = F_{\text{red}}; \qquad \text{resp.} \qquad m_{\text{red}}\,\ddot{s} = F_{\text{red}} \tag{4.23}$$

Princíp metódy redukcie - *celú pohybujúcu sa sústavu nahradíme jedným redukovaným útvarom a to rotačne uloženým kotúčom, alebo translačne uloženým telesom, alebo hmotným bodom pohybujúcim sa po kružnici* **s rovnakými dynamickými vlastnosťami ako pôvodná sústava**.

Za *dynamické vlastnosti* redukovaného telesa je možné považovať jeho *zovšeobecnenú hmotnosť* a tiež *zovšeobecnenú silu* pôsobiacu na toto teleso. Pri hľadaní zovšeobecnenej sily uvažujeme s tzv. *pracovnými* silami.

Vzhľadom na to, že rovinné sústavy telies tvoria telesá, ktoré môžu konať pohyb posuvný, rotačný alebo všeobecný rovinný, celkovú kinetickú energiu všetkých členov pôvodnej sústavy vyjadríme vzťahom:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_j \frac{1}{2} I_j \omega_j^2 + \sum_k \left(\frac{1}{2} m_k v_k^2 + \frac{1}{2} I_k \omega_k^2\right) \tag{4.24}$$

Kde

m_i je hmotnosť i-teho člena sústavy konajúceho posuvný pohyb,

m_k - hmotnosť k-teho člena sústavy konajúceho všeobecný rovinný pohyb,

I_j - moment zotrvačnosti j-teho člena sústavy konajúceho rotačný pohyb k osi rotácie,

I_{Tk} - moment zotrvačnosti k-teho člena sústavy konajúceho všeobecný rovinný pohyb k osi rotácie idúcej cez ťažisko,

v_i - veľkosť rýchlosti i-teho člena sústavy konajúceho posuvný pohyb,

v_{Tk} - veľkosť rýchlosti ťažiska k-teho člena sústavy konajúceho všeobecný rovinný pohyb,

ω_j - veľkosť uhlovej rýchlosti j-teho člena sústavy konajúceho rotačný pohyb,

ω_k - veľkosť uhlovej rýchlosti rotačnej zložky pohybu k-teho člena okolo osi idúcej cez ťažisko.

V prípade *redukcie na* **posuvne** *sa pohybujúci člen (teleso, hmotný bod)* alebo na *hmotný bod pohybujúci sa* **po kružnici** je kinetická energia redukovaného člena určená vzťahom

$$E_{k\,\mathrm{red}} = \frac{1}{2} m_{\mathrm{red}} v^2, \tag{4.25}$$

kde m_{red} je redukovaná hmotnosť sústredená v určitom bode redukcie a v je veľkosť rýchlosti bodu redukcie.

V prípade *redukcie na* **rotujúci** *člen* je kinetická energia redukovaného člena určená vzťahom

$$E_{k\,\mathrm{red}} = \frac{1}{2} I_{\mathrm{red}}\, \omega^2, \tag{4.26}$$

kde I_{red} je redukovaný moment zotrvačnosti a ω je veľkosť uhlovej rýchlosti redukovaného člena.

Z rovníc (4.25) a (4.26) odvodíme vzťahy pre redukovanú hmotnosť m_{red} a redukovaný moment zotrvačnosti I_{red}, ktoré z hľadiska zotrvačných vlastností ekvivalentne nahrádzajú celú mechanickú sústavu.

Veľkosť redukovanej sily F_{red} pri *redukcii na bod*, resp. *na translačne pohybujúci sa člen,*

– z *podmienky rovnosti okamžitých výkonov* pracovných síl

$$\overline{F}_{\mathrm{red}}\, \overline{v} = P^P \tag{4.27}$$

kde $\overline{v}$ je rýchlosť bodu redukcie a P^P je výsledný okamžitý výkon pracovných síl.

– z *podmienky rovnosti elementárnych prác* pracovných síl

$$\overline{F}_{\mathrm{red}}\, \mathrm{d}\overline{s} = \mathrm{d}\, A^P \tag{4.28}$$

– z *podmienky rovnosti virtuálnych prác* pracovných síl

$$\overline{F}_{\mathrm{red}}\, \delta\overline{s} = \delta\, A^P \tag{4.29}$$

kde $\mathrm{d}\overline{s}\left(\delta\overline{s}\right)$ je vektor elementárneho (virtuálneho) premiestnenia bodu redukcie,

$\mathrm{d}\, A^P\left(\delta\, A^P\right)$ je výsledná elementárna (virtuálna) práca pracovných síl potrebná na elementárnu zmenu polohy sústavy.

Veľkosť M_{red} pri *redukcii na rotujúci člen* určíme:

– z *podmienky rovnosti okamžitých výkonov* pracovných momentov

$$\overline{M}_{\mathrm{red}}\, \overline{\omega} = P^P \tag{4.30}$$

kde $\overline{\omega}$ je uhlová rýchlosť rotujúceho člena a P^P je výsledný okamžitý výkon pracovných momentov.

– z *podmienky rovnosti elementárnych prác* pracovných momentov

$$\overline{M}_{\mathrm{red}}\, \mathrm{d}\overline{\varphi} = \mathrm{d}\, A^P \tag{4.31}$$

– z *podmienky rovnosti virtuálnych prác* pracovných momentov

$$\overline{M}_{\mathrm{red}}\, \delta\overline{\varphi} = \delta\, A^P \tag{4.32}$$

Vzhľadom na druh pohybu člena sústavy, na ktorý redukujeme, môžu mať jednotlivé členy rovnice význam podľa *tabuľky 4.1*

Tabuľka 4.1

Translačný pohyb		Rotačný pohyb
m_{red}	M^*	I_{red}
F_{red}	Q	M_{red}
s ; x	q	φ
$\dot{s} = v$; $\dot{x} = v$	$\dot{q}$	$\dot{\varphi} = \omega$
$\ddot{s} = a$; $\ddot{x} = a$	$\ddot{q}$	$\ddot{\varphi} = \alpha$
$m_{\text{red}}\, a + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\, m_{\text{red}}}{\mathrm{d}\, s} v^2 = F_{\text{red}}$	*Pohybová rovnica*	$I_{\text{red}}\, \alpha + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\, I_{\text{red}}}{\mathrm{d}\varphi}\omega^2 = M_{\text{red}}$
$F_{\text{red}} = m_{\text{red}}\, a$ a – zrýchlenie člena, na ktorý redukujeme	*Zjednodušený tvar pre* $M^*(q) = \overline{\text{konšt.}}$	$M_{\text{red}} = I_{\text{red}}\, \alpha$ α – uhlové zrýchlenie člena, na ktorý redukujeme

📖 Poznámka: *Pre určenie veľkosti elementárnej práce, resp. okamžitého výkonu je dôležité správne posúdiť, ktoré zo síl a momentov pôsobiacich na jednotlivé členy mechanickej sústavy sú pracovné!*

K pracovným silám patria:

- vonkajšie sily a momenty, ktoré uvedú celú sústavu do pohybu,
- tiaže, resp. ich zložky v smere pohybu (ak je orientácia sily zhodná s orientáciou pohybu +, proti -).

K pracovným silám nepatria:

- sily a momenty od pasívnych odporov (F_t, $M_č$,...),
- sily pôsobiace v okamžitom strede otáčania,
- reakcie vo vnútorných väzbách.

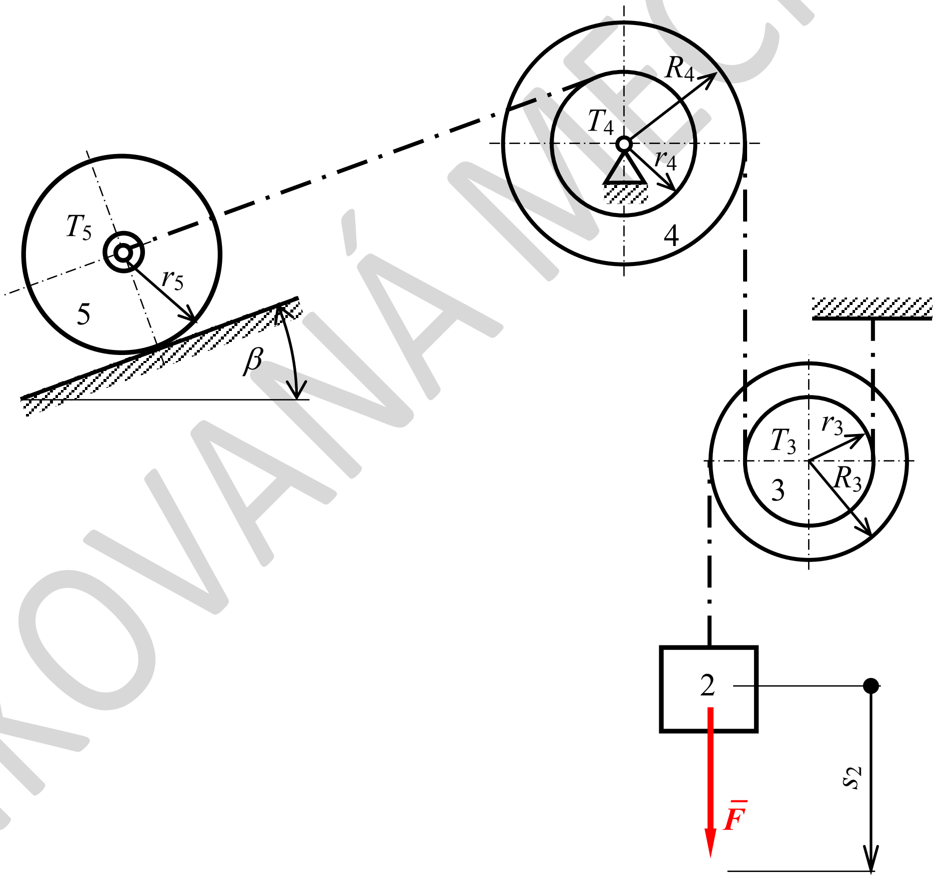
RIEŠENÉ PRÍKLADY

METÓDA POSTUPNÉHO UVOĽŇOVANIA

PRÍKLAD 4.1: Sústava telies na *obr. 4.2* je uvedená zo stavu pokoja do pohybu vplyvom vonkajšej sily F. Určte veľkosť okamžitej rýchlosti v_2 a zrýchlenie a_2 telesa 2 hmotnosti m_2 po prejdení dráhy s_2. Úlohu riešte metódou postupného uvoľňovania s uvažovaním vplyvu pasívnych odporov.

Dané hodnoty:
Geometrické veličiny: r_3, R_3, r_4, R_4, r_5, β, s_2
Hmotnosti jednotlivých členov: m_2, m_3, m_4, m_5
Momenty zotrvačnosti, resp. polomery zotrvačnosti: I_{T5}, i_{T4} , i_{T3}
Súčinitele pasívnych odporov: $f_{č4}, r_{č4}, f_{č5}, r_{č5}$, e_5 (lano je dokonale ohybné)
Vonkajšia hnacia sila: F

Hľadané: v_2, a_2



Obr. 4.2

RIEŠENIE: Prevody kinematických veličín danej mechanickej sústavy sú konštantné a jednotlivé členy vykonávajú rovinné pohyby závislé od vlastných hmotností a od pohybu hnacieho člena 2, na ktorý pôsobí hnacia sila $\bar{F}$. Dynamický model potom predstavuje rovinnú pohyblivú mechanickú sústavu s jedným stupňom voľnosti. Sústava má päť členov, kde číslom 1 označíme pevný rám. Pri výpočte použijeme *metódu uvoľňovania s uvažovaním vplyvu daných pasívnych odporov*. Pohybové rovnice zostavíme *metódou zrýchľujúcich síl.*

KINEMATICKÁ ANALÝZA

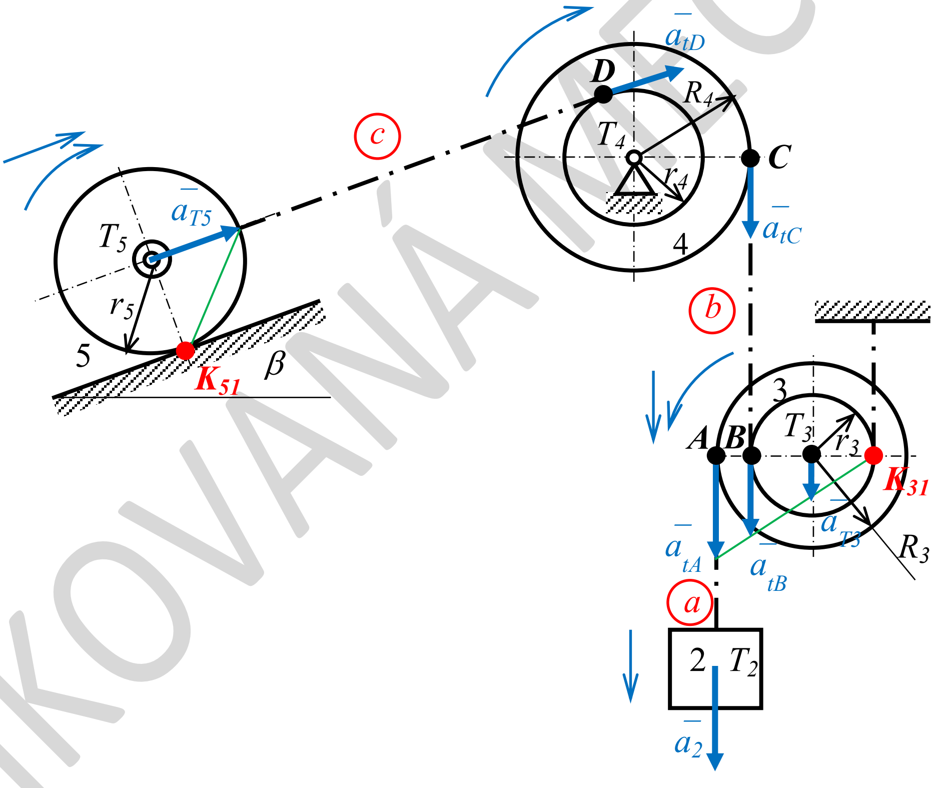
Rozbor pohybov jednotlivých pohyblivých členov mechanickej sústavy

Teleso 2: translačný pohyb (TP)
Teleso 3: všeobecný rovinný pohyb (VRP)
Teleso 4: rotačný pohyb (RT)
Teleso 5: všeobecný rovinný pohyb (VRP)

Kinematické veličiny charakterizujúce pohyb jednotlivých členov sústavy:

Teleso 2:	a_2,	v_2,	s_2			
Teleso 3:	a_{T3},	v_{T3},	s_{T3},	α_{T3},	ω_{T3},	φ_{T3}
Teleso 4:	α_4,	ω_4,	φ_4			
Teleso 5:	a_{T5},	v_{T5},	s_{T5},	α_{T5},	ω_{T5},	φ_{T5}

Väzbové podmienky - vyjadrujú závislosti medzi kinematickými veličinami telies pohyblivej mechanickej sústavy, ktoré sú spojené vzájomnými vnútornými väzbami a u telies konajúcich všeobecný rovinný pohyb, závislosť medzi základnými a uhlovými kinematickými veličinami charakterizujúcimi ich pohyb.



Obr. 4.3

Závislosti zrýchlení pohyblivých členov mechanickej sústavy (*obr. 4.3*)**:**

•• Pre väzbu lanom *a* platí rovnosť zrýchlení všetkých bodov lana. Potom pre koncové body lana *a*, ktoré sú v danom okamihu totožné s bodmi telies 2 a 3, platí:

$$\bar{a}_2 = \bar{a}_{tA} \qquad a_2 = \alpha_3 \left(R_3 + r_3\right) \tag{1}$$

•• Pre voľnú kladku 3 platí tiež závislosť medzi zrýchlením jej zdvihu a_{T3} a uhlovým zrýchlením α_3.

$$a_{T3} = \alpha_3 \, r_3 \tag{2}$$

•• Pre väzbu lanom *b* platí:

$$\bar{a}_{tB} = \bar{a}_{tC} \qquad 2\, r_3\, \alpha_3 = R_4\, \alpha_4 \qquad (3)$$

•• Pre väzbu lanom *c* platí:

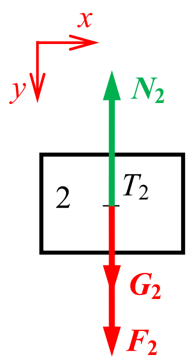
$$\bar{a}_{T5} = \bar{a}_{tD} \qquad r_5\, \alpha_5 = r_4\, \alpha_4 \qquad (4)$$

•• Pre valec 5 platí tiež závislosť medzi zrýchlením a_{T5} a uhlovým zrýchlením α_5.

$$a_{T5} = r_5\, \alpha_5 \qquad (5)$$

POHYBOVÉ ROVNICE

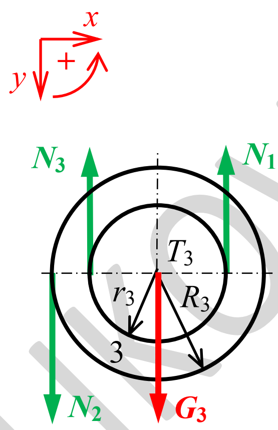
Jednotlivé telesá *uvoľníme z väzieb*. Zvolíme súradnicovú sústavu *v súlade* so zmyslom pohybu jednotlivých telies a nakreslíme sily a momenty, ktoré na ne pôsobia. Pohybové rovnice doplníme statickými podmienkami rovnováhy, vzťahmi vyjadrujúcimi vplyv pasívnych odporov a vzťahmi pre výpočet hmotnostných veličín (tiažové sily, hmotné momenty zotrvačnosti.



Teleso 2 – vykonáva posuvný pohyb nadol v smere osi *y*. Nahradíme ho hmotným bodom T_2. Pohybová rovnica má tvar:

$$\sum F_{ix} = 0; \qquad - \qquad (6)$$

$$\sum F_{iy} = m_2\, a_2; \qquad m_2\, a_2 = F + G_2 - N_2 \qquad (7)$$

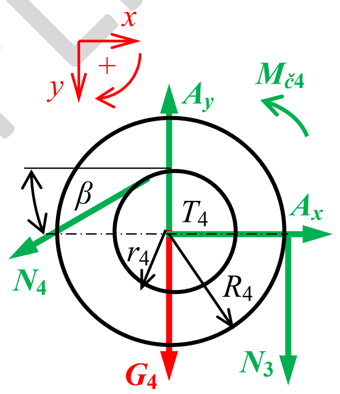


Teleso 3 (voľná kladka) – vykonáva všeobecný rovinný pohyb. Pre zostavenie pohybových rovníc rozložíme výsledný pohyb na rotáciu telesa 3 okolo pohyblivej osi rotácie prechádzajúcej ťažiskom T_3 a posuvný pohyb ťažiska T_3 telesa *3* (hmotného bodu) nadol v smere osi *y*

$$\sum F_{ix} = 0; \qquad - \qquad (8)$$

$$\sum F_{iy} = m_3\, a_{T3}; \qquad m_3\, a_{T3} = N_2 + G_3 - N_1 - N_3 \qquad (9)$$

$$\sum M_{iT3} = I_{T3}\, \alpha_3; \quad I_{T3}\, \alpha_3 = N_2\, R_3 + N_1\, r_3 - N_3\, r_3 \qquad (10)$$

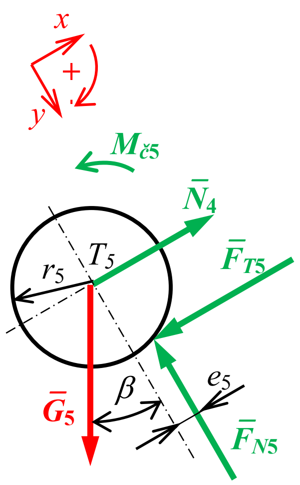


Teleso 4 – vykonáva rotačný pohyb okolo pevnej osi rotácie v ťažisku valca T_4. Momentovú pohybovú rovnicu doplníme statickými podmienkami rovnováhy v smere zvolených osí *x*, *y*.

$$\sum F_{ix} = 0; \quad 0 = A_x - N_4 \cos\beta \qquad (11)$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad 0 = -A_y + N_3 + N_4 \sin\beta + G_3 \qquad (12)$$

$$\sum M_{iT4} = I_{T4}\, \alpha_4;\; I_{T4}\, \alpha_4 = -M_{č4} + N_3\, R_4 - N_4\, r_4 \qquad (13)$$



Teleso 5 (valec) – vykonáva všeobecný rovinný pohyb (valí sa po naklonenej rovine). Pre zostavenie pohybových rovníc rozložíme výsledný pohyb na rotáciu telesa 5 okolo pohyblivej osi rotácie prechádzajúcej ťažiskom T_5 a posuvný pohyb ťažiska T_5 telesa *5* (hmotného bodu) v smere osi *x*

$$\sum F_{ix} = m_5\, a_{T5}\,; \quad m_5\, a_{T5} = N_4 - G_5 \sin\beta - F_{T5} \quad (14)$$

$$\sum F_{iy} = 0\,; \qquad 0 = F_{N5} - G_5 \cos\beta \quad (15)$$

$$\sum M_{iT5} = I_{T5}\,\alpha_5\,; \quad I_{T5}\,\alpha_5 = -M_{č5} + F_{T5}\, r_5 - F_{N5}\, e_5 \quad (16)$$

DOPLNKOVÉ ROVNICE

$$G_2 = m_2\, g\,, \quad G_3 = m_3\, g\,, \quad G_4 = m_4\, g\,, \quad G_5 = m_5\, g \qquad (17\text{-}20)$$

$$M_{č4} = r_{č4}\, f_{č4} \sqrt{A_x^2 + A_y^2}\,; \quad M_{č5} = r_{č5}\, f_{č5}\, N_4 \qquad (21, 22)$$

$$I_{T3} = m_3\, i_{T3}^2\,, \qquad I_{T4} = m_4\, i_{T4}^2 \qquad (23, 24)$$

Riešením vytvorenej sústavy 24 rovníc vypočítame veľkosť zrýchlenia a_2 telesa 2. Za predpokladu, že sa celá sústava rozbieha rovnomerne zrýchlene, pre teleso 2 platí:

$$a_2 = \text{konšt.}$$

Z *rovnice zrýchlenia* telesa 2 odvodíme pomocou tzv. „*rozšírenej definície zrýchlenia*" *rovnicu rýchlosti* telesa 2 v tvare $v = f(s)$, z ktorej po dosadení dráhy s_2 vypočítame hľadanú rýchlosť v_2 v okamihu, keď bremeno 2 klesne o vzdialenosť s_2.

$$a_2 = \frac{v\,\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \text{konšt.}$$

$$a_2 \int_0^{s_2} \mathrm{d}s = \int_0^{v_2} v\,\mathrm{d}v$$

$$a_2 s_2 = \frac{v_2^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = \sqrt{2 a_2 s_2}$$

PRÍKLAD 4.2: Sústava telies na *obr. 4.4* sa rozbieha rovnomerne zrýchlene zo stavu pokoja. Určte veľkosť hnacieho momentu M pôsobiaceho na navíjací bubon 3 tak, aby teleso 2 dosiahlo rýchlosť v_2 za čas t_2 a aby bol zabezpečený jeho rovnomerne zrýchlený pohyb v naznačenom smere. Pri riešení zohľadnite všetky pasívne odpory vo väzbách. Daná je tiaž hranola $\overline{G}_2$, tiaž bubna $\overline{G}_3$ a tiaž valca $\overline{G}_4$, rozmery b, h, R_3, r_3, r_4, polomery čapov $r_{č3}$, $r_{č4}$ telies 3 a 4, koeficient šmykového trenia medzi hranolom a podložkou f_2, koeficient šmykového trenia medzi lanom a podložkou f_1, koeficienty čapového trenia $f_{č3}$, $f_{č4}$, rameno valivého odporu e, uhly sklonu naklonených rovín α, β.

Dané hodnoty:

Geometrické veličiny: $b, h, R_3, r_3, r_4, \alpha, \beta$

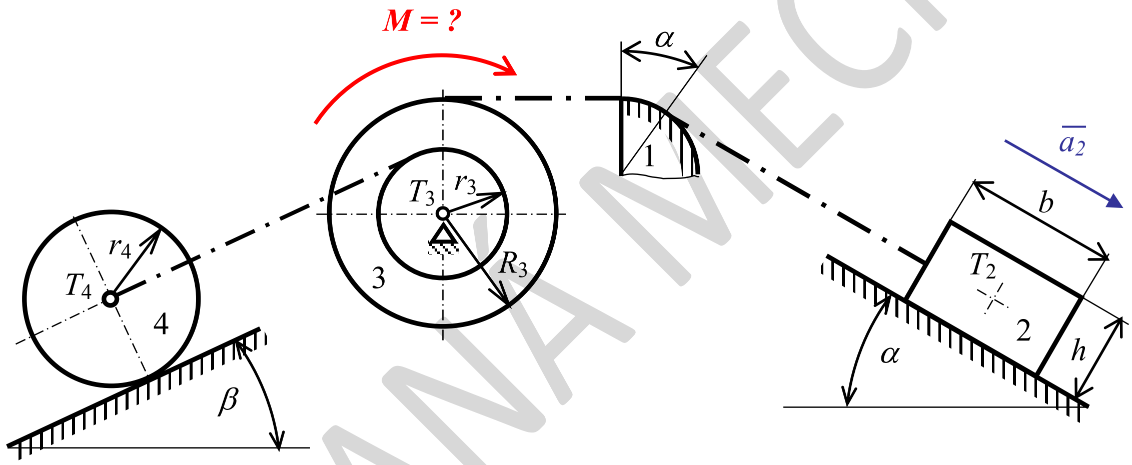
Tiaže jednotlivých členov sústavy: G_2, G_3, G_4

Moment zotrvačnosti: I_{T3}

Súčinitele pasívnych odporov: $f_2, f_1, r_{č3}, r_{č4}, f_{č3}, f_{č4}, e$ (lano je dokonale ohybné)

Kinematické veličiny: v_2, t_2

Hľadané: M



Obr. 4.4

RIEŠENIE: Pohyblivé členy sústavy telies sú spojené lanami. Prevody kinematických veličín sú konštantné a jednotlivé členy vykonávajú rovinné pohyby závislé od vlastných hmotností a od pohybu hnacieho člena *3*, na ktorý pôsobí hnací moment M. Dynamický model danej sústavy telies predstavuje rovinnú pohyblivú mechanickú sústavu s jedným stupňom voľnosti. Úlohu budeme riešiť *metódou uvoľňovania s uvažovaním vplyvu daných pasívnych odporov*. Pohybové rovnice zostavíme *metódou zrýchľujúcich síl*.

Veľkosť momentu M určíme zo sústavy rovníc, ktorú tvoria pohybové rovnice, podmienky rovnováhy silových sústav pôsobiacich na jednotlivé telesá a kinematické, resp. väzbové podmienky. Účinky odstránených väzieb sú nahradené väzbovými reakciami a príslušnými silami od pasívnych odporov vo väzbách. Súradnicové sústavy sú zvolené tak, aby riešenie sústavy rovníc bolo čo najjednoduchšie.

KINEMATICKÁ ANALÝZA

Rozbor pohybov jednotlivých pohyblivých členov mechanickej sústavy

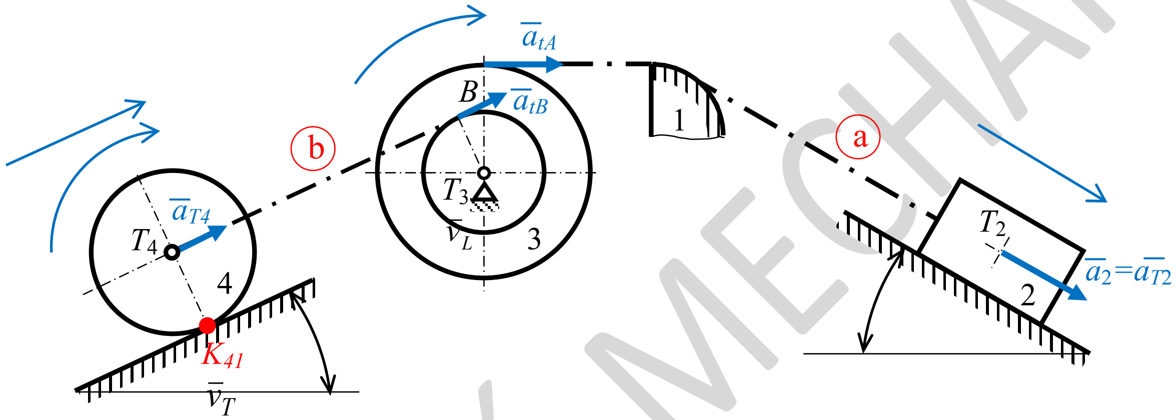
Teleso 2: translačný pohyb (TP)
Teleso 3: rotačný pohyb (RT)
Teleso 4: všeobecný rovinný pohyb (VRP)

Kinematické veličiny charakterizujúce pohyb jednotlivých členov sústavy:

Teleso 2:	a_{T2}, v_{T2}, s_{T2}	-		
Teleso 3:	-	α_3,	ω_3,	φ_3
Teleso 4:	a_{T4}, v_{T4}, s_{T4},	α_4,	ω_4,	φ_4

Väzbové podmienky - vyjadrujú závislosti medzi kinematickými veličinami telies pohyblivej mechanickej sústavy, ktoré sú spojené vzájomnými vnútornými väzbami a u telies konajúcich všeobecný rovinný pohyb, závislosť medzi základnými a uhlovými kinematickými veličinami charakterizujúcimi ich pohyb.

Závislosti zrýchlení pohyblivých členov mechanickej sústavy (*obr. 4.5*)**:**



Obr. 4.5

•• Pre väzbu lanom a platí rovnosť zrýchlení všetkých bodov lana. Potom pre koncové body lana a, ktoré sú v danom okamihu totožné s bodmi telies 2 a 3, platí:

$$\bar{a}_2 = \bar{a}_{tA} \qquad\qquad a_2 = \alpha_3 R_3 \qquad (1)$$

Pre bod *B* toho istého telesa *3* (uhlové zrýchlenie telesa je stále rovnaké) platí:

$$a_{tB} = \alpha_3 r_3$$

•• Pre väzbu lanom b platí:

$$\bar{a}_{tB} = \bar{a}_{T4} \qquad\qquad \alpha_3 r_3 = \alpha_4 r_4 \qquad (2)$$

•• Pre valec 4 platí tiež závislosť medzi zrýchlením a_{T4} a uhlovým zrýchlením α_4.

$$a_{T4} = \alpha_4 r_4 \qquad (3)$$

Pre konštantné zrýchlenie a_2 telesa 2 platí vzťah

$$a_2 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad / \,\mathrm{d}t$$

$$a_2 \int_0^{t_2} \mathrm{d}t = \int_0^{v_2} \mathrm{d}v$$

$$a_2\, t_2 = v_2$$

Veľkosť zrýchlenia telesa 2 vypočítame z daných kinematických veličín v_2, t_2:

$$a_2 = \frac{v_2}{t_2} \tag{4}$$

Kinematické veličiny charakterizujúce pohyb ďalších členov sústavy vyjadríme v závislosti na a_2, resp. na vzťahu $\frac{v_2}{t_2}$. Využijeme rovnice (1) až (4).

Uhlové zrýchlenie α_3 odvodíme dosadením (4) do (1)

$$\frac{v_2}{t_2} = \alpha_3 R_3$$

$$\alpha_3 = \frac{v_2}{t_2} \cdot \frac{1}{R_3} \tag{5}$$

Uhlové zrýchlenie telesa *4* určíme po úprave (2) dosadením (5)

$$\alpha_3 r_3 = \alpha_4 r_4 \quad \Rightarrow \quad \alpha_4 = \alpha_3 \frac{r_3}{r_4}$$

$$\alpha_4 = \frac{v_2}{t_2} \cdot \frac{r_3}{r_4 R_3} \tag{6}$$

a zrýchlenie ťažiska telesa *4* dostaneme dosadením (6) do (3)

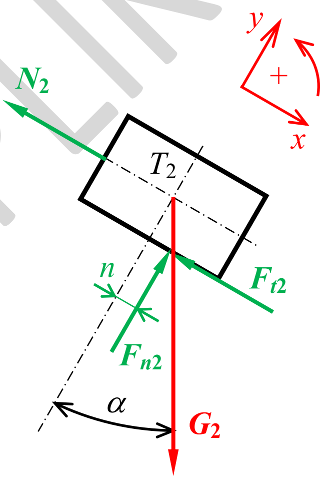
$$a_{T4} = \alpha_4 r_4 = \frac{v_2}{t_2} \cdot \frac{r_3}{r_4 R_3} r_4$$

$$a_{T4} = \frac{v_2}{t_2} \cdot \frac{r_3}{R_3} \tag{7}$$

Rovnice (4) až (7) platné pre zrýchlenia jednotlivých telies dosadíme do pohybových rovníc (a) až (m), ktoré vzniknú po uvoľnení jednotlivých telies.

POHYBOVÉ ROVNICE

Teleso 2 sa posúva po drsnej naklonenej rovine smerom dolu. Pôsobia naň tiažová sila $\overline{G}_2$, v mieste dotyku telesa s podložkou normálová sila $\overline{F}_{n2}$ a trecia sila $\overline{F}_{t2}$ orientovaná proti smeru pohybu. Pôsobisko reakcie od podložky (nositeľka $\overline{F}_{n2}$) sa posúva *v smere pohybu* telesa o neznámu vzdialenosť (rameno šmykového trenia *n*) od zvislej osi symetrie telesa.



$$\sum F_{ix} = 0: \quad -N_2 - F_{t2} + G_2 \sin\alpha = m_2 a_2 \tag{a}$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad F_{n2} - G_2 \cos\alpha = 0 \tag{b}$$

$$\sum M_{iT2} = 0: \quad -F_{t2}\frac{h}{2} + F_{n2}\, n = 0 \tag{c}$$

kde veľkosť trecej sily je daná *Coulombovým vzťahom*

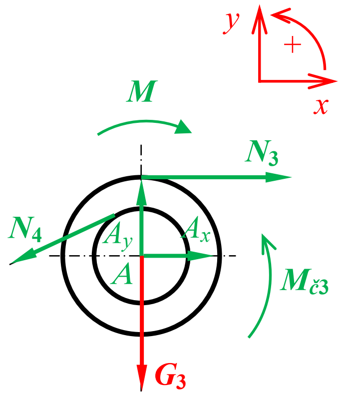
$$F_{t2} = f_2 F_{n2} \tag{d}$$

Pre sily $N_2 \rangle N_3$ platí *Eulerov vzťah* $N_2 = N_3 e^{f_1 \hat{\alpha}}$ (e)

$\hat{\alpha}$ je uhol opásania lana vyjadrený v radiánoch.

Telesá 2 a 3 sú spojené lanom. V dôsledku trenia lana na valcovej ploche osové sily $\overline{N}_2$ a $\overline{N}_3$ nie sú rovnako veľké. Pomer týchto síl je vyjadrený Eulerovým vzťahom (e).

Teleso 3 vykonáva rotačný pohyb. K rámu je viazané pomocou čapu A, ktorý nahradíme reakciou so súradnicovými zložkami A_x, A_y. Súčasne pri rotačnom pohybe telesa dochádza k čapovému treniu v radiálnom čape A vyjadrenému momentom čapového trenia $M_{č3}$ orientovanému proti zmyslu otáčania telesa 3.



$$\sum F_{ix} = 0: \quad A_x + N_3 - N_4 \cos\beta = 0 \qquad \text{(f)}$$

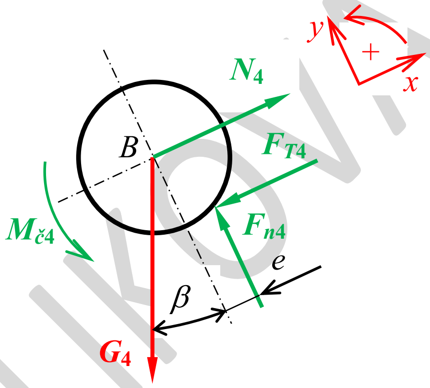
$$\sum F_{iy} = 0: \quad A_y - N_4 \sin\beta - G_3 = 0 \qquad \text{(g)}$$

$$\sum M_{iA} = 0: M - M_{č3} + N_3 R_3 - N_4 r_3 = I_{T3}\,\alpha_3 \qquad \text{(h)}$$

kde moment čapového trenia je vyjadrený

$$M_{č3} = r_{č3}\, f_{č3} \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad \text{(i)}$$

Teleso 4 sa valí po naklonenej rovine. Pôsobí naň tiažová sila $\overline{G}_4$, v čape B osová sila v lane $\overline{N}_4$ a moment čapového trenia $M_{č4}$, v mieste dotyku telesa 4 s podložkou normálová sila $\overline{F}_{n4}$ a dotyčnicová sila $\overline{F}_{T4}$ pôsobiaca proti možnému prešmyknutiu telesa. Nositeľka normálovej sily $\overline{F}_{n4}$ je v dôsledku valivého pohybu od zvislej osi symetrie telesa posunutá v smere pohybu o rameno valivého odporu e.



$$\sum F_{ix} = 0: \quad N_4 - F_{T4} - G_4 \sin\beta = m_4\, a_{T4} \qquad \text{(j)}$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad F_{n4} - G_4 \cos\beta = 0 \qquad \text{(k)}$$

$$\sum M_{iB} = 0: \quad -M_{č4} - F_{n4}\, e + F_{T4}\, r_4 = I_{T4}\,\alpha_4 \qquad \text{(l)}$$

Pre moment čapového trenia v čape B platí

$$M_{č4} = r_{č4}\; f_{č4}\; N_4 \qquad \text{(m)}$$

Pre moment zotrvačnosti valca k osi rotácie platí vzťah

$$I_{T4} = \frac{1}{2} m_4\, r_4^2 \qquad \text{(n)}$$

Veľkosť momentu M a neznáme reakcie vo všetkých väzbách dostaneme riešením systému rovníc (a) až (n).

Pre zjednodušenie výpočtu je možné výraz $\sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ vo vzťahu (i), vyjadrujúci veľkosť výslednej sily pôsobiacej v čape, nahradiť lineárnym výrazom podľa Ponceleta:

$$\sqrt{A_x^2 + A_y^2} \cong 0{,}4\left|A_x\right| + 0{,}96\left|A_y\right| \qquad \text{(o)}$$

ktorý platí v uvedenom tvare pre $|A_x| > |A_y|$. Pre prípad $|A_x| < |A_y|$ zameníme vo vzťahu (o) koeficienty:

$$\sqrt{A_x^2 + A_y^2} \cong 0{,}96|A_x| + 0{,}4|A_y| \tag{p}$$

Potom s ohľadom na vzťah (o), resp. (p) veľkosť momentu čapového trenia vyjadríme vzťahom pre približný výpočet:

$$M_{č3} \doteq r_{č3}\, f_{č3}\left(0{,}4|A_x| + 0{,}96|A_y|\right) \tag{r}$$

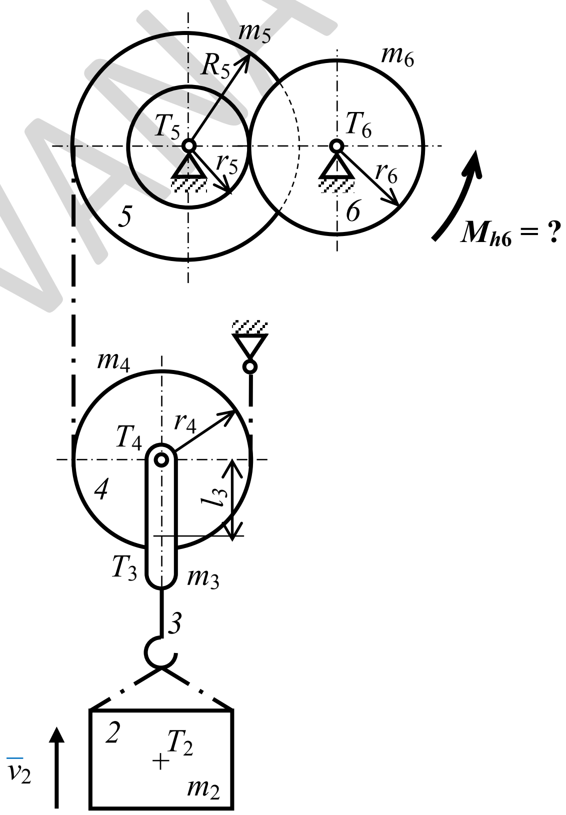
resp.

$$M_{č3} \doteq r_{č3}\, f_{č3}\left(0{,}96|A_x| + 0{,}4|A_y|\right) \tag{s}$$

Približný *Ponceletov* vzťah pre vyjadrenie veľkosti reakcie v čape je dostatočne presný. Je preto výhodné použiť ho pri riešení rovnovážnych rovníc pri sústavách telies s pasívnymi odpormi.

PRÍKLAD 4.3: Zdvíhacie zariadenie na *obr. 4.6* je tvorené čelným ozubeným kolesom *6*, pevnou kladkou s ozubeným vencom *5* a voľnou kladkou *4*. Určte veľkosť hnacieho momentu M_{h6}, ak počas rozbehu má bremeno *2* dosiahnuť rýchlosť v_2 za daný čas zdvihu t_2. Sústava telies sa rozbieha z pokoja a bremeno *2* je zdvíhané rovnomerne zrýchlene. Ozubenie v prevodoch je priame, uhol záberu je α. Úlohu riešte metódou postupného uvoľňovania s uvažovaním vplyvu pasívnych odporov.

Dané hodnoty: m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, l_3, r_4, R_5, r_5, r_6, i_{T5}, v_2, t_2, a_2 = konšt..



Obr. 4.6

Riešenie: Dynamický model zdvíhacieho zariadenia predstavuje rovinnú pohyblivú sústavu telies s 1° stupňom voľnosti. Prevody kinematických veličín sú konštantné a jednotlivé členy konajú rovinné pohyby závislé na pohybe hnacieho člena *6*. Sústava má šesť členov, kde člen *1* uvažujeme ako nepohyblivý rám.

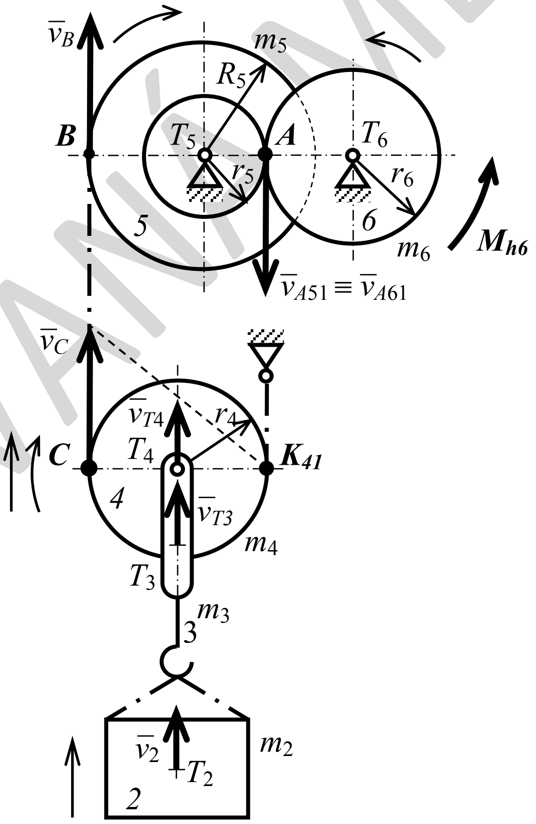
KINEMATICKÁ ANALÝZA

Rozbor pohybu pohyblivých členov mechanickej sústavy

Teleso 2: translačný pohyb (TP)
Teleso 3: translačný pohyb (TP)
Teleso 4: všeobecný rovinný pohyb (VRP) s okamžitým stredom otáčania v bode K_{41}
Teleso 5: rotačný pohyb (RT) okolo stáleho stredu otáčania v $O_5 \equiv T_5$
Teleso 6: rotačný pohyb (RT) okolo stáleho stredu otáčania v $O_6 \equiv T_6$

Kinematické veličiny charakterizujúce pohyb jednotlivých členov sústavy:

Teleso 2:	a_2,	v_2,	s_2
Teleso 3:	a_3,	v_3,	s_3
Teleso 4:	a_{T4},	v_{T4},	s_{T4}, α_4, ω_4, φ_4
Teleso 5:	α_5,	ω_5,	φ_5
Teleso 6:	α_6,	ω_6,	φ_6



Obr. 4.7

Výpočet veľkosti zrýchlenia a_2.

Pri riešení vychádzame z požiadavky, že teleso *2* má zrýchliť na v_2 za čas t_2, ak sa celá sústava a zároveň aj teleso *2* rozbieha s rovnomerne zrýchlene.

$$a_2 = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = \text{konšt.}$$

$$a_2 \int_0^{t_2} \mathrm{d}\,t = \int_0^{v_2} \mathrm{d}\,v$$

$$a_2\, t_2 = v_2 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{a_2 = \frac{v_2}{t_2}} \tag{a}$$

Väzbové podmienky (prevodové pomery)

Platí, že závislosti medzi kinematickými veličinami (s, v, a, φ, ω, α) jednotlivých pohyblivých členov mechanickej sústavy sú rovnaké. V tomto prípade prevodové pomery odvodíme pomocou okamžitých rýchlostí významných bodov a telies danej mechanickej sústavy. Tie potom stačí prepísať pre zrýchlenia – *Tabuľka 4.2*.

Závislosti okamžitých rýchlostí pohyblivých členov 3, 4, 5, 6 sústavy telies na okamžitej rýchlosti bremena 2 (*obr. 4.7*)

•• Telesá *2*, *3* a *4* sú v danom okamihu zdvíhané rovnakou rýchlosťou. Pre voľnú kladku *4* platí tiež závislosť medzi rýchlosťou jej zdvihu v_{T4} a uhlovou rýchlosťou ω_4.

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_3 = \bar{v}_{T4}$$

$$v_2 = v_3 = v_{T4} = r_4\, \omega_4 \tag{b}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_4 = \frac{v_2}{r_4}$$

•• Pre väzbu lanom, ktorým sú spojené telesá 4 a 5 platí:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_C$$

$$2\, r_4\, \omega_4 = R_5\, \omega_5 \tag{c}$$

$$\Rightarrow \omega_5 = \omega_4 \frac{2\, r_4}{R_5} = \frac{v_2}{r_4} \frac{2\, r_4}{R_5}$$

$$\Rightarrow \omega_5 = v_2 \frac{2}{R_5}$$

•• V bode *A* platí podmienka valenia:

$$\bar{v}_{A51} = \bar{v}_{A61}$$

$$r_5\, \omega_5 = r_6\, \omega_6 \tag{d}$$

$$\Rightarrow \omega_6 = \omega_5 \frac{r_5}{r_6} = v_2 \frac{2}{R_5} \frac{r_5}{r_6}$$

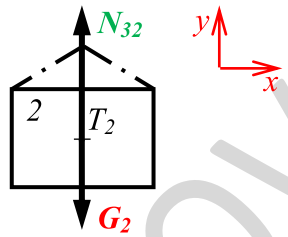
$$\Rightarrow \omega_6 = v_2 \frac{2\, r_5}{r_6\, R_5}$$

Tabuľka 4.2: Závislosti kinematických veličín telies 3, 4, 5, 6 na pohybe telesa 2

v, ω	a, α
$v_3 = v_2$	$a_3 = a_2$
$v_{T4} = v_2$	$a_{T4} = a_2$
$\omega_4 = \dfrac{v_2}{r_4}$	$\alpha_4 = \dfrac{a_2}{r_4}$
$\omega_5 = v_2 \dfrac{2}{R_5}$	$\alpha_5 = a_2 \dfrac{2}{R_5}$
$\omega_6 = v_2 \dfrac{2\, r_5}{r_6\, R_5}$	$\alpha_6 = a_2 \dfrac{2\, r_5}{r_6\, R_5}$

POHYBOVÉ ROVNICE

Jednotlivé telesá uvoľníme z väzieb. Zvolíme súradnicovú sústavu v súlade so zmyslom pohybu jednotlivých telies a nakreslíme sily a momenty, ktoré na ne pôsobia. Pohybové rovnice zostavíme *metódou zrýchľujúcich síl*. Doplníme statické podmienky rovnováhy, kinematické podmienky (prevodové pomery), vzťahy vyjadrujúce vplyv pasívnych odporov a vzťahy pre výpočet hmotnostných veličín (tiažové sily, momenty zotrvačnosti). Našou úlohou je určiť potrebnú veľkosť hnacieho momentu M_{h6}. Pretože nás nezaujímajú reakcie vo väzbách, riešenie úlohy zjednodušíme zanedbaním vplyvu pasívnych odporov (čapové trenie a tuhosť lán).



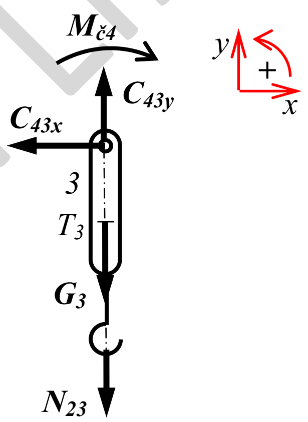
Teleso 2 – vykonáva posuvný pohyb nahor v smere osi *y*. Nahradíme ho hmotným bodom T_2.

$$\sum F_{ix} = 0: \qquad 0 = 0 \qquad \text{(e)}$$

$$\sum F_{iy} = m_2\, a_2: \qquad m_2\, a_2 = N_{32} - G_2 \qquad \text{(f)}$$

Pre vnútornú väzbu telies *2* a *3* platí zákon akcie a reakcie

$$N_{32} = N_{23}$$



Teleso 3 – vykonáva posuvný pohyb nahor v smere osi *y*. Účinok momentu čapového trenia $M_{č4}$ sa prejaví v prípade, že väzba kĺbom v bode *C* nadobudne charakter pevnej väzby.

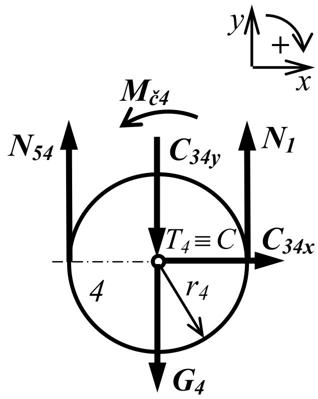
$$\sum F_{ix} = 0: \qquad 0 = C_{43x} \qquad \text{(g)}$$

$$\sum F_{iy} = m_3\, a_3: \qquad m_3\, a_3 = C_{43y} - N_{23} - G_3 \qquad \text{(h)}$$

$$\sum M_{iT3} = 0; \qquad 0 = -M_{č4} + C_{43x}\, l_3 \qquad \text{(i)}$$

Pre vnútornú väzbu telies *3* a *4* platí zákon akcie a reakcie

$$C_{34y} = C_{43y}; \qquad C_{34x} = C_{43x}$$



Teleso 4 – vykonáva všeobecný rovinný pohyb. Pre zostavenie pohybových rovníc je nutný rozklad výsledného pohybu (rotácia okolo pohyblivej osi idúcej ťažiskom $T_4 \equiv C$ a posuvný pohyb ťažiska T_4 telesa *4* nahor v smere osi *y*) .

$$\sum F_{ix} = 0: \qquad 0 = C_{34x} \qquad \text{(j)}$$

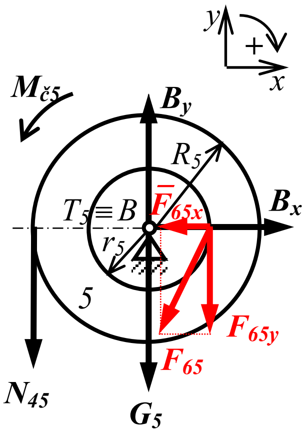
$$\sum F_{iy} = 0: \qquad m_4\, a_{T4} = -C_{34y} + N_1 + N_{54} - G_4 \qquad \text{(k)}$$

$$\sum M_{iT4} = I_{T4}\,\alpha_4: \; I_{T4}\,\alpha_4 = -M_{č4} + N_{54}\, r_4 - N_1\, r_4 \qquad \text{(l)}$$

Pre vnútornú väzbu telies *4* a *5* platí zákon akcie a reakcie

$$N_{54} = N_{45}$$

Teleso 5 – vykonáva rotačný pohyb okolo pevnej osi rotácie prechádzajúcej bodom *B*.



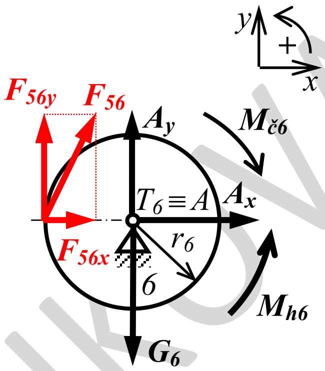
$$\sum F_{ix} = 0: \qquad 0 = B_x - F_{65x} \qquad \text{(m)}$$

$$\sum F_{iy} = 0: \qquad 0 = B_y - F_{65y} - N_{45} - G_5 \qquad \text{(n)}$$

$$\sum M_{iT5} = I_{T5}\,\alpha_5 : I_{T5}\,\alpha_5 = -M_{č5} + F_{65y}\, r_5 - N_{45}\, R_5 \qquad \text{(o)}$$

Pre vnútornú väzbu telies 5 a 6 platí zákon akcie a reakcie

$$F_{56} = F_{65}$$



Teleso 6 – vykonáva rotačný pohyb okolo pevnej osi rotácie prechádzajúcej bodom *A*.

$$\sum F_{ix} = 0: \qquad 0 = A_x + F_{56x} \qquad \text{(p)}$$

$$\sum F_{iy} = 0: \qquad 0 = A_y + F_{56y} - G_6 \qquad \text{(r)}$$

$$\sum M_{iT6} = I_{T6}\,\alpha_6: \quad I_{T6}\,\alpha_6 = M_{h6} - M_{č6} - F_{56y} r_6 \qquad \text{(s)}$$

DOPLNKOVÉ ROVNICE:

$$G_2 = m_2\, g; \quad G_3 = m_3\, g; \quad G_4 = m_4\, g; \quad G_5 = m_5\, g; \quad G_6 = m_6\, g \qquad \text{(t)}$$

$$\left.\begin{aligned} M_{č4} &= r_{č4}\, f_{č4}\sqrt{C_x^2 + C_y^2} \\ M_{č5} &= r_{č5}\, f_{č5}\sqrt{B_x^2 + B_y^2} \\ M_{č6} &= r_{č6}\, f_{č6}\sqrt{A_x^2 + A_y^2} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(u)}$$

$$\left.\begin{aligned} I_{T5} &= m_5\, i_{T5}^2 \\ I_{T4} &= \frac{1}{2} m_4\, r_4^2 \\ I_{T6} &= \frac{1}{2} m_6\, r_6^2 \end{aligned}\right\} \qquad (v)$$

Pre prípad bez pasívnych odporov platí: $f_{či} = 0; \quad i = 4,\ 5,\ 6$. Potom $M_{či} = 0; \quad i = 4,\ 5,\ 6$. Veľkosť hnacieho momentu určíme z pohybových rovníc (e), (g), (j), (k), (n), (r). Ich postupnou úpravou a zohľadnením vzťahov (a), (b), (c), (s), (u) dostávame:

$$M_{h6} = \left[g(m_2 + m_3 + m_4) + a_2 \left(m_2 + m_3 + m_4 + \frac{1}{2} m_4 + m_5\, i_{T5}{}^2 \frac{4}{R_5^2} + 2m_6 \left(\frac{r_5}{R_5} \right)^2 \right) \right] \frac{r_6\, R_5}{2\, r_5}$$

Ak veľkosť hnacieho momentu je určená vo vzťahu k požadovanému zrýchleniu a_2 telesa *2*, potom po dosadení (a) dostaneme:

$$M_{h6} = \left[g(m_2 + m_3 + m_4) + \frac{v_2}{t_2} \left(m_2 + m_3 + m_4 + \frac{1}{2} m_4 + m_5\, i_{T5}{}^2 \frac{4}{R_5^2} + 2m_6 \left(\frac{r_5}{R_5} \right)^2 \right) \right] \frac{r_6\, R_5}{2\, r_5}$$

Poznámka: *Takto určená veľkosť hnacieho momentu M_{h6} je užitočným hnacím momentom potrebným na vykonanie užitočnej práce. V sústave pôsobia aj pasívne odpory, ktorých účinky vyjadríme pomocou účinnosti.*

Nech účinnosť ozubeného prevodu medzi členmi *5* a *6* je η_{56}, účinnosť bubna na člene *5* je η_5 a účinnosť kladky *4* je η_4. Vzhľadom na postupný prenos výkonu je výsledná mechanická účinnosť zdvíhacieho zariadenia

$$\eta = \eta_{56}\, \eta_5\, \eta_4$$

Potom skutočná potrebná veľkosť hnacieho momentu M_{h6} je zväčšená o veľkosť M_t potrebného na prekonanie pasívnych odporov

$$M_{h6_{skutoč.}} = M_{h6} \cdot \frac{1}{\eta} = M_{h6} + M_t$$

kde $\quad M_t = M_{h6}(1 - \eta)$.

Účinky pasívnych odporov je možné vyjadriť tiež analyticky - doplnkové rovnice (u). Momenty čapového trenia sú vždy orientované opačne vzhľadom na orientáciu rotačného pohybu hriadeľa - rovnice (l), (o), (s). Ak $f_{či} \neq 0; \quad i = 4,\ 5,\ 6$, riešenie celej sústavy rovníc je zložitejšie. Pre zjednodušenie riešenia v technickej praxi často používame tzv. Ponceletov vzťah na určenie veľkosti momentu čapového trenia:

$$M_č \doteq r_č\, f_č\,(0{,}96\, R_x + 0{,}4\, R_y)$$

kde $R_x > R_y$. Ak platí $R_x < R_y$, je potrebné vymeniť koeficienty pri R_x a R_y. Na záver pripomíname, že takto by sme zohľadnili len vplyv čapového trenia, tuhosť lán by sme zanedbali.

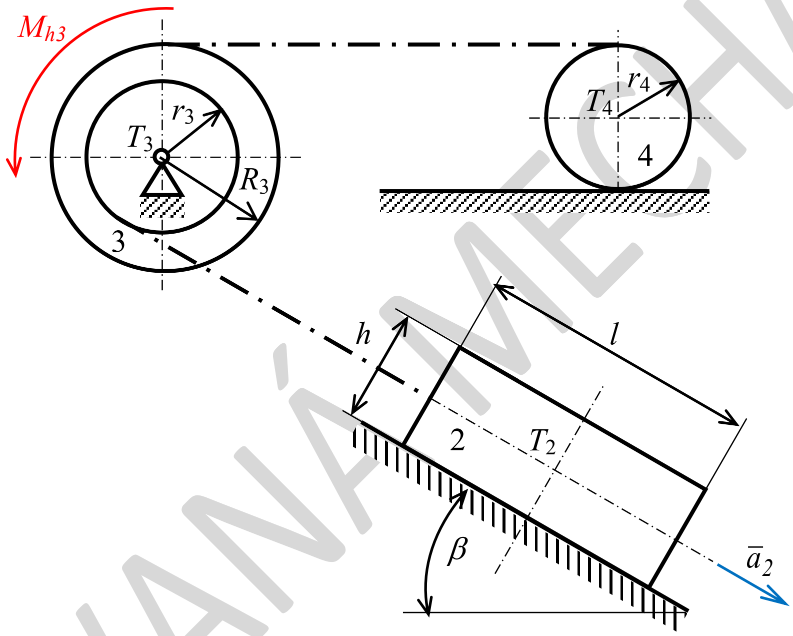
METÓDA REDUKCIE HMOTNOSTNÝCH A SILOVÝCH VELIČÍN

PRÍKLAD 4.4: Mechanická sústava zobrazená na *obr. 4.8* sa rozbieha pod vplyvom pôsobenia hnacieho momentu M_{h3} a vlastných tiaží jednotlivých telies sústavy. Určte veľkosť hnacieho momentu M_{h3} tak, aby teleso 2 dosiahlo rýchlosť v_2 na dráhe s_2. V čase $t = 0$ sa sústava nachádza v pokoji. Predpokladajte, že sa teleso 2 rozbieha konštantným zrýchlením $\bar{a}_2$. Úlohu riešte metódou redukcie hmotnostných a silových veličín s redukciou na teleso 3.

Dané hodnoty:

Geometrické veličiny: $r_3, R_3, r_4, l, h, \beta$
Hmotnosti jednotlivých členov: m_2, m_3, m_4
Momenty zotrvačnosti, resp. polomery zotrvačnosti: i_{T3}
Kinematické veličiny: $s_2, v_2, a_2 =$ *konšt.*

Hľadané: M_{h3}



Obr. 4.8

RIEŠENIE: Prevody kinematických veličín danej mechanickej sústavy sú konštantné a jednotlivé členy vykonávajú rovinné pohyby závislé od vlastných hmotností a od pohybu hnacieho člena 3, na ktorý pôsobí hnací moment M_{h3}. Dynamický model predstavuje rovinnú pohyblivú mechanickú sústavu s jedným stupňom voľnosti. Sústava má štyri členy. Číslom 1 označíme pevný rám. Hľadáme potrebný hnací účinok pre zadaný pohyb. Použijeme *metódu redukcie hmotnostných a silových veličín*.

KINEMATICKÁ ANALÝZA

Rozbor pohybov jednotlivých pohyblivých členov mechanickej sústavy

Teleso 2: translačný pohyb (TP)
Teleso 3: rotačný pohyb (RT)
Teleso 4: všeobecný rovinný pohyb (VšRP)

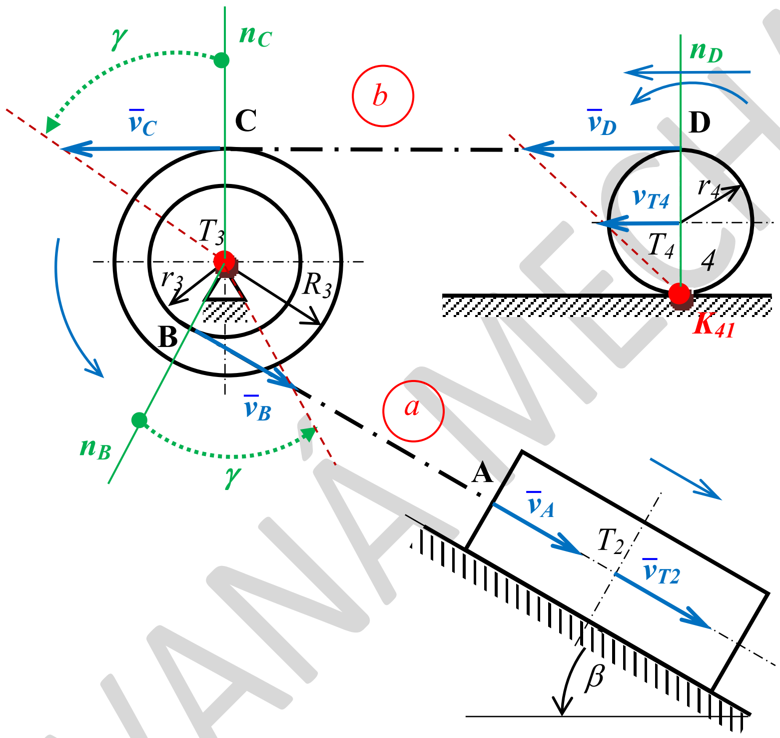
Kinematické veličiny charakterizujúce pohyb jednotlivých členov sústavy:

Teleso 2: $a_{T2},\ v_{T2},\ s_2$
Teleso 3: $\alpha_3,\ \omega_3,\ \varphi_3$
Teleso 4: $a_{T4},\ v_{T4},\ s_4,\quad \alpha_4,\ \omega_4,\ \varphi_4$

Väzbové podmienky - Závislosti rýchlostí pohyblivých členov mechanickej sústavy:

Na *obr. 4.9* sú zakreslené vektory rýchlosti charakteristických bodov sústavy s využitím *Vety o zorných uhloch*:

Z okamžitého stredu otáčania vidíme v danom časovom okamihu rýchlosti všetkých bodov telesa pod rovnakým zorným uhlom.



Obr. 4.9

- Pre väzbu lanom a platí rovnosť zrýchlení všetkých bodov lana. Potom pre koncové body lana a, ktoré sú v danom okamihu totožné s bodmi A a B telies 2 a 3, platí:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_B$$

$$v_2 = \omega_3\, r_3 \tag{1}$$

- Pre väzbu lanom b platí:

$$\bar{v}_C = \bar{v}_D$$

$$R_3\, \omega_3 = 2 r_4\, \omega_4 \tag{2}$$

- Pre valec 4 platí tiež závislosť medzi zrýchlením a_{T4} a uhlovým zrýchlením

$$v_{T4} = r_4\, \omega_4 \tag{3}$$

Zo zadania vyplýva, že je potrebné redukovať hmotnostné a silové veličiny vzhľadom na teleso *3*. Veľkosti okamžitých rýchlostí telies 2 a 4 ($v_{T2},\ v_{T4},\ \omega_4$) preto vyjadríme pomocou odpovedajúcej kinematickej veličiny telesa 3 (ω_3). Závislosti rýchlostí odvodíme z prevodových pomerov (väzbových podmienok).

Rovnica (1) priamo vyjadruje závislosť v_2 a ω_3

$$v_2 = \omega_3 r_3 \tag{4}$$

Z rovnice (2)

$$\omega_4 = \omega_3 \frac{R_3}{2r_4} \tag{5}$$

Dosadením do (3) dostávame

$$v_{T4} = \omega_3 \frac{R_3}{2r_4} r_4 = \omega_3 \frac{R_3}{2} \tag{6}$$

Pri riešení *metódou redukcie hmotnostných a silových veličín* vychádzame z vlastnej pohybovej rovnice

$$\boxed{M^* \ddot{q} + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d} M^*}{\mathrm{d} q} \dot{q}^2 = Q} \tag{7}$$

resp. z jej zjednodušenej podoby ($M^*(q)$ = konšt.)

$$M^* \ddot{q} = Q \tag{8}$$

V prípade **redukcie na člen 3**, ktorý vykonáva **rotačný pohyb**, základná pohybová rovnica náhradnej sústavy má tvar

$$\boxed{M_{\text{red}} = I_{\text{red}}\, \alpha_3} \tag{9}$$

a) Určenie redukovaného momentu zotrvačnosti ***I_{red}***

I_{red} získame porovnaním kinetickej energie pôvodnej mechanickej sústavy s kinetickou energiou redukovaného člena

$$E_{k\,\text{red}} = E_{k\,\textit{súst.}} = E_{k2} + E_{k3} + E_{k4} \tag{10}$$

Vzťahy pre kinetickú energiu telies 2, 3, 4 a redukované teleso:

Teleso 2 (PP) $$E_{k2} = \frac{1}{2} m_2 v_{T2}^2 \tag{11}$$

Teleso 3 (RP) $$E_{k3} = \frac{1}{2} I_{T3} \omega_3^2 \tag{12}$$

Teleso 4 (VRP) $$E_{k4} = \frac{1}{2} m_4 v_{T4}^2 + \frac{1}{2} I_{T4} \omega_4^2 \tag{13}$$

Redukované teleso (RP) $$E_{k\,\text{red}} = \frac{1}{2} I_{\text{red}} \omega_3^{\;2} \tag{14}$$

Vzťahy (11), (12), (13), (14) dosadíme do (10)

$$\frac{1}{2} I_{\text{red}} \omega_3{}^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_{T3} \omega_3^2 + \frac{1}{2} m_4 v_{T4}^2 + \frac{1}{2} I_{T4} \omega_4^2 \tag{15}$$

Rýchlosti v_2, v_{T4} a ω_4 nahradíme odvodenými závislosťami (4), (5), (6) a upravíme

$$I_{\text{red}}\, \omega_3{}^2 = m_2 \omega_3^2\, r_3^2 + I_{T3} \omega_3^2 + m_4 \omega_3^2 \frac{R_3^2}{4} + I_{T4} \omega_3^2 \frac{R_3^2}{4 r_4^2} \qquad /.\frac{1}{\omega_3^2}$$

$$I_{\text{red}} = m_2 r_3^2 + I_{T3} + m_4 \frac{R_3^2}{4} + I_{T4} \frac{R_3^2}{4 r_4^2} \tag{16}$$

Pre momenty zotrvačnosti telesa 3 (dvojvalec) platí

$$I_{T3} = m_3\, i_{T3}^2 \tag{17}$$

Pre momenty zotrvačnosti telesa 4 (jednoduchý valec) platí

$$I_{T4} = \frac{1}{2} m_4\, r_4^2 \tag{18}$$

Dosadíme (17), (18) do (16) a upravíme

$$I_{\text{red}} = m_2\, r_3^2 + m_3\, i_{T3}^2 + m_4 \frac{R_3^2}{4} + \frac{1}{2} m_4\, r_4^2 \frac{R_3^2}{4 r_4^2}$$

$$I_{\text{red}} = m_2\, r_3^2 + m_3 i_{T3}^2 + m_4 \frac{R_3^2}{4} + \frac{1}{2} m_4 \frac{R_3^2}{4}$$

$$I_{\text{red}} = m_2 r_3^2 + m_3\, i_{T3}^2 + \frac{3}{8} m_4\, R_3^2 \tag{19}$$

Poznámka: *Pri zostavení väzbových podmienok vychádzame v prípade telesa 4, ktoré koná všeobecný rovinný pohyb z predpokladu, že v danom okamihu sa teleso 4 len otáča okolo okamžitého stredu otáčania v bode K_{41}. Pre zostavenie pohybovej rovnice pôvodnej sústavy - vyjadrenie kinetickej energie telesa 4 a výkonu pracovných síl naň pôsobiacich, uvažujeme s rozkladom na posuvný pohyb ťažiska T_4 a rotačný pohyb okolo pohyblivej osi prechádzajúcej ťažiskom T_4.*

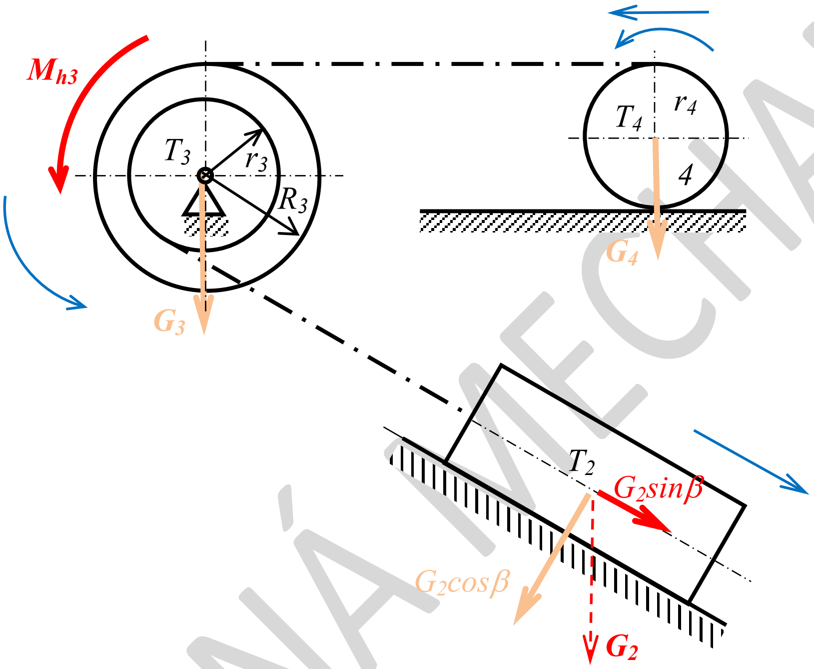
b) Určenie redukovaného momentu M_{red}

M_{red} získame porovnaním veľkosti celkového okamžitého výkonu pracovných síl pôsobiacich na pôvodnú mechanickú sústavu s okamžitým výkonom redukovaného momentu pôsobiaceho na redukovaný člen 3.

$$P_{\text{red}} = P_{\text{súst}} = P_2 + P_3 + P_4 \tag{20}$$

Pre určenie veľkosti okamžitých výkonov pracovných síl a momentov pôsobiacich na jednotlivé telesá je dôležité správne určiť pracovné sily a momenty. K pracovným silám patria vonkajšie sily a momenty, ktoré uvádzajú sústavu do pohybu, tiaže, resp. ich zložky pôsobiace v smere pohybu. Znamienko „+“ alebo „-“ určíme porovnaním orientácie pracovnej sily (momentu) so smerom pohybu telesa.

Na sústavu podľa zadania pôsobí vonkajší moment „$+M_{h3}$“, iná vonkajšia sila (moment) tam nie je. Každé z telies sústavy má svoju vlastnú tiaž, ale *len* tiaž telesa *2* má zložku v smere pohybu „ $+G_2 sin\beta$ “. Pracovné sily a momenty sú na *obr. 4.10* zobrazené červenou farbou, pohyb jednotlivých telies modrou farbou.



Obr. 4.10

Pre výkony jednotlivých telies sústavy platí:

Teleso 2: $$P_2 = G_2 \sin\beta \; v_2 \tag{21}$$

Teleso 3: $$P_3 = M_{h3}\, \omega_3 \tag{22}$$

Teleso 4: -

Do (20) dosadíme (21), (22) a (4) a upravíme

$$M_{\text{red}}\, \omega_3 = G_2 \sin\beta\, v_{T2} + M_{h3}\, \omega_3 + 0$$

$$M_{\text{red}}\, \omega_3 = G_2 \sin\beta\, \omega_3\, r_3 + M_{h3}\, \omega_3 + 0 \qquad /.\frac{1}{\omega_3}$$

$$M_{\text{red}} = G_2 \sin\beta\, r_3 + M_{h3} \tag{23}$$

c) Výpočet uhlového zrýchlenia redukovaného člena α_3

Uhlové zrýchlenie telesa 3 a zároveň telesa α_3, na ktoré sústavu redukujeme, je kinematickou veličinou, ktorú nepoznáme. Je potrebné určiť toto zrýchlenie na základe známych parametrov v_2 a s_2, pričom vieme, že sústava sa rozbieha z pokoja konštantným zrýchlením a_2. Platí

$$a_2 = \text{konšt.}$$

$$a_2 = \frac{v\,\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \text{konšt.}$$

$$a_2\,\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}v$$

$$a_2 \int_0^{s_2} \mathrm{d}s = \int_0^{v_2} v\,\mathrm{d}v$$

$$a_2\, s_2 = \frac{v_2^2}{2}$$

$$a_2 = \frac{v_2^2}{2 s_2} \tag{24}$$

Aplikujme závislosť rýchlostí (1) pre vzájomnú závislosť zrýchlení telies 2 a 3

$$a_2 = \alpha_3\, r_3 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_3 = \frac{a_2}{r_3}$$

Dosadením za a_2 vzťah (24) dostávame vzťah pre α_3

$$\alpha_3 = \frac{v_2^2}{2\, r_3\, s_2} \tag{25}$$

d) Výpočet veľkosti hnacieho momentu M_{h3}

Dosadením rovníc (19), (23) a (25) do rovnice (9)

$$M_{\text{red}} = I_{\text{red}}\, \alpha_3$$

$$G_2 \sin\beta\, r_3 + M_{h3} = (m_2\, r_3^2 + m_3\, i_{T3}^2 + \frac{3}{8} m_4\, R_3^2)\frac{v_2^2}{2\, r_3\, s_2}$$

dostávame hľadanú veľkosť hnacieho momentu M_{h3}

$$M_{h3} = (m_2\, r_3^2 + m_3\, i_{T3}^2 + \frac{3}{8} m_4\, R_3^2)\frac{v_2^2}{2\, r_3\, s_2} - G_2 \sin\beta\, r_3 \tag{26}$$

LITERATÚRA

[1] MONKOVÁ, K.- ŠMERINGAIOVÁ, A.: *Vybrané kapitoly z dynamiky I.* Praha: Asociace RISE, 2013, 192 s. ISBN 978-80-87670-11-8

[2] ŠMERINGAIOVÁ, A.- GAŠPÁR, Š.: *Technická mechanika II*. Návody na cvičenia. Prešov: FVT TU, 2013. 175 s. ISBN 978-80-553-1583-6