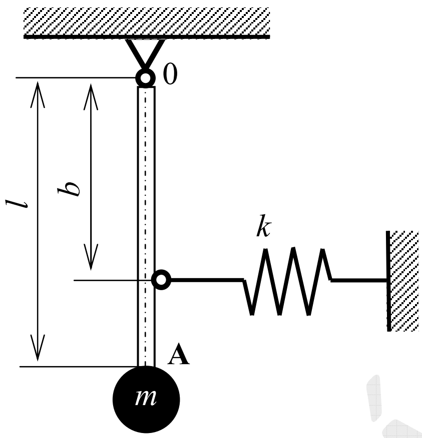
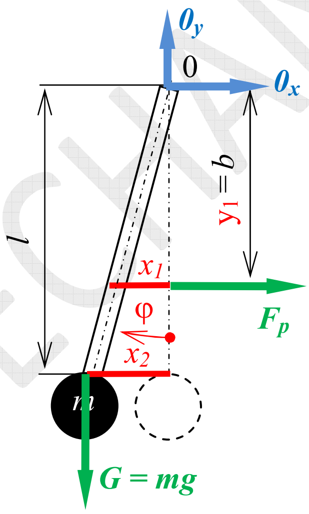
VOĽNÉ NETLMENÉ KMITANIE LINEÁRNYCH MECHANICKÝCH SÚSTAV S JEDNÝM STUPŇOM VOĽNOSTI

PRÍKLAD 6.12: Nehmotná tyč (m = 0) dĺžky l je spolu s hmotným bodom hmotnosti m viazaná k rámu kĺbom v bode 0 a nehmotnou pružinou tuhosti k podľa *obrázku 6.18A*. Určte dobu kmitu T tyče okolo rovnovážnej polohy pre malé výchylky.



Obrázok 6.18A



Obrázok 6.18B

Nehmotná tyč dĺžky l je k rámu upevnená kĺbom v bode 0 a pružinou tuhosti k. Na druhom konci je k nej pripevnený bezrozmerný hmotný bod. Pri malom vychýlení sústavy z rovnovážnej polohy a jej následnom uvoľnení začína mechanická sústava kmitať okolo stáleho stredu otáčania umiestneného v bode 0.

Ak neuvažujeme pasívne odpory, na harmonický kmitavý pohyb majú vplyv momenty od tiažovej sily hmotného bodu a od vratnej sily v pružine (*Obrázok 6.18B*). Reakcie 0_x a 0_y v kĺbe 0 neovplyvnia dobu kmitu sústavy, nakoľko pri riešení vychádzame z momentovej pohybovej rovnice mechanickej sústavy k stredu otáčania v bode 0:

$$\boxed{\Sigma M_{i0} = I_0\,\alpha = I_0\,\ddot{\varphi}};$$

pričom za kladný moment považujeme moment orientovaný v smere kladnej uhlovej výchylky. Ak pre veľmi malé uhly φ $(\varphi \le 5°)$ platí: $\sin\varphi \doteq \varphi$; $\cos\varphi \doteq 1$, potom

$$x_1 = b\sin\varphi = b\varphi$$
$$x_2 = l\sin\varphi = l\varphi$$
$$y_1 = b\cos\varphi = b$$

Moment zotrvačnosti sústavy hmotnej tyče a hmotného bodu k osi rotácie v bode 0:

$$I_0 = I_{TYČ_0} + I_{HB_0},$$

Moment zotrvačnosti nehmotnej tyče k jej krajnému bodu

$$I_{TYČ_0} = 0$$

Moment zotrvačnosti hmotného bodu určíme pomocou Steinerovej vety. Všeobecne platí:

$$\boxed{I_0 = I_T + mc^2}$$

kde I_T je moment zotrvačnosti telesa k osi prechádzajúcej jeho ťažiskom a c je vzdialenosť ťažiska telesa od stáleho stredu otáčania v bode 0, resp. v priestore je to vzdialenosť od osi rotácie. Pre hmotný bod platí, že $I_{HB_T} = 0$ vzhľadom na to, že hmotný bod je bezrozmerný. Potom

$$I_{HB_0} = 0 + ml^2 = ml^2$$

Moment zotrvačnosti nehmotnej tyče vzhľadom na jej zanedbateľnú hmotnosť je

$$I_{TYČ_0} = 0$$

Moment zotrvačnosti celej mechanickej sústavy k stredu otáčania v bode 0

$$I_0 = I_{TYČ_0} + I_{HB_0} = 0 + ml^2$$

$$I_0 = ml^2$$

Pre silu v pružine platí

$$F_p = k\,x_1$$

Momentová pohybová rovnica mechanickej sústavy

$$I_0\,\ddot{\varphi} = -F_p\,y_1 - G_{HB}\,x_2$$

$$ml^2\,\ddot{\varphi} = -kx_1b - mg\,l\varphi$$

$$ml^2\,\ddot{\varphi} = -kb\varphi b - mg\,l\varphi = -\varphi\left(kb^2 + mgl\right)$$

Momentovú pohybovú rovnicu upravíme na *tvar základnej rovnice nevynúteného netlmeného kmitania*

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \Omega_0^2\varphi = 0}$$

$$\ddot{\varphi}+\frac{\left(kb^2+mgl\right)}{ml^2}\varphi=0$$

Z rovnice voľného netlmeného kmitania sústavy vyplýva vzťah pre vlastnú uhlovú frekvenciu

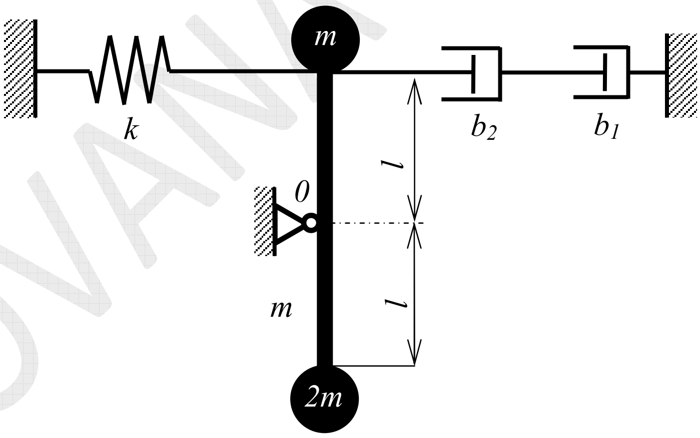
$$\Omega_0^2=\frac{\left(kb^2+mgl\right)}{ml^2}$$

Potom dobu kmitu mechanickej sústavy vypočítame

$$T=\frac{2\pi}{\Omega_0}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\left(kb^2+mgl\right)}{ml^2}}}$$

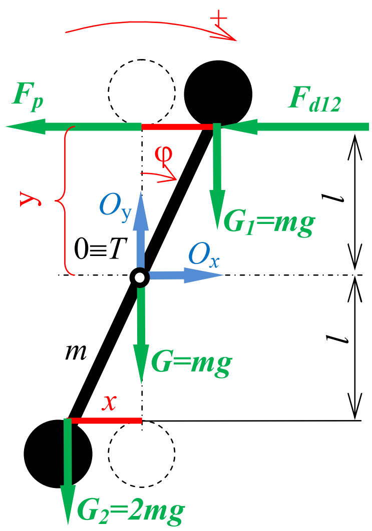
VOĽNÉ TLMENÉ KMITANIE LINEÁRNYCH MECHANICKÝCH SÚSTAV S JEDNÝM STUPŇOM VOĽNOSTI

PRÍKLAD 6.13: Tyč hmotnosti m a dĺžky $2l$ je spolu s hmotnými bodmi hmotností m a $2m$ viazaná k rámu kĺbom v bode 0, nehmotnou pružinou (k) a tlmičmi (b_1, b_2) podľa *obrázku 6.19*. Určte dobu kmitu tyče okolo rovnovážnej polohy a frekvenciu kmitania.



Obrázok 6.19

Hmotná tyč je k rámu upevnená kĺbom v bode 0, pružinou s lineárnou charakteristikou a dvoma tlmičmi s lineárnym viskóznym tlmením. Ak je sústava hmotnej tyče a dvoch hmotných bodov v zvislej rovnovážnej polohe, k statickej výchylke mechanickej sústavy nedochádza. Tiaž všetkých hmotných objektov má potom vplyv na priebeh kmitavého pohybu sústavy. Ak neuvažujeme vplyv pasívnych odporov, potom pri malom pootočení telesa z rovnovážnej polohy a jeho následnom uvoľnení budú na teleso pôsobiť momenty od tiažových síl hmotných bodov, od vratnej sily v pružine a od tlmiacej sily v tlmičoch. Tiaž hmotnej tyče a reakcie v kĺbe pôsobia v strede otáčania, preto je ich otáčavý účinok k tomuto bodu nulový.



Obrázok 6.20

Pri riešení vychádzame z momentovej pohybovej rovnice mechanickej sústavy:

$$\Sigma M_{i0} = I_0\,\alpha = I_0\,\ddot{\varphi}$$

Ak pre veľmi malé uhly φ $(\varphi \leq 5°)$ platí:

$\sin\varphi \doteq \varphi$;

$\cos\varphi \doteq 1$,

potom

$$x = l\sin\varphi = l\varphi$$

$$\dot{x} = l\dot{\varphi}\cos\varphi = l\dot{\varphi}$$

$$y = l\cos\varphi = l$$

Tlmiaci účinok oboch tlmičov zapojených za sebou, t. j. *sériovo*, vyjadríme výslednou tlmiacou silou F_{b12}. Potom súčiniteľ lineárneho tlmenia b_{12} je určený vzťahom

$$\frac{1}{b_{12}} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} \quad \Rightarrow \quad b_{12} = \frac{b_1\,b_2}{b_1 + b_2}$$

Moment zotrvačnosti sústavy hmotnej tyče a hmotného bodu k osi rotácie v bode 0:

$$I_0 = I_{TY\check{C}_0} + I_{HB1_0} + I_{HB2_0}\,,$$

Moment zotrvačnosti tyče k jej ťažisku T je vo všeobecnosti určený vzťahom:

$$\boxed{I_{TY\check{C}_T} = \frac{1}{12}m\,l^2},$$

kde m je hmotnosť tyče a l je celková dĺžka tyče. V našom prípade $T \equiv 0$, potom platí

$$I_{TY\check{C}_0} = I_{TY\check{C}_T} = \frac{1}{12}m(2l)^2$$

Moment zotrvačnosti hmotných bodov určíme pomocou Steinerovej vety

$$\boxed{I_{HB0} = I_T + mc^2 = 0 + mc^2},$$

$$I_{HB1_0} = 0 + ml^2$$

$$I_{HB2_0} = 0 + 2ml^2$$

Výsledný moment zotrvačnosti sústavy k stredu otáčania 0 je daný vzťahom

$$I_0 = \frac{1}{12} m (2l)^2 + ml^2 + 2ml^2$$

$$I_0 = \frac{10}{3} ml^2$$

Pre silu v pružine platí

$$F_p = k\, x$$

Výsledná tlmiaca sila

$$F_{d12} = b_{12}\, \dot{x}$$

Momentová pohybová rovnica mechanickej sústavy k bodu 0:

$$I_0\, \ddot{\varphi} = -F_p\, y - F_{d12}\, y - G_2\, x + G_1\, x$$

$$\frac{10}{3} ml^2\, \ddot{\varphi} = -k x l - b_{12} \dot{x} l - 2mgl\varphi + mg l\varphi$$

$$\frac{10}{3} ml^2\, \ddot{\varphi} = -kl\varphi l - b_{12} l\dot{\varphi} l - 2mgl\varphi + mg l\varphi$$

$$\frac{10}{3} ml^2\, \ddot{\varphi} = -b_{12} l^2 \dot{\varphi} - \varphi l (kl + mg)$$

Pohybovú rovnicu upravíme na tvar základnej rovnice nevynúteného tlmeného kmitania

$$\boxed{\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \Omega_0^2 x = 0}$$

$$\ddot{\varphi} + \dot{\varphi} \frac{3b_1 b_2}{10m(b_1 + b_2)} + \varphi \frac{3(kl + mg)}{10ml} = 0$$

Z rovnice nevynúteného tlmeného kmitania sústavy vyplýva

- vzťah pre konštantu útlmu δ

$$2\delta = \frac{3b_1 b_2}{10m(b_1 + b_2)} \qquad \Rightarrow \qquad \delta = \frac{3b_1 b_2}{20m(b_1 + b_2)}$$

- vzťah pre vlastnú uhlovú frekvenciu netlmeného kmitania

$$\Omega_0^2 = \frac{3(kl + mg)}{10ml}$$

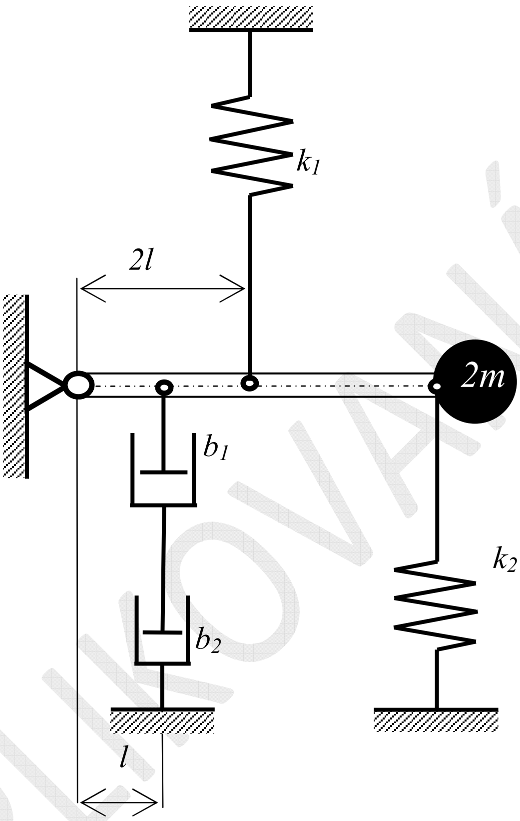
- vzťah pre vlastnú uhlovú frekvenciu tlmenej sústavy pre prípad pomerne malého tlmenia, ak $\Omega_0 > \delta$

$$\Omega_d = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{3(kl+mg)}{10ml} - \left(\frac{3b_1 b_2}{20m(b_1+b_2)}\right)^2}$$

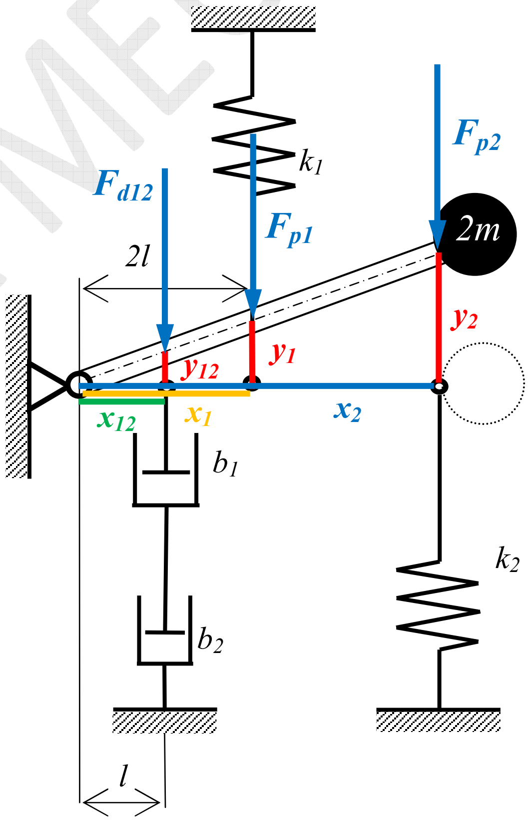
Potom dobu kmitu sústavy vypočítame

$$T_d = \frac{2\pi}{\Omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3(kl+mg)}{10ml} - \left(\frac{3b_1 b_2}{20m(b_1+b_2)}\right)^2}}$$

PRÍKLAD 6.14: Nehmotná tyč dĺžky *4l* je spolu s hmotným bodom hmotnosti *2m* viazaná k rámu kĺbom, nehmotnými pružinami a tlmičmi podľa *obrázku 6.14A*. Určte dobu kmitu tyče okolo rovnovážnej polohy a frekvenciu kmitania.



Obrázok 6. 21A



Obrázok 6.21B

Hľadané: T_d, f_d

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}.2\delta + \varphi.\Omega_0^2 = 0} \qquad \ddot{\varphi} = \alpha(t)$$

Pohybová rovnica:

$$I_0.\alpha = \sum M_{i0}$$

$$I_0.\ddot{\varphi} = -F_{d12}.x_{12} - F_{p1}.x_1 - F_{p2}.x_2$$

Vyjadrenie: $\boldsymbol{F_{p1}, F_{p2}, F_{d12}}$

$F_{p1} = k_1.y_1$

$F_{p2} = k_2.y_2$

$F_{d12} = b_{12}.v = b_{12}.\dot{y_{12}}$

Vyjadrenie: $\boldsymbol{b_{12}}$

$$\frac{1}{b_{12}} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}$$

$b_1.b_2 = b_{12}.(b_1 + b_2)$

$$b_{12} = \frac{b_1.b_2}{b_1 + b_2}$$

Vyjadrenie: $\boldsymbol{x_{12}, x_1, x_2, y_{12}, \dot{y_{12}}, y_1, y_2}$

- pre veľmi malé vychýlenia platí:

$$\boxed{\sin\varphi \doteq \varphi} \qquad \boxed{\cos\varphi \doteq 1}$$

$$\sin\varphi = \frac{y_{12}}{l} \quad \rightarrow \quad y_{12} = l.\sin\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{x_{12}}{l} \quad \rightarrow \quad x_{12} = l.\cos\varphi$$

$x_{12} = l.\cos\varphi \doteq l$

$x_1 = 2.l.\cos\varphi \doteq 2l$

$x_2 = 4.l.\cos\varphi \doteq 4l$

$y_{12} = l.\sin\varphi$

$y_1 = 2.l.\sin\varphi \doteq 2l\varphi$

$y_2 = 4.l.\sin\varphi \doteq 4l\varphi$

$\dot{y_{12}} = l.\dot{\varphi}.\cos\varphi \doteq l\dot{\varphi}$

Moment zotrvačnosti:

$I_0 = I_{0HB} = 32ml^2$

$I_{0HB} = I_{T_{HB}} + m\, c_{(T-0)}^2 = 0 + 2m\,(4l)^2 = 32ml^2$

Pohybová rovnica po doplnení DR:

$$32ml^2\,\ddot{\varphi} = -b_{12}.l^2.\dot{\varphi} - k_1.4.l^2.\varphi - k_2.16.l^2.\varphi \qquad /:32ml^2$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{b_1.b_2.l^2}{(b_1 + b_2).32.m.l^2}\,\dot{\varphi} + \left(\frac{k_1.4.l^2}{32.m.l^2} + \frac{k_2.16.l^2}{32.m.l^2}\right)\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}\left(\frac{b_1.b_2}{(b_1+b_2).32.m}\right) + \varphi\left(\frac{k_1}{8.m} + \frac{k_2}{2.m}\right) = 0$$

$$2\delta = \frac{b_1.b_2}{(b_1+b_2).32.m} \qquad /.\frac{1}{2}$$

$$\delta = \frac{b_1.b_2}{2.(b_1+b_2).32.m} = \frac{b_1.b_2}{(b_1+b_2).64.m}$$

$\Omega_0 > \delta$

$$\Omega_d = \sqrt{{\Omega_0}^2 - \delta^2}$$

$$\Omega_d = \sqrt{\left(\frac{k_1}{8.m} + \frac{k_2}{2.m}\right) - \left(\frac{b_1.b_2}{(b_1+b_2).64.m}\right)^2}$$

Doba kmitu:

$$T_d = \frac{2.\pi}{\Omega_d} = \frac{2.\pi}{\sqrt{\left(\frac{k_1}{8.m} + \frac{k_2}{2.m}\right) - \left(\frac{b_1.b_2}{(b_1+b_2).64.m}\right)^2}}$$

Frekvencia kmitania:

$$f_d = \frac{1}{T_d} = \frac{\sqrt{\left(\frac{k_1}{8.m} + \frac{k_2}{2.m}\right) - \left(\frac{b_1.b_2}{(b_1+b_2).64.m}\right)^2}}{2.\pi}$$