OBSAH

1 Centrálne silové sústavy. Rovnováha hmotného bodu 2

1.1 Priamková silová sústava – PSS 2

1.1.1 Nahradenie priamkovej silovej sústavy 2

1.1.2 Rovnováha priamkovej silovej sústavy 2

1.2 Centrálna rovinná silová sústava – CRSS 6

1.2.1 Nahradenie centrálnej rovinnej silovej sústavy 6

1.2.2 Rovnováha centrálnej rovinnej silovej sústavy 7

1.3 Centrálna priestorová silová sústava – CPSS 12

1.3.1 Nahradenie centrálnej priestorovej silovej sústavy 12

1.3.2 Rovnováha centrálnej priestorovej silovej sústavy.................................... 12

2 Všeobecné silové sústavy. Rovnobežné silové sústavy. Rovnováha telesa 16

2.1 Všeobecná rovinná silová sústava. Analytické riešenie VRSS 16

2.1.1 Nahradenie VRSS v zvolenom počiatku 16

2.1.2 Nahradenie VRSS výslednicou.. 17

2.1.3 Podmienky rovnováhy VRSS 17

2.2 Rovnobežná rovinná silová sústava. Analytické riešenie 18

2.2.1 Nahradenie RRSS v zvolenom počiatku.. 18

2.2.2 Nahradenie RRSS výslednicou 18

2.2.3 Podmienky rovnováhy RRSS 19

2.3 Grafické riešenie všeobecnej a rovnobežnej rovinnej silovej sústavy 19

2.3.1 Rovnováha štyroch síl v rovine. Culmannova úloha 19

2.3.2 Grafické určenie výslednice VRSS a RRSS 20

2.4 Všeobecná priestorová silová sústava 34

2.4.1 Nahradenie VPSS v zvolenom počiatku 35

2.4.2 Podmienky rovnováhy VPSS 36

2.5 Rovnobežná priestorová silová sústava... 36

2.5.1 Nahradenie RPSS v zvolenom počiatku 37

2.5.2 Nahradenie RPSS výslednicou 38

2.5.3 Rovnováha RPSS.. 38

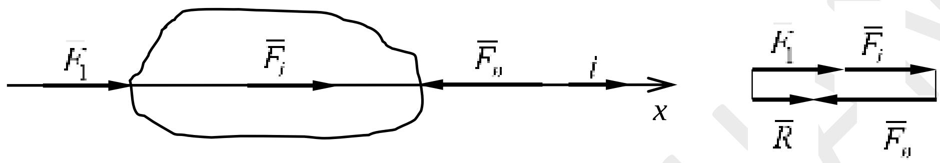
Zoznam použitej literatúry..43

1 CENTRÁLNE SILOVÉ SÚSTAVY. ROVNOVÁHA HMOTNÉHO BODU

1.1 PRIAMKOVÁ SILOVÁ SÚSTAVA – PSS

1.1.1 Nahradenie priamkovej silovej sústavy

Ak na daný objekt všetky sily pôsobia v jednej priamke, môžeme ich nahradiť jednou silou $\overline{R}$ (výslednicou), ktorej nositeľka je totožná s nositeľkou síl. Nech os x s jednotkovým vektorom $\overline{i}$ je nositeľkou síl $\overline{F_i}$ (*obr. 1.1*).



Obrázok 1.1

Potom ich výslednica

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_i \,. \tag{1.1}$$

Keďže $\overline{R} = R \cdot \overline{i}$, $\overline{F}_i = F_i \cdot \overline{i}$, je $R \cdot \overline{i} = \sum F_i \cdot \overline{i} \qquad / \cdot \overline{i}$,

z toho $R = \sum F_i$. (1.2)

Veľkosť výslednice sa rovná algebrickému súčtu síl.

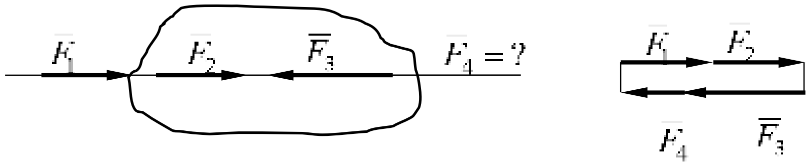
Rovnica (1.1) je jedinou podmienkou grafického riešenia a rovnica (1.2) analytického určenia výslednice PSS.

1.1.2 Rovnováha priamkovej silovej sústavy

Podmienkou rovnováhy PSS je

$$\overline{R} = \overline{0} \qquad \text{čiže} \qquad \sum \overline{F}_i = \overline{0} \,. \tag{1.3}$$

Pri grafickom riešení rovnica (1.3) znamená uzavretý tzv. *silový obrazec* (*obr. 1.2*).

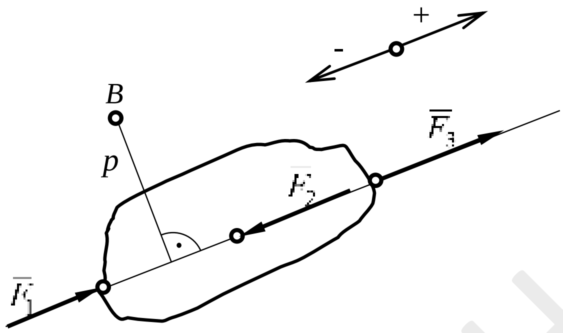


Obrázok 1.2

Pri analytickom riešení je rovnica (1.3) vyjadrená v skalárnom tvare jedinou silovou podmienkou rovnováhy

$$R = 0 \quad \text{čiže} \quad \sum F_i = 0 \,. \tag{1.4}$$

Rovnováhu PSS môžeme vyjadriť i použitím momentovej podmienky k ľubovoľnému bodu B (*obr. 1.3*), ktorý neleží na nositeľke PSS.



Obrázok 1.3

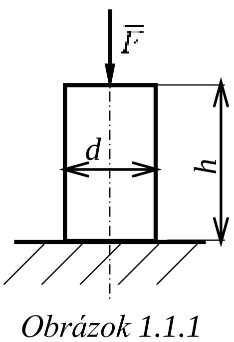
$$\sum M_{iB} = p \sum F_i = 0 \tag{1.5}$$

Záver: Pre priamkovú silovú sústavu existuje iba jediná nezávislá statická podmienka, t.j. zo statických podmienok môžeme vypočítať iba jeden neznámy parameter.

RIEŠENÉ PRÍKLADY

PRÍKLAD 1.1: Liatinový stĺp je uložený na dokonale hladkej podložke (*obr. 1.1.1*) a zaťažený zhora zvislou silou $\overline{F}$ o veľkosti F = 3000N, ktorej nositeľka prechádza ťažiskom valcového stĺpa. Určte, akou veľkou výslednou silou pôsobí stĺp na podložku a aká veľká je reakcia od podložky, ak hustota sivej liatiny je ρ = 7250 kg.m^{-}3, priemer stĺpa je d = 0,3 m a výška stĺpa h = 1,2 m.

Dané: $\overline{F}$, d, h, ρ
Hľadané: $\overline{R}$, $\overline{N}$



Obrázok 1.1.1

Riešenie: Tiaž stĺpa $\overline{G}$ pôsobí v jeho ťažisku. Ťažiskom prechádza tiež nositeľka vonkajšej sily $\overline{F}$. Obe sily ležia na tej istej nositeľke. Valcový stĺp je k podložke viazaný väzbou opretím, ktorá bráni posunutiu valca v zvislom smere nadol. Reakciou vo väzbe je potom sila pôsobiaca na spoločnej nositeľke so silami $\overline{F}$ a $\overline{G}$, ale v opačnom zmysle. Všetky tri sily tvoria priamkovú silovú sústavu (*obr. 1.1.2*).

Pri hľadaní výslednej sily $\overline{R}$ pôsobiacej na podložku, vychádzame z podmienky nahradenia sústavy síl (1.1):

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i}$$

Veľkosť reakcie $\overline{N}$ od podložky nájdeme z podmienky rovnováhy silovej sústavy pôsobiacej na hmotný objekt (1.3):

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{F_i} = \overline{0}$$

Vypočítame veľkosť tiaže valca G:

$$G = m\,g = \rho V\,g = \rho\,S\,h\,g = \rho \frac{\pi\,d^2}{4} h\,g \quad [N]$$

$$G = 7250 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}3^2}{4} \cdot 1{,}2 \cdot 9{,}81 = 6032{,}82\,N$$

Analytické riešenie: Rovnice pre výpočet hľadaných síl zostavíme na základe obrázku uvoľnenia pre analytické riešenie (*obr. 1.1.2*), v ktorom sú k valcu uvoľnenému z väzieb zakreslené všetky sily, ktoré naň pôsobia. Známe sily $\overline{F}$, $\overline{G}$ a reakcia od podložky $\overline{N}$ s predpokladanou orientáciou. Zároveň zvolíme kladnú orientáciu osi y.

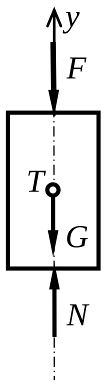
Veľkosť výslednice síl $\overline{R}$ dostaneme v prípade priamkovej silovej sústavy ako algebrický súčet všetkých síl pôsobiacich na podložku.

$$R = \sum_{i=1}^{2} F_i = F + G = 3000 + 6033 = 9033\,N$$

Veľkosť reakcie od podložky N vypočítame zo statickej podmienky rovnováhy:

$$\sum_{i=1}^{3} F_{iy} = 0 \quad ; \quad -F - G + N = 0$$

$$\Rightarrow \quad N = F + G = 3000 + 6033 = 9033\,N$$



Obrázok 1.1.2

Poznámka: *Hodnota veľkosti sily N je kladná, to znamená, že predpoklad orientácie tejto sily na začiatku riešenia bol správny.*

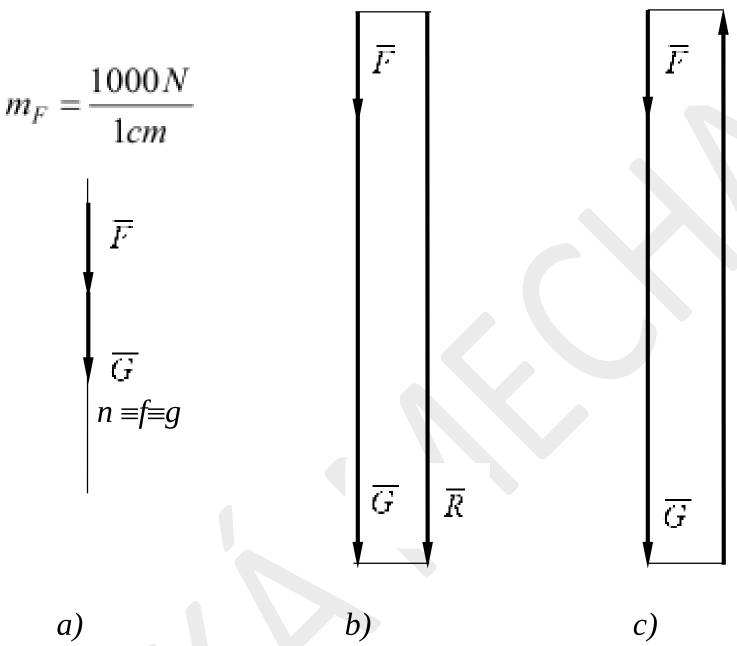
Grafické riešenie: Na základe obrázku uvoľnenia pre grafické riešenie (*obr. 1.1.3a*) zostrojíme silové obrázky (*obr. 1.1.3*).

Vektorová podmienka nahradenia: $$\overline{R} = \sum_{i=1}^{2} \overline{F}_i = \overline{F} + \overline{G}$$

Výslednú silu $\overline{R}$ určíme spojením počiatočného bodu prvej sily a koncového bodu druhej sily nanesených v zvolenej mierke síl m_F do silového obrazca (*obr. 1.1.3b*).

Vektorová podmienka rovnováhy: $$\sum_{i=1}^{3} \overline{F}_i = \overline{0} \quad ; \quad \overline{F} + \overline{G} + \overline{N} = \overline{0}$$

Podmienkou rovnováhy je uzavretý silový obrazec s orientáciou síl za sebou (*obr. 1.1.3c*).



Obrázok 1.1.3

V silovom obrázku odmeriame dĺžky grafických obrazov hľadaných síl R_g a N_g a zohľadnením použitej mierky síl určíme ich veľkosť:

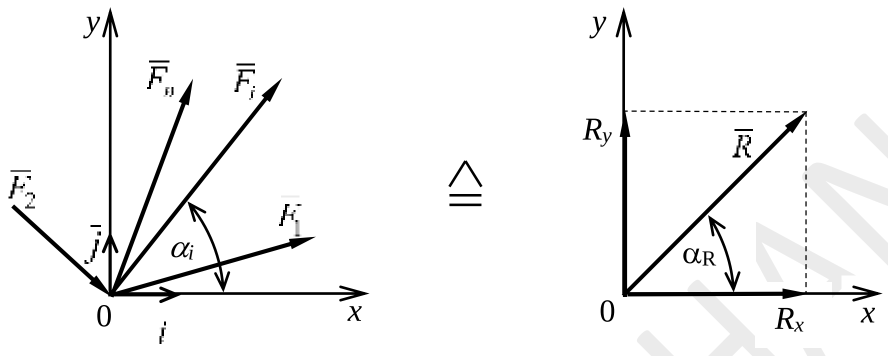
$$R_g = 9cm \quad \Rightarrow \quad R = R_g \, m_F = 9000N$$

$$N_g = 9cm \quad \Rightarrow \quad N = N_g \, m_F = 9000N$$

1.2 CENTRÁLNA ROVINNÁ SILOVÁ SÚSTAVA – CRSS

1.2.1 Nahradenie centrálnej rovinnej silovej sústavy

Nech všetky sily $\overline{F_i}$ danej silovej sústavy prechádzajú bodom 0 a ležia v jednej rovine 0(*x*,*y*) (*obr. 1.4a*). Potom silovú sústavu možno nahradiť výslednicou $\overline{R} = \overline{S}$, ktorá prechádza bodom 0 (*obr. 1.4b*).



a) *b)*

Obrázok 1.4

$$\overline{R} = \sum \overline{F_i} \tag{1.6a}$$

Po vyjadrení vektorov síl pomocou ich zložiek je

$$R_x \cdot \overline{i} + R_y \cdot \overline{j} = \sum F_{ix} \cdot \overline{i} + \sum F_{iy} \cdot \overline{j} \tag{1.6b}$$

- Ak vynásobíme skalárne rovnicu (1.6b) postupne jednotkovými vektormi $\overline{i}$ a $\overline{j}$, budú podmienky nahradenia CRSS vyjadrené dvomi skalárnymi (zložkovými) rovnicami

$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_{ix} = \sum F_i \cos \alpha_i \\ R_y &= \sum F_{iy} = \sum F_i \sin \alpha_i \end{aligned} \tag{1.7}$$

Veľkosť a smer výslednice

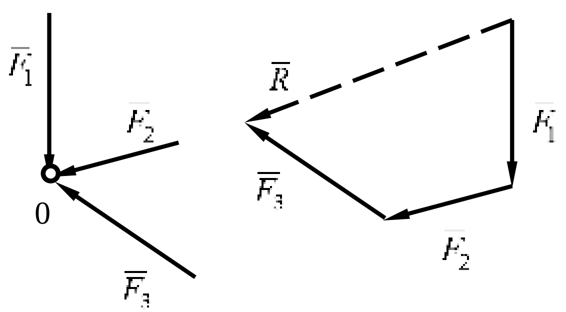
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}\,,$$

$$\cos \alpha_R = \frac{R_x}{R}\,.$$

- Pri grafickom riešení výslednica $\overline{R}$ prechádza pôsobiskom síl 0 (*obr. 1.5*) a je určená ich vektorovým súčtom v tzv. *silovom obrazci.*

$$\overline{R} = \sum \overline{F_i}$$

$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3}$$



Obrázok 1.5

1.2.2 Rovnováha centrálnej rovinnej silovej sústavy

Podmienkou rovnováhy je

$$\overline{R} = \overline{0} \qquad \text{čiže} \qquad \sum \overline{F_i} = \overline{0}. \tag{1.8}$$

- Pri analytickom riešení môžeme napísať dve nezávislé podmienky rovnováhy, a to buď dve zložkové rovnice, alebo zložkové rovnice môžeme nahradiť momentovými, využijúc Varignonovu vetu.

♦ 1. alternatíva: zložkové rovnice

$$\begin{aligned} R_x &= 0; \\ R_y &= 0; \end{aligned} \qquad \text{čiže} \qquad \begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0 \\ \sum F_{iy} &= 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

♦ 2. alternatíva: momentové rovnice

$$\begin{aligned} \left(\sum M_i\right)_A &= 0 \\ \left(\sum M_i\right)_B &= 0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Poznámka: *Body A, B a pôsobisko síl 0 nesmú ležať na jednej priamke!*

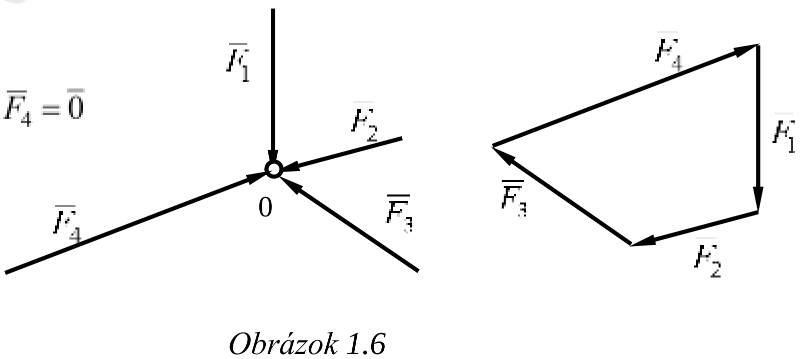
♦ 3. alternatíva: 1 zložková a 1 momentová rovnica

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0 \\ \left(\sum M_i\right)_B &= 0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Poznámka: Bod *B* nesmie ležať na osi *x*! Spojnica pôsobiska síl s bodom *B* nesmie byť kolmá na os, do ktorej sily premietame.

- Pri grafickom riešení (*obr. 1.6*) vychádzame z podmienky uzavretia silového obrazca s orientáciou síl za sebou, ktorý zodpovedá vektorovej podmienke rovnováhy $\overline{R} = \overline{0}$.

$$\overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3} + \overline{F_4} = \overline{0}$$



Obrázok 1.6

Záver: Pre CRSS môžeme napísať *len dve statické podmienky*, z ktorých môžeme určiť *dva neznáme parametre.*

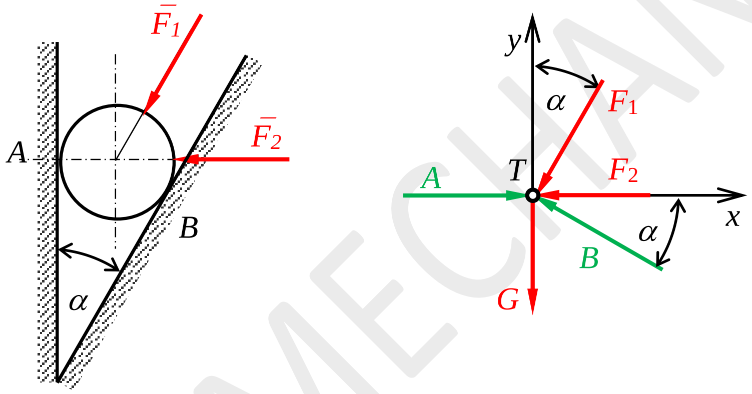
RIEŠENÉ PRÍKLADY

PRÍKLAD 1.2: Homogénny valec o tiaži $\overline{G}$ sa opiera v bode A o zvislú stenu a v bode B o hladkú naklonenú rovinu (*obr. 1.2.1a*). Uhol medzi rovinami je α. Na valec pôsobí sila $\overline{F}_1$ rovnobežná s naklonenou rovinou a vodorovná sila $\overline{F}_2$. Nositeľky oboch síl prechádzajú stredom valca. Vypočítajte reakcie $\overline{A}$ a $\overline{B}$ oporných plôch na valec, ak má byť zachovaná jeho rovnovážna poloha. Úlohu riešte analyticky a graficky.

Dané sú hodnoty: F_1 = 30 kN, F_2 = 15 kN, G = 15 kN, α = 30°.

Dané: $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{G}$, α

Hľadané: $\overline{A}$, $\overline{B}$



a) *b)*

Obrázok 1.2.1

Riešenie: V prípade homogénneho valca tiažová sila pôsobí v ťažisku T. Týmto bodom prechádzajú aj nositeľky zaťažujúcich síl: $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ a nositeľky reakcií, ktoré sú kolmé na oporné plochy valca. (*obr. 1.2.1b*). Všetky sily pôsobiace na valec tvoria potom centrálnu rovinnú silovú sústavu (CRSS). Valec považujeme za hmotný bod v rovine.

Tvarová a statická určitosť: Valec ako hmotný bod v rovine má dva stupne voľnosti pohybu (v = 2). Zvislá stena a naklonená rovina mu odoberajú po jednom stupni voľnosti pohybu (väzby opretím)(u = 2.1 = 2).

Na bod pôsobí CRSS, pre ktorú platia dve rovnice rovnováhy (r = 2), v ktorých budú dva neznáme parametre (n_p = 2).

Keďže v = r = 2 au = n_p = 2, môžeme počet stupňov voľnosti pohybu viazaného objektu a stupeň statickej určitosti určiť spoločnou rovnicou väzbovej závislosti:

$$i = i_S = v - u = 2 - (1 + 1) = 0$$

Úloha je tvarovo a staticky určitá. To znamená, že valec po zaťažení nemení svoju polohu a úloha je riešiteľná s jedným jednoznačným výsledkom.

Analytické riešenie: Valec, resp. hmotný bod uvoľníme z väzieb. Účinok väzieb nahradíme väzbovými reakciami (*obr. 1.2.1b*).

K uvoľnenému hmotnému bodu zakreslíme najprv sily známe, potom sily neznáme (reakcie vo väzbách). Pri neznámych silách môžeme ich orientáciu len predpokladať. Zvolíme vhodnú súradnicovú sústavu s počiatkom v bode *T*.

Rovnováhu danej centrálnej rovinnej silovej sústavy môžeme riešiť pomocou dvoch silových podmienok rovnováhy

$$\sum F_{ix} = 0: \quad -F_1 \sin\alpha - F_2 + A - B\cos\alpha = 0 \tag{a}$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad -F_1 \cos\alpha - G + B\sin\alpha = 0 \tag{b}$$

z (b): $$B = \frac{F_1 \cos\alpha + G}{\sin\alpha} \quad [kN]$$

z (a): $$-F_1 \sin\alpha - F_2 + A - \left(\frac{F_1 \cos\alpha + G}{\sin\alpha}\right)\cos\alpha = 0 \qquad / \sin\alpha$$

$$-F_1 \sin^2\alpha - F_2 \sin\alpha + A\sin\alpha - F_1 \cos^2\alpha - G\cos\alpha = 0$$

$$-F_1\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) - F_2 \sin\alpha + A\sin\alpha - G\cos\alpha = 0$$

$$A = \frac{F_1 + F_2 \sin\alpha + G\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad [kN].$$

Po dosadení číselných hodnôt dostaneme: A = 100,96 kN

B = 81,96 kN

Hodnoty vypočítaných veľkosti oboch síl sú kladné. To znamená, že orientácia predpokladaná pri uvoľňovaní hmotného bodu odpovedá skutočnej orientácii síl.

Grafické riešenie: Zvolíme vhodnú mierku síl m_F. Uvoľníme hmotný bod. Zakreslíme známe sily $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ a $\bar{G}$ a z neznámych reakcií $\bar{A}$, $\bar{B}$ len ich známe parametre, v našom prípade nositeľky síl *a*, *b* (*obr. 1.2.4*). Platí vektorová podmienka rovnováhy

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{G} + \bar{A} + \bar{B} = \bar{0}, \tag{c}$$

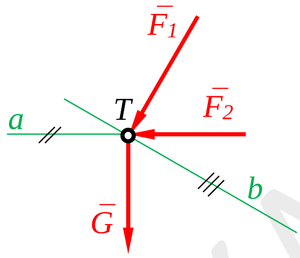
ktorá vyjadruje rovnováhu piatich síl. Známe sily $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{G}$ nanesieme v mierke síl do silového obrazca a graficky sčítame, čím ich nahradíme ich výslednicou $\bar{R}$. Potom platí

$$\bar{R} + \bar{A} + \bar{B} = \bar{0}. \tag{d}$$

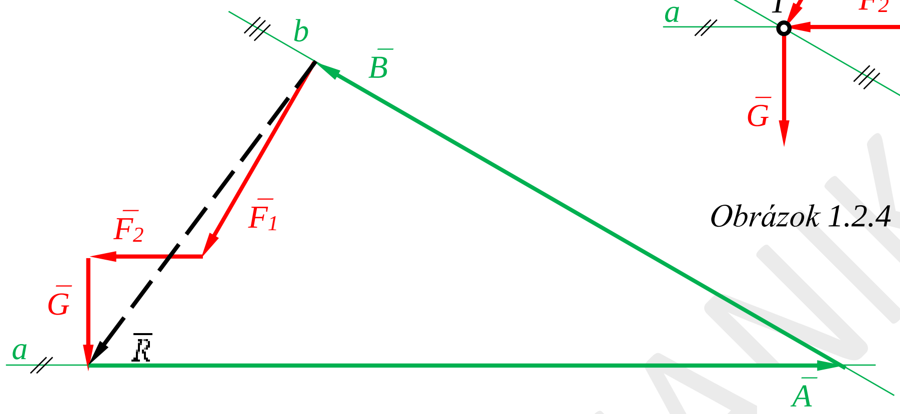
Rovnica (d) vyjadruje rovnováhu troch síl, z ktorých poznáme výslednicu: $\bar{R}$ a nositeľky *a* a *b* hľadaných síl. Ich veľkosť a orientáciu určíme z podmienky uzavretia silového obrazca (*obr. 1.2.5*) zodpovedajúceho tejto vektorovej rovnici tak, že v počiatočnom a koncovom bode reťazca známych síl (resp. výslednice: $\bar{R}$) vedieme rovnobežky s nositeľkami neznámych síl. Po zostrojení silového obrazca odmeriame veľkosti grafických obrazov hľadaných reakcií a po zohľadnení použitej mierky síl dostaneme:

$$A_g = 10cm \quad \Rightarrow \quad A = A_g\, m_F = 100kN$$
$$B_g = 8{,}1cm \quad \Rightarrow \quad B = B_g\, m_F = 81kN$$

$$m_F = \frac{10kN}{1cm}$$



Obrázok 1.2.4

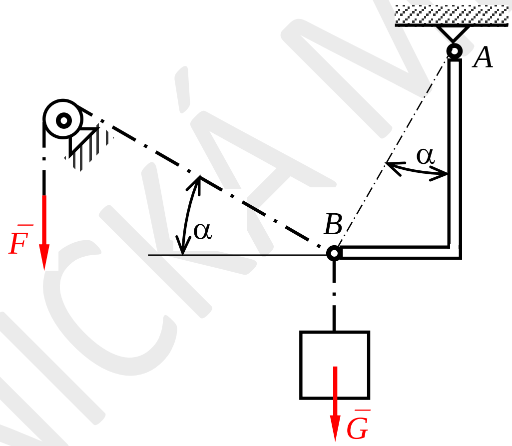


Obrázok 1.2.5

PRÍKLAD 1.3: Teleso *AB* tvaru L (*obr. 1.3.1*) je otočne uložené v bode *A* a v bode *B* je v danej polohe držané lanom prevlečeným cez kladku. V bode *B* je teleso zaťažené bremenom o tiaži *G* = 50 N. Vypočítajte veľkosť sily $\bar{F}$ a osovú silu v prúte $\bar{N}$ pri rovnováhe bremena v danej polohe. Úlohu riešte analyticky a graficky. Daný je uhol α = 30°. Hmotnosť telesa *AB* zanedbajte.

Dané: $\bar{G}$, α

Hľadané: $\bar{N}$, $\bar{F}$



Obrázok 1.3.1

Riešenie: V bode *B* pôsobí tiaž bremena $\bar{G}$. V tom istom bode sa prejaví účinok reakcie v telese *AB*, ako aj sily $\bar{F}$, ktorej úlohou je udržať bremeno v danej rovnovážnej polohe. Nositeľky všetkých troch síl ležia v jednej spoločnej rovine a účinok síl sa prejaví v jednom spoločnom bode. Hovoríme o centrálnej rovinnej silovej sústave a bod *B* považujeme za hmotný bod v rovine.

Tvarová a statická určitosť: Bod *B* ako voľný hmotný bod v rovine má dva stupne voľnosti pohybu. K rámu je viazaný telesom *AB*, ktoré je v tomto prípade väzbou prútom a odoberá jeden stupeň voľnosti pohybu.

Počet stupňov voľnosti pohybu viazaného bodu *B* je daný väzbovou závislosťou

$$i = v - u = 2 - 1 = 1.$$

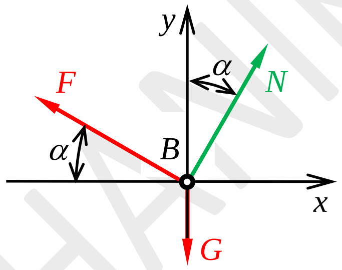
Úloha je raz tvarovo neurčitá a raz staticky preurčená, to znamená, že bod *B* môže po zaťažení zmeniť svoju polohu. Rovnovážnu polohu bodu *B* zabezpečíme pomocou lana, v ktorom pôsobí sila $\bar{F}$ potrebnej veľkosti.

Analytické riešenie: Bod *B* uvoľníme z väzieb. Zakreslíme k nemu známu tiažovú silu $\bar{G}$ a neznáme sily $\bar{N}$ a $\bar{F}$ s predpokladanou orientáciou. Nositeľka sily $\bar{N}$ leží na spojnici bodov *A* a *B*, pretože na objekt *AB* pôsobia okolité predmety v dvoch bodoch (t. j. dve sily). Na základe axiómu akcie a reakcie sú dve sily v rovnováhe vtedy, ak ležia na jednej nositeľke, t.j. v našom prípade na spojnici bodov *AB*. Zvolíme vhodnú súradnicovú sústavu.

Napíšeme dve statické podmienky rovnováhy

$$\sum F_{ix} = 0: \qquad -F\cos\alpha + N\sin\alpha = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\sum F_{iy} = 0: \qquad -G + F\sin\alpha + N\cos\alpha = 0 \qquad \text{(b)}$$



Obrázok 1.3.2

Ich riešením dostaneme

z (a): $F = \dfrac{N\sin\alpha}{\cos\alpha} = N\,tg\alpha \quad [N]$

z (b): $-G + N\,tg\alpha\,\sin\alpha + N\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad N = \dfrac{G}{\sin\alpha\,tg\alpha + \cos\alpha} \quad [N].$

Po dosadení číselných hodnôt dostaneme: N = 43,3 N

F = 25 N.

Poznámka: *Riešením sme dostali veľkosti oboch síl s kladným znamienkom, to znamená, že orientácia predpokladaná pri uvoľňovaní odpovedá skutočnej orientácii síl.*

Grafické riešenie: Zvolíme vhodnú mierku síl m_F. Uvoľníme bod *B*. Zakreslíme k nemu známu silu $\bar{G}$ (*obr. 1.3.3*) a z neznámych síl $\bar{F}$ a $\bar{N}$ len ich známe nositeľky n a f. Ich veľkosť a orientáciu nájdeme uzavretím silového obrazca s orientáciou síl za sebou, ktorý zodpovedá vektorovej podmienke rovnováhy

$$\bar{G} + \bar{F} + \bar{N} = \bar{0} \qquad \text{(c)}$$

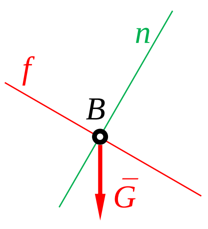
Zostrojíme silový obrazec (*obr. 1.3.4*). V mierke síl zakreslíme najprv silu známu. V počiatočnom a koncovom bode vektora $\bar{G}$ vedieme rovnobežky s nositeľkami *f* a *n* neznámych síl tak, aby sme dostali uzavretý silový trojuholník, z ktorého zistíme veľkosti a orientácie hľadaných reakcií.

Výsledky riešenia:

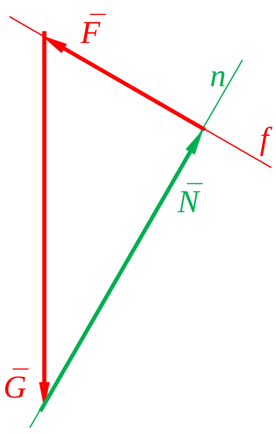
$$N_g = 4{,}3cm \quad \Rightarrow \quad N = N_g\,m_F = 43N$$

$$F_g = 2{,}5cm \quad \Rightarrow \quad F = F_g\,m_F = 25N$$

$$m_F = \frac{10N}{1cm}$$



Obrázok 1.3.3

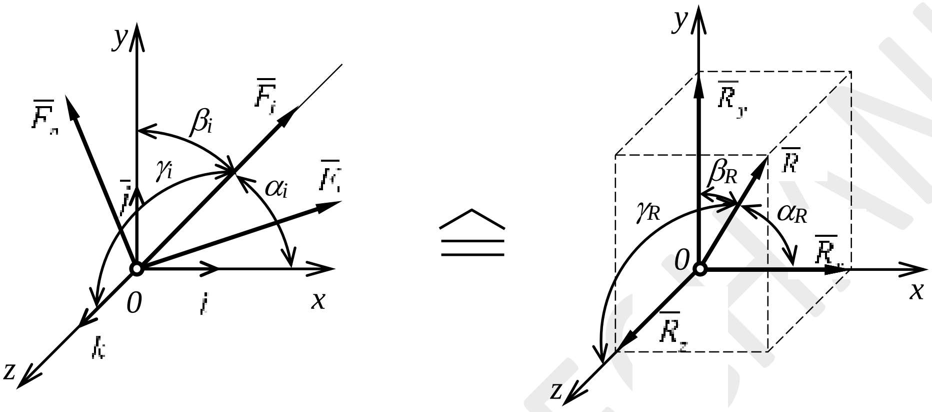


Obrázok 1.3.4

1.3 CENTRÁLNA PRIESTOROVÁ SILOVÁ SÚSTAVA – CPSS

1.3.1 Nahradenie centrálnej priestorovej silovej sústavy

Nech v jednom bode pôsobí priestorová silová sústava *n* síl. Každá sila tejto silovej sústavy nech je určená veľkosťou a smerom (*obr. 1.7a*). Všetky sily môžeme nahradiť jedinou silou, ich výslednicou $\overline{R}$ (*obr. 1.7b*), ktorá musí prechádzať spoločným pôsobiskom síl. Sila $\overline{R}$ ako výslednica úplne nahradí danú CPSS.



a) *b)*

Obrázok 1.7

Poznámka: *Pri CPSS sa budeme zaoberať iba analytickým riešením.*

V pravouhlej súradnicovej sústave $0(x,\ y,\ z)$ môžeme výslednicu $\overline{R}$ rozložiť na zložky $\overline{R}_x, \overline{R}_y, \overline{R}_z$ (*obr. 1.7*)

$$\overline{R} = \overline{R}_x + \overline{R}_Y + \overline{R}_z$$

Podmienky nahradenia

$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_{ix} = \sum F_i \cos\alpha_i \\ R_y &= \sum F_{iy} = \sum F_i \cos\beta_i \\ R_z &= \sum F_{iz} = \sum F_i \cos\gamma_i \end{aligned} \qquad (1.12)$$

Veľkosť výslednice $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$

Poloha výslednice $\cos\alpha_R = \dfrac{R_x}{R}$, $\cos\beta_R = \dfrac{R_y}{R}$, $\left(\cos\gamma_R = \dfrac{R_z}{R}\right)$

1.3.2 Rovnováha centrálnej priestorovej silovej sústavy

CPSS bude v rovnováhe, keď jej výslednica $\overline{R}$ sa bude rovnať nule. (To znamená, že jej výsledný posuvný a otáčavý účinok k ľubovoľnému bodu v priestore je rovný nule.)

♦ 1. alternatíva: *zložkové rovnice*

Aby výslednica bola nulová, musia byť všetky jej tri priemety rovné nule.

$$\sum F_{ix} = 0$$
$$\sum F_{iy} = 0 \qquad (1.13)$$
$$\sum F_{iz} = 0$$

♦ 2. alternatíva: *momentové rovnice*

Na základe *Varignonovej vety* môžeme vyjadriť podmienky rovnováhy aj momentovými rovnicami vzhľadom k ľubovoľným osiam *a*, *b*, *c* v priestore:

$$\left(\sum M_i\right)_a = 0$$
$$\left(\sum M_i\right)_b = 0$$
$$\left(\sum M_i\right)_c = 0 \qquad (1.14)$$

Poznámka: Žiadna z osí a, b, c nesmie prechádzať spoločným pôsobiskom silovej sústavy a osi a, b, c sa nesmú pretínať v jednom bode ani byť navzájom rovnobežné.

♦ 3. alternatíva: *2 momentové a 1 zložková rovnica*

$$\left(\sum M_i\right)_a = 0$$
$$\left(\sum M_i\right)_b = 0 \qquad (1.15)$$
$$\sum F_{ix} = 0$$

Poznámka: Osi *a*, *b* nesmú prechádzať pôsobiskom silovej sústavy. Nesmú sa pretínať v rovine, ktorá prechádza cez pôsobisko CPSS a je kolmá k osi *x*. Osi *a*, *b* nesmú byť navzájom rovnobežné, ak sú obe súčasne rovnobežné so spomínanou rovinou.

♦ 4. alternatíva: *2 zložkové a 1 momentová rovnica*

$$\sum F_{ix} = 0$$
$$\sum F_{iy} = 0 \qquad (1.16)$$
$$\left(\sum M_i\right)_a = 0$$

Poznámka: Os a nesmie prechádzať cez pôsobisko CPSS a nesmie byť kolmá na rovinu určenú osami x, y.

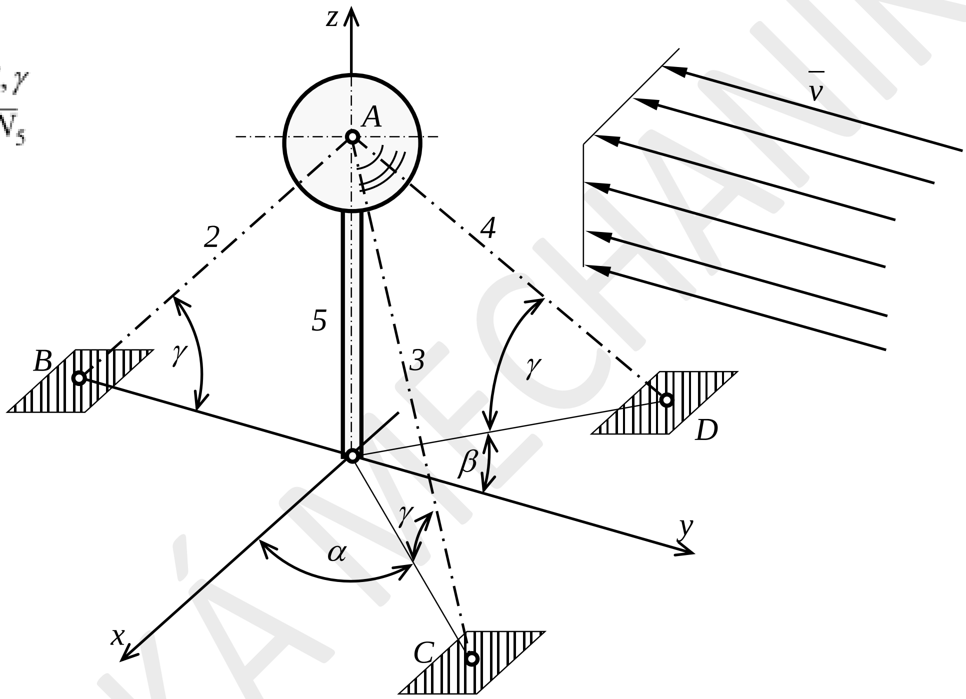
Podobne ako v rovine, aj v priestore pri počtárskom riešení vždy vopred predpokladáme orientáciu neznámych síl. Ak riešením dostaneme pre danú neznámu znamienko kladné, volili sme správnu orientáciu, ak dostaneme znamienko záporné, skutočná orientácia tejto sily je opačná, ako sme predpokladali.

RIEŠENÉ PRÍKLADY

PRÍKLAD 1.4: Na vodojem tvaru gule o tiaži $\overline{G}$ pri rýchlosti vetra v = 80 km/hod pôsobí horizontálna sila F = 2,5 kN (*obr. 1.4.1*). Vypočítajte veľkosti osových síl v kotevných lanách a v podpernom stĺpe, ak smer pôsobenia vetra je totožný so smerom osi y zvolenej súradnicovej sústavy $0(x, y, z)$, ale opačného zmyslu, ako kladná os y. Dané sú $G = 30N$, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 55°$. Úlohu riešte analyticky.

Dané: $v, F, G, \alpha, \beta, \gamma$

Hľadané: $\overline{N}_3, \overline{N}_4, \overline{N}_5$



Obrázok 1.4.1

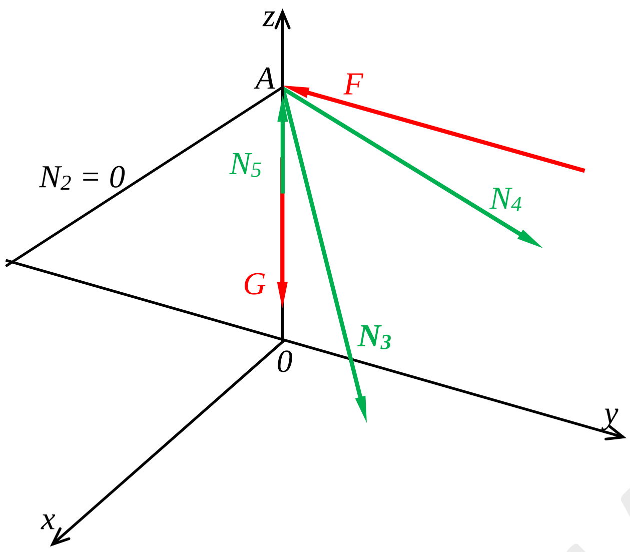
Riešenie: Nositeľky všetkých daných síl, ako aj hľadaných síl pôsobiacich v lanách prechádzajú ťažiskom vodojemu (bodom A), preto úlohu riešime ako rovnováhu CPSS pôsobiacej na bod v priestore. Bod A uvoľníme a väzby nahradíme príslušnými reakciami (*obr. 1.4.2*). S ohľadom na zadanie príkladu osová sila v lane *2* je $N_2 = 0$ (*v lane môže pôsobiť len ťahová sila!*).

Tvarová a statická určitosť: Guľa vodojemu, resp. bod A ako bod v priestore má tri stupne voľnosti pohybu (možnosť posuvného pohybu v smere osí x, y, z zvolenej súradnicovej sústavy). Hmotný bod je v našom prípade viazaný k základni dvoma lanami *3, 4* a stĺpom *5* (dva krát väzba lanom, jeden krát väzba prútom). Lano *2* pri danom smere vetra je uvoľnené, nemôže plniť funkciu väzby.

Väzbovú závislosť daného hmotného bodu vypočítame:

$$i = v - u = 3 - (1_3 + 1_4 + 1_5) = 0$$

Úloha je tvarovo určitá.



Obrázok 1.4.2

Analytické riešenie: Pri riešení rovnováhy danej CPSS máme k dispozícii tri silové podmienky rovnováhy, z ktorých vypočítame veľkosti hľadaných síl N_3, N_4, N_5 . Úloha je teda aj staticky určitá.

$$\sum F_{ix} = 0: \quad N_3 \cos\gamma \cos\alpha - N_4 \cos\gamma \sin\beta = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad N_3 \cos\gamma \sin\alpha + N_4 \cos\gamma \cos\beta - F = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$\sum F_{iz} = 0: \quad -N_3 \sin\gamma - N_4 \sin\gamma + N_5 - G = 0 \qquad \text{(c)}$$

Riešením dostaneme: $N_3 = N_4 \dfrac{\cos\gamma \sin\beta}{\cos\gamma \cos\alpha}$

Pretože $\alpha + \beta = 90°$, platí: $N_3 = N_4$

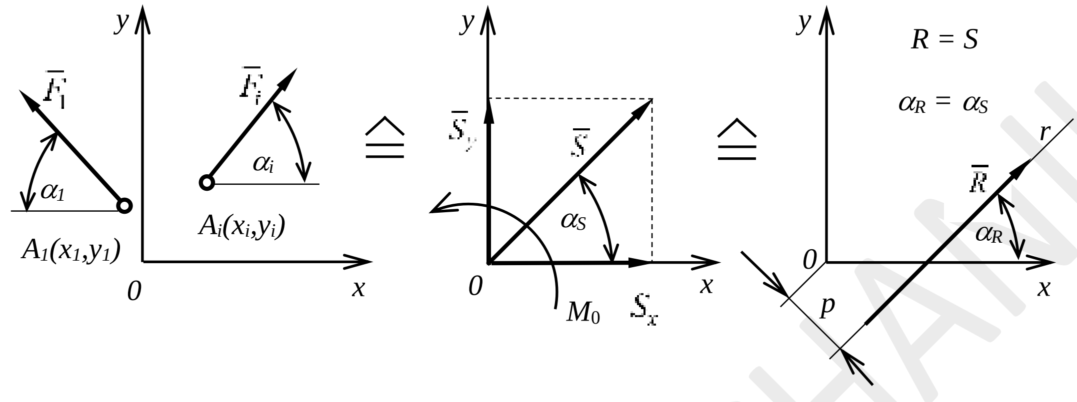
Potom: $$N_3 = \frac{F}{\cos\gamma \sin\alpha + \cos\gamma \cos\beta} = \frac{2{,}5}{\cos 55°(\sin 30° + \cos 60°)}$$

$N_4 = N_3 = 4{,}36$ kN

Osová sila v stĺpe: $N_5 = G + 2\,N_3 \sin\gamma = 30 + 2 \cdot 4{,}36 \cdot \sin 55° = 37{,}1$ kN.

2 VŠEOBECNÉ SILOVÉ SÚSTAVY. ROVNOBEŽNÉ SILOVÉ SÚSTAVY. ROVNOVÁHA TELESA

2.1 VŠEOBECNÁ ROVINNÁ SILOVÁ SÚSTAVA. ANALYTICKÉ RIEŠENIE VRSS



Obrázok 2.1

Všeobecnú rovinnú sústavu tvoria sily všeobecne rozptýlené v rovine (napr. v rovine *x, y* na *obr. 2.1a*). Účinok každej sily $\overline{F}$ k počiatku súradnicovej sústavy *0,x,y* bude posuvný $\overline{F}_i$ a otáčavý $\overline{M}_{i0}$ Výsledný posuvný a otáčavý účinok silovej sústavy k počiatku v bode 0 bude (*obr. 2.1b*):

$$\overline{S} = \sum \overline{F}_i \qquad \overline{M}_0 = \sum \overline{M}_{i0} \tag{2.1}$$

Môžu nastať prípady:

- $\overline{S} \neq \overline{0}$, $\overline{M}_0 \neq \overline{0}$ - sústava má výslednicu $\overline{R}$ - ide mimo bodu 0,
- $\overline{S} \neq \overline{0}$, $\overline{M}_0 = \overline{0}$ - sústava má výslednicu $\overline{R}$ - ide cez bod 0,
- $\overline{S} = \overline{0}$, $\overline{M}_0 \neq \overline{0}$ - sústavu nahradí silová dvojica v rovine *x, y* ,
- $\overline{S} = \overline{0}$, $\overline{M}_0 = \overline{0}$ - podmienky rovnováhy VRSS.

2.1.1 Nahradenie VRSS v zvolenom počiatku

Veľkosť momentu M_{i0} vyjadríme s použitím *Varignonovej vety* (*obr. 2.1a*)

$$M_{i0} = x_i\, F_{iy} - y_i\, F_{ix}$$

VRSS v zvolenom počiatku 0 (*obr. 4.1b*) nahradíme tromi skalárnymi podmienkami:

$$\begin{aligned} S_x &= \sum F_{ix} = \sum F_i \cos\alpha_i \\ S_y &= \sum F_{iy} = \sum F_i \sin\alpha_i \\ M_0 &= \sum M_{i0} = \sum\left(x_i\, F_{iy} - y_i\, F_{ix}\right) = \sum F_i\left(x_i \sin\alpha_i - y_i \cos\alpha_i\right) = \sum F_i\, p_i \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.1.2 Nahradenie VRSS výslednicou

$\bar{S}$ a $\bar{M}_{i0}$ nahradíme výslednicou $\bar{R}$, pričom $R = S$ a $\alpha_R = \alpha_S$, posunutou od počiatku 0 o vzdialenosť p (*obr. 2.1c*). Veľkosť výslednice určíme zo vzťahu:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

kde

$$R_x = S_x = \sum F_{ix} \qquad R_y = S_y = \sum F_{iy} \tag{2.3a}$$

Uhol α_R a polohu p určíme zo vzťahov

$$\cos\alpha_R = \frac{R_x}{R}, \qquad p = \frac{M_0}{R} \tag{2.3b}$$

2.1.3 Podmienky rovnováhy VRSS

Podmienky rovnováhy $\bar{S} = \bar{0}$, $\bar{M}_0 = \bar{0}$ určujú tri skalárne rovnice rovnováhy:

- 1. alternatíva: *2 zložkové rovnice, 1 momentová*

$$\begin{aligned} R_x &= 0, & & \sum F_{ix} = 0 \\ R_y &= 0, & \Rightarrow & \sum F_{iy} = 0 \\ M_0 &= 0, & & \sum M_{i0} = 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

- 2. alternatíva: *3 momentové rovnice*

$$\begin{aligned} \sum M_{iA} &= 0 \\ \sum M_{iB} &= 0 \\ \sum M_{iC} &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Poznámka: *Body A, B, C nesmú ležať na jednej priamke – mohla by na nej pôsobiť výslednica a pritom podmienky rovnováhy by boli splnené.*

- 3. alternatíva: *2 momentové a 1 zložková rovnica*

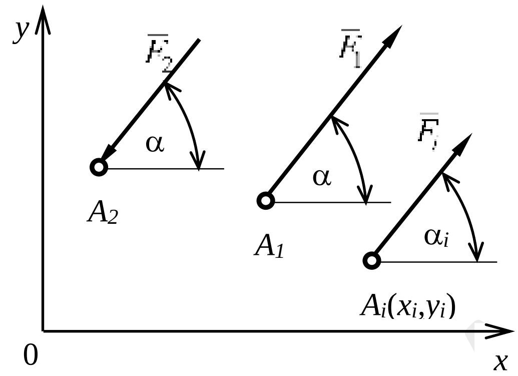
$$\begin{aligned} \sum M_{iA} &= 0 \\ \sum M_{iB} &= 0 \\ \sum F_{ix} &= 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Poznámka: *Spojnica bodov A, B nesmie byť kolmá na os x (na os, v smere ktorej píšeme silovú rovnicu) – mohla by na tejto priamke byť výslednica a pritom by platili podmienky rovnováhy.*

2.2 ROVNOBEŽNÁ ROVINNÁ SILOVÁ SÚSTAVA. ANALYTICKÉ RIEŠENIE.

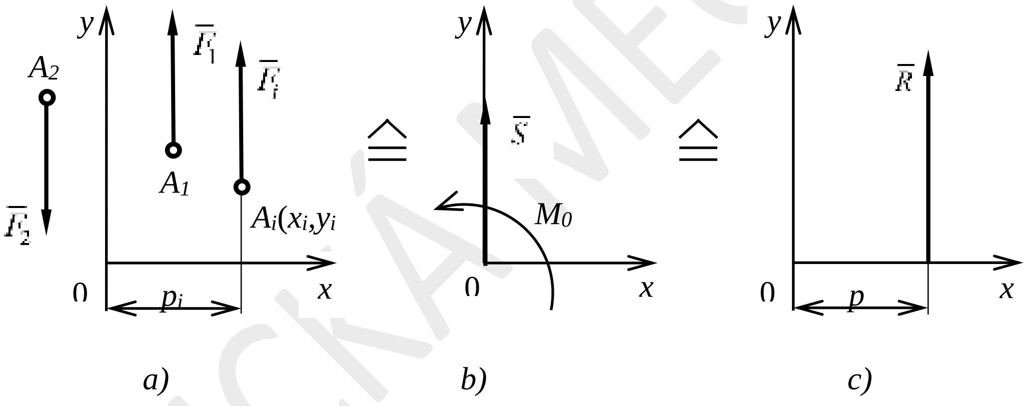
Rovnobežnú rovinnú silovú sústavu (*obr. 2.2*) môžeme pokladať za špeciálny prípad VRSS, kedy sú všetky uhly α_i rovnaké.

$$\alpha_i = \alpha$$



Obrázok 2.2

Pre zjednodušenie môžeme napríklad os y zvoliť rovnobežne so smerom síl (*obr. 2.3a*).



Obrázok 2.3

2.2.1 Nahradenie RRSS v zvolenom počiatku

V zvolenom počiatku 0 je silová sústava určená silou $\bar{S}$ a momentom $\bar{M}_0$ (*obr. 2.3b*).

$$S = \sum F_i$$
$$M_0 = \sum p_i\, F_i = \sum x_i\, F_i \tag{2.7}$$

2.2.2 Nahradenie RRSS výslednicou

Veľkosť a poloha p výslednice $\bar{R}$, pričom $R = S$ (*obr. 2.3c*), je určená vzťahmi.

$$R = \sum F_i$$
$$p = \frac{M_0}{R} = \frac{\sum p_i\, F_i}{\sum F_i} \tag{2.8}$$

2.2.3 Podmienky rovnováhy RRSS

Podmienky rovnováhy $\bar{S} = \bar{0}, \bar{M}_0 = \bar{0}$ v prípade RRSS vyjadrujú dve skalárne rovnice.

- 1. alternatíva: *1 zložková a 1 momentová rovnica*

$$\begin{matrix} S = 0 \\ M_0 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \sum F_i = 0 \\ \sum M_{i0} = 0 \end{matrix} \tag{2.9}$$

- 2. alternatíva: *2 momentové rovnice*

$$\begin{matrix} \sum M_{iA} = 0 \\ \sum M_{iB} = 0 \end{matrix} \tag{2.10}$$

Poznámka: *Spojnica bodov A, B nesmie byť rovnobežná so smerom síl RRSS.*

2.3 GRAFICKÉ RIEŠENIE VŠEOBECNEJ A ROVNOBEŽNEJ ROVINNEJ SILOVEJ SÚSTAVY

2.3.1 Rovnováha štyroch síl v rovine. Culmannova úloha

Nech je daná sila $\bar{F}$ a nositeľky *a, b, c* síl $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$, ktoré majú byť so silou $\bar{F}$ v rovnováhe (*obr. 2.4*). Nositeľky síl *f, a, b,c* ležia v jednej rovine, ale neprechádzajú jedným bodom ani nie sú navzájom rovnobežné.

$$\bar{F} + \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} = \bar{0} \tag{2.11}$$

Podobne musia byť v rovnováhe čiastočné výslednice dvoch a dvoch síl (ľubovoľných).

$$\bar{F} + \bar{A} = \bar{R}_{FA}, \qquad \bar{B} + \bar{C} = \bar{R}_{BC} \tag{2.12}$$

Potom môžeme rovnicu (2.11) napísať v tvare

$$\bar{R}_{FA} + \bar{R}_{BC} = \bar{0} \tag{2.13}$$

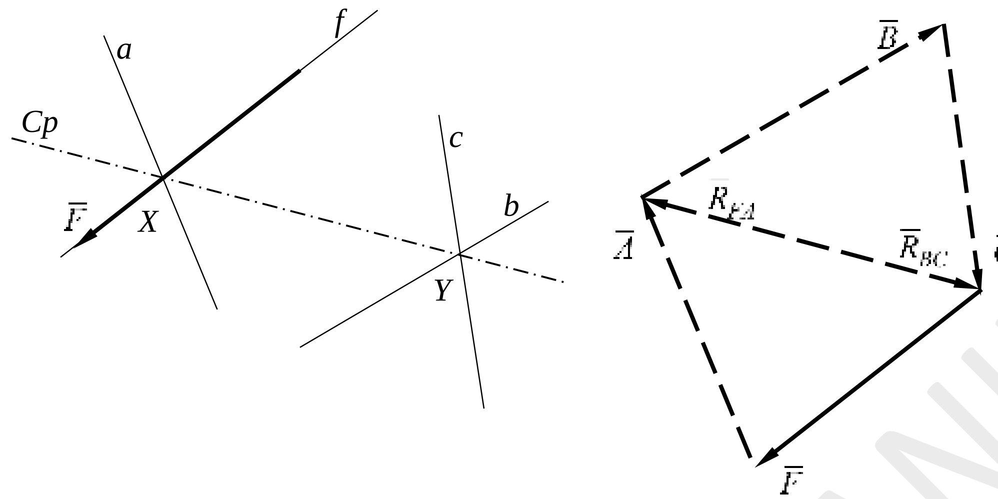
Dve rovnovážne sily musia ležať na jednej priamke, pritom $\bar{R}_{FA}$ prechádza bodom X a $\bar{R}_{BC}$ bodom Y. Teda spojnica bodov X a Y je nositeľkou čiastočných výsledníc $\bar{R}_{FA}$ a $\bar{R}_{BC}$ - tzv. Culmannova priamka (*Cp*).

Z rovnice (2.11) vzhľadom na (2.12) vyplýva

$$\bar{F} + \bar{A} + \bar{R}_{BC} = \bar{0} \tag{2.14}$$

Z podmienky rovnováhy troch síl určíme $\bar{A}$ a $\bar{R}_{BC}$. Potom $\bar{R}_{BC}$ rozložíme na jej zložky

$$\bar{R}_{BC} = \bar{B} + \bar{C} \tag{2.15}$$



Obrázok 2.4

2.3.2 Grafické určenie výslednice VRSS a RRSS

Veľkosť a polohu výslednice viacerých síl pôsobiacich na teleso v rovine je možné graficky určiť postupným skladaním síl na základe axiómy vektorového skladania síl.

$$\overline{F}_{1,2} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 , \qquad \overline{F}_{1,2,3} = \overline{F}_{1,2} + \overline{F}_3 \qquad \text{až} \qquad \overline{R} = \overline{F}_{1...n} = \sum \overline{F}_i$$

Pri väčšom počte síl je však takéto riešenie neprehľadné. Výslednicu viac ako troch síl v rovine môžeme výhodne určiť pomocou tzv. *silového obrazca* a *výslednicovej čiary*. Postup riešenia je naznačený na príklade určenia výslednice troch síl (*obr. 2.5*). Zo *silového obrazca* určíme veľkosť výslednice určenej vektorovým súčtom síl danej silovej sústavy (*obr. 2.5b*):

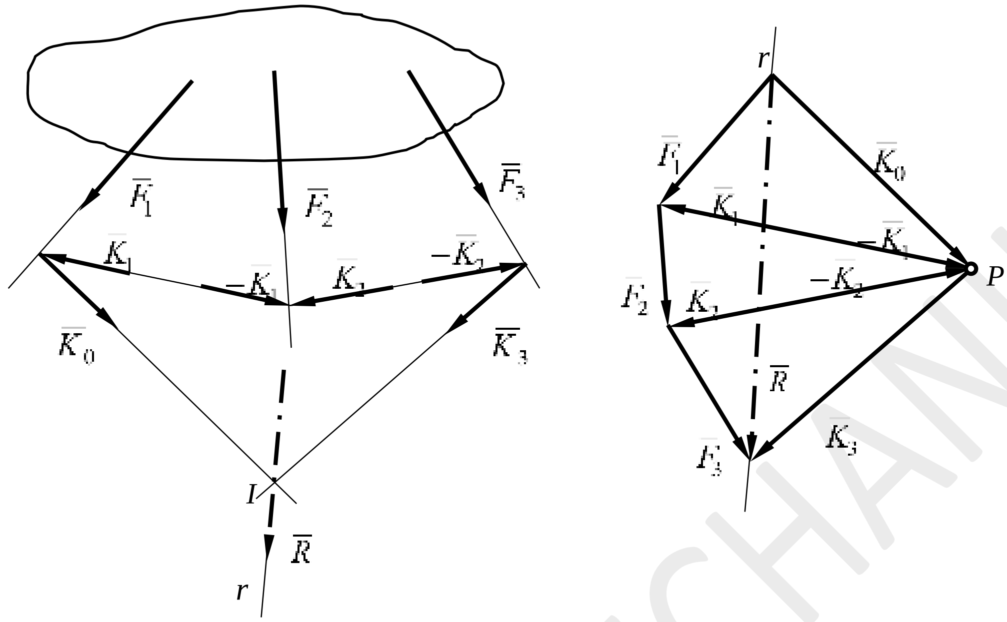
$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 = \overline{R} \tag{2.16}$$

Aby sme našli polohu výslednice, nahradíme danú sústavu síl *ekvivalentnou sústavou síl* $\overline{K}_i$. Rozložme najprv silu $\overline{F}_1$ na dve pomocné sily $\overline{K}_0$ a $\overline{K}_1$. Rozklad urobíme v silovom obrazci. Smery a veľkosti oboch síl sú určené spojnicami ľubovoľne zvoleného bodu (pólu *P*) s počiatočným a konečným bodom vektora sily $\overline{F}_1$. Ďalej rozložme silu $\overline{F}_2$ na sily $-\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$ tak, aby sa ich účinok síl $\overline{K}_1$ a $-\overline{K}_1$ navzájom zrušil, t. j. aby boli rovnako veľké, opačne orientované a ležali na jednej nositeľke. Podobne rozložíme silu $\overline{F}_3$ na sily $-\overline{K}_2$, $\overline{K}_3$. Rovnako by sme postupovali pri ľubovoľnom počte ďalších možných síl. Potom pre jednotlivé sily a ich vektorový súčet platí:

$$\begin{aligned} \overline{F}_1 &= \overline{K}_0 + \overline{K}_1 \\ \overline{F}_2 &= -\overline{K}_1 + \overline{K}_2 \\ \overline{F}_3 &= -\overline{K}_2 + \overline{K}_3 \\ \hline \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 &= \overline{K}_0 + \overline{K}_3 = \overline{R} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Výslednica $\overline{R}$ síl $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ je súčasne výslednicou pomocných síl $\overline{K}_0$ a $\overline{K}_3$ a jej nositeľka *r* musí v obrázku uvoľnenia telesa v rovine prechádzať priesečníkom *I* nositeliek síl $\overline{K}_0$ a $\overline{K}_3$.

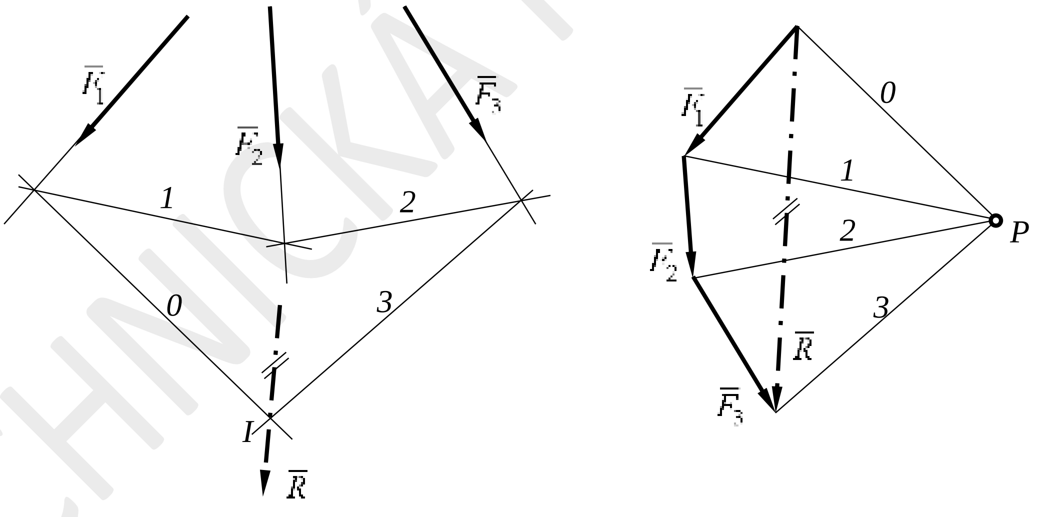
Rovnaký postup riešenia je možné použiť pri hľadaní výslednice ľubovoľného počtu rôznobežných, ale tiež rovnobežných síl v rovine.



a) *b)*

Obrázok 2.5

Pri bežnom riešení neoznačujeme pomocné sily $\overline{K}_i$ šípkami a pomenovaním. Označíme len ich nositeľky príslušným číslom (*obr. 2.6*).



a) *b)*

Obrázok 2.6

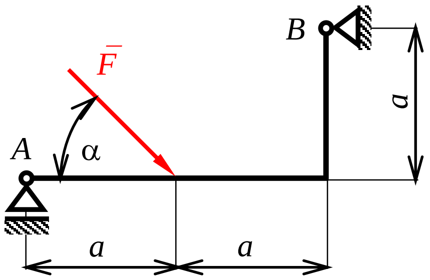
V *silovom obrazci* nositeľky všetkých pomocných síl $\overline{K}_i$ prechádzajú cez spoločný bod – pól *P*, vytvárajú tzv. *pólový obrazec* a nazývame ich *pólovými lúčmi*. V *obrázku uvoľnenia* (pôsobenia) síl vytvárajú nositeľky pomocných síl tzv. *výslednicovú čiaru*. Úsečky od jednej sily po druhú sú stranami výslednicovej čiary. Výslednicovú čiaru zostrojíme postupným prenesením pólových lúčov z *pólového obrázka* do *obrázku uvoľnenia,* pričom z podmienok rozkladu rôznobežných síl vyplýva, že nositeľky síl, ktoré v pólovom obrazci vytvárajú uzavretý trojuholník, sa musia vo výslednicovej čiare pretínať v jednom spoločnom bode.

RIEŠENÉ PRÍKLADY

PRÍKLAD 2.1: Daný je nosník AB zaťažený silou $\overline{F}$ (*obr. 2.1.1*). Určte reakcie v bodoch A,B pri rovnováhe nosníka. Daná je veľkosť sily F = 600 N, rozmer a = 1m a uhol α = 45°. Úlohu riešte analyticky a graficky.

Dané: $\overline{F}, a, \alpha$

Hľadané: $\overline{A}, \overline{B}$



Obrázok 2.1.1

Riešenie: Nosník je zaťažený vonkajšou silou $\overline{F}$. K rámu je viazaný väzbami v bodoch A a B, v ktorých po zaťažení vzniknú reakcie $\overline{A}$ a $\overline{B}$. Každá z týchto síl pôsobí na nosník v inom bode. Všetky však ležia v jednej spoločnej rovine. Tvoria všeobecnú rovinnú silovú sústavu (VRSS), nosník je preto telesom v rovine.

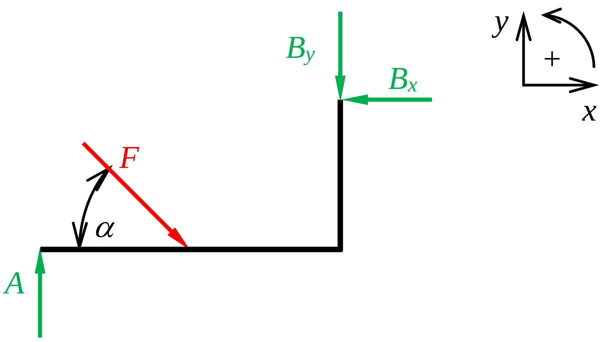
Tvarová a statická určitosť: Nosník ako teleso v rovine má tri stupne voľnosti pohybu. K rámu je viazaný v bode A posuvným lôžkom, ktoré mu odoberá jeden stupeň voľnosti pohybu (u = 1; nositeľkou reakcie je kolmica na opornú plochu) a v bode B kĺbom odoberajúcim dva stupne voľnosti pohybu (u = 2; nositeľku reakcie nepoznáme, nájdeme ju v priebehu riešenia).

Väzbová závislosť daného telesa je určená vzťahom:

$$i = v - u = 3 - (1 + 2) = 0$$

Ak $i = 0$, úloha je tvarovo a staticky určitá.

Analytické riešenie: Uvoľníme hmotný objekt. Zakreslíme k nemu známe zaťažujúce sily a reakcie, ktorými nahradíme účinky väzieb telesa k rámu (*obr. 2.1.2*). Zvolíme vhodnú súradnicovú sústavu. U neznámych reakcií predpokladáme ich orientácie.



Obrázok 2.1.2

Pri riešení vychádzame zo základnej podmienky rovnováhy VRSS:

$$\sum \bar{F}_i = \bar{0}\,, \qquad \sum \bar{M}_{iB} = \bar{0} \tag{a}$$

Vzhľadom na (a) posuvný aj otáčavý účinok pri rovnováhe musí byť nulový. Túto podmienku vyjadrujú tri skalárne podmienky rovnováhy:

$$\sum F_{ix} = 0: \quad F\cos\alpha - B_x = 0 \tag{b}$$
$$\sum F_{iy} = 0: \quad -F\sin\alpha + A - B_y = 0 \tag{c}$$
$$\sum M_{iB} = 0: \quad -A2a + F\sin\alpha\, a + F\cos\alpha \cdot a = 0 \tag{d}$$

Úpravou rovníc a dosadením dostávame :

z (b): $B_x = F\cos\alpha = 424{,}3N$

z (d): $A = \dfrac{F\left(\sin\alpha + \cos\alpha\right)}{2} = 424{,}3N$

z (c): $B_y = A - F\sin\alpha = 0$

Poznámka: *Momentovú podmienku môžeme písať k ľubovoľne zvolenému bodu. Výhodné je zvoliť bod, ktorým prechádza maximálny počet neznámych síl. Sily, ktorých nositeľky prechádzajú zvoleným vzťažným bodom, nemajú k tomuto bodu žiadny otáčavý účinok (moment je nulový). Ostatné sily majú k danému bodu otáčavý účinok (moment), ktorého veľkosť je daná súčinom veľkosti sily a najmenšej, kolmej vzdialenosti nositeľky danej sily od vzťažného bodu.*

Veľkosť a smer reakcie v bode B vypočítame zo vzťahov :

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 424{,}3N \tag{e}$$

$$\cos\alpha_B = \frac{B_x}{B} \quad \Rightarrow \quad \alpha_B = \arccos\frac{B_x}{B} = 0^\circ \tag{f}$$

Uhol α je uhol, ktorý zviera nositeľka reakcie $\bar{B}$ s kladnou osou x zvolenej súradnicovej sústavy.

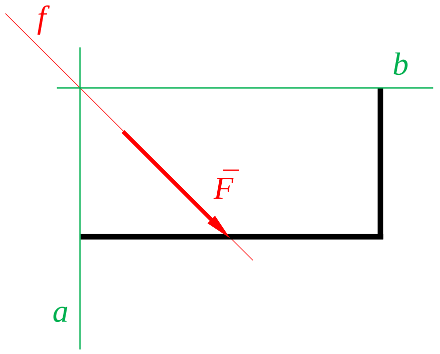
Grafické riešenie: Zvolíme vhodnú mierku dĺžok m_d a mierku síl m_F. V mierke dĺžok nakreslíme nosník uvoľnený z väzieb (*obr. 2.1.3*). K uvoľnenému telesu zakreslíme známu silu $\bar{F}$, ktorú poznáme úplne (veľkosť, smer, orientáciu) a sily neznáme, z ktorých vyznačíme len známe parametre. Z reakcie $\bar{A}$ v bode A poznáme len jej nositeľku. Z reakcie $\bar{B}$ iba bod B, v ktorom sila pôsobí na teleso.

Rovnováhu danej silovej sústavy pôsobiacej na nosník vyjadríme vektorovou podmienkou rovnováhy (g). Grafické riešenie spočíva v zostrojení jej grafického obrazu, to znamená uzavretého silového obrazca. Aby sme ho mohli zostrojiť, musíme nájsť nositeľku b reakcie $\bar{B}$. Nájdeme ju pomocou definície o rovnováhe troch síl:

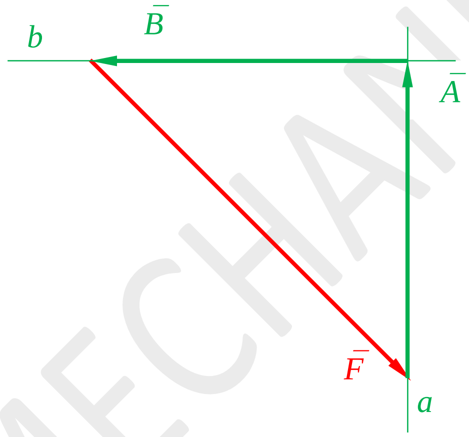
Tri sily sú v rovnováhe vtedy, ak sa ich nositeľky v obrázku uvoľnenia (pôsobenia síl) pretínajú v jednom bode a v silovom obrazci sily tvoria uzavretý trojuholník s orientáciou síl za sebou.

V obrázku uvoľneného telesa (*obr. 2.1.3*) nájdeme priesečník nositeliek f a a. Spojíme ho s bodom B. Dostaneme tak nositeľku b reakcie $\overline{B}$. Pokračujeme zostrojením silového obrazca. Na rovnobežku s nositeľkou f nanesieme silu $\overline{F}$ v zvolenej mierke síl. V počiatočnom a konečnom bode sily zostrojíme rovnobežky s nositeľkami reakcií $\overline{A}$, $\overline{B}$ tak, aby sme dostali uzavretý silový obrazec (*obr. 2.1.4*). Odmeriame dĺžky grafických obrazov hľadaných síl A_g, B_g. Zohľadnením zvolenej mierky síl určíme ich veľkosti.

$$m_d = \frac{1m}{2cm}; \quad m_F = \frac{100N}{1cm} \qquad\qquad \underline{\underline{\overline{F}}} + \overline{A} + \overline{B} = \overline{0} \qquad \text{(g)}$$



Obrázok 2.1.3



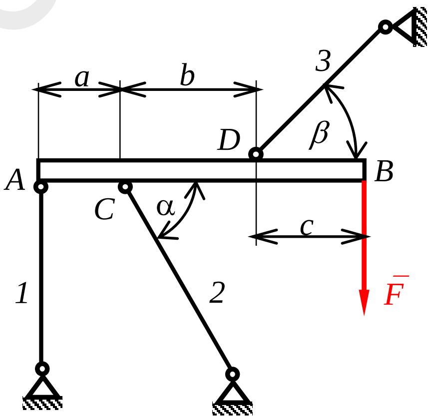
Obrázok 2.1.4

$$A_g = 4{,}2\,cm \quad \Rightarrow \quad A = A_g\, m_F = 420N$$
$$B_g = 4{,}2\,cm \quad \Rightarrow \quad B = B_g\, m_F = 420N$$

PRÍKLAD 2.2: Vodorovný nosník *AB* upevnený prútmi *1,2,3* podľa *obrázku 2.2.1* je zaťažený silou F = 600 N. Určte osové sily $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$, $\overline{N}_3$ ktoré vzniknú v jednotlivých väzbách prútom, ak a = 0,6 m, b = 1m, c = 0,8 m, α = 60°, β = 45°. Úlohu riešte analyticky a graficky.

Dané: $\overline{F}, a, b, c, \alpha, \beta$

Hľadané: $\overline{N}_1, \overline{N}_2, \overline{N}_3$



Obrázok 2.2.1

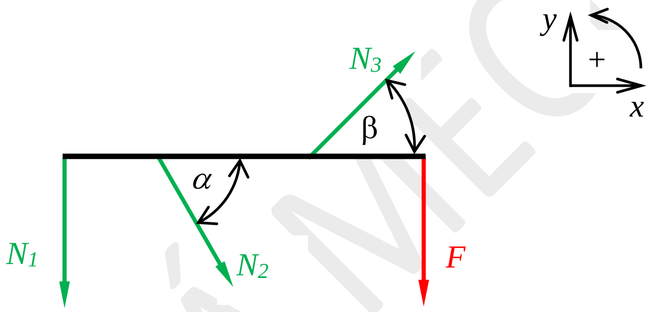
Riešenie: Väzby prútom, ktorými je nosník upevnený k rámu sú realizované tak, že nositeľky osových síl, ktoré vzniknú ako reakcia na vonkajšie zaťaženie, ležia v rovine pôsobenia vonkajšej sily $\overline{F}$. Na nosník potom pôsobia štyri sily, ktorých nositeľky ležiav jednej spoločnej rovine, majú rôzne pôsobiská, veľkosti a smery. Tvoria všeobecnú rovinnú silovú sústavu (*VRSS*) a nosník považujeme za *teleso v rovine*.

Tvarová a statická určitosť: Nosník ako teleso v rovine má 3 stupne voľnosti pohybu. V danej polohe je viazané troma prútmi. Každý prút uberá 1 stupeň voľnosti pohybu. Počet stupňov voľnosti pohybu je daný väzbovou závislosťou:

$$i = v - u = 3 - (3 \cdot 1) = 0$$

Teleso má odobrané všetky možnosti pohybu (i = 0), úloha je tvarovo určitá. Pre riešenie rovnováhy všeobecnej rovinnej silovej sústavy máme k dispozícii 3 nezávislé statické podmienky rovnováhy, z ktorých vieme vypočítať 3 neznáme parametre (osové sily v prútoch). Úloha je staticky určitá.

Analytické riešenie: Nosník *AB* uvoľníme z väzieb (*obr. 2.2.2*). Zakreslíme k nemu všetky sily, ktoré naň pôsobia. Najprv známu silu $\bar{F}$, potom sily neznáme $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3$, ktoré zakreslíme s predpokladanými orientáciami. Zvolíme súradnicovú sústavu a kladný zmysel pôsobenia momentov.



Obrázok 2.2.2

Na určenie neznámych síl použijeme tri nezávislé statické podmienky rovnováhy:

$$\sum F_{ix} = 0: \quad N_2 \cos\alpha + N_3 \cos\beta = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad -N_1 - N_2 \sin\alpha + N_3 \sin\beta - F = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$\sum M_{iC} = 0: \quad N_1\, a + N_3 \sin\beta\, b - F\,(b + c) = 0 \qquad \text{(c)}$$

Postupným riešením sústavy rovníc (a), (b), (c) určíme veľkosti hľadaných osových síl v prútoch N_1, N_2, N_3:

$$N_3 = \frac{F\,(a + b + c)}{a \cos\beta\, tg\alpha + a \sin\beta + b \sin\beta} = 771{,}614\,N$$

$$N_2 = -\frac{N_3 \cos\beta}{\cos\alpha} = -1091{,}227\,N$$

$$N_1 = -N_2 \sin\alpha + N_3 \sin\beta - F = 890{,}644\,N$$

Veľkosti síl N_1 a N_3 sú kladné, to znamená, že predpoklad ich orientácií bol správny. Sila $\bar{N}_2$ je orientovaná opačne ako sme predpokladali. Prúty *1, 3* sú namáhané ťahom, prút *2* je stláčaný.

Grafické riešenie: Zvolíme vhodné mierky dĺžok m_d a síl m_F. Nosník uvoľnený z väzieb nakreslíme v zvolenej mierke dĺžok. K nemu zakreslíme danú silu $\overline{F}$, ktorú poznáme úplne (veľkosť, smer, pôsobisko). Z neznámych síl $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$, $\overline{N}_3$ zakreslíme len známe parametre, to znamená pôsobiská a nositeľky n_1, n_2, n_3 (*obr. 2.2.3*).

Na uvoľnený nosník pôsobí všeobecná rovinná silová sústava, pre ktorú platí vektorová podmienka rovnováhy (d). Ide o rovnováhu štyroch síl, ktorých nositeľky ležia v spoločnej rovine, nepretínajú sa v jednom bode a nie sú navzájom rovnobežné.

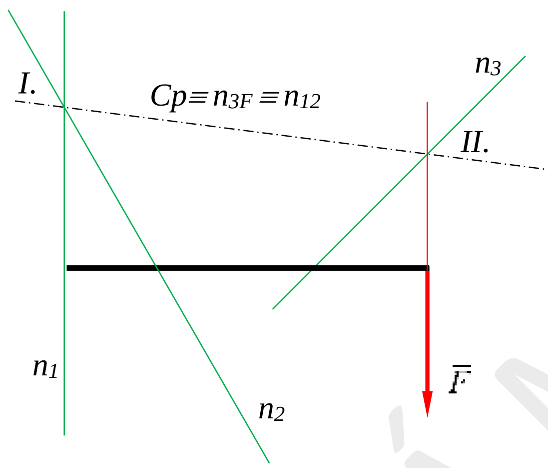
$$m_d = \frac{1m}{2cm}\,; \qquad m_F = \frac{100\,N}{0{,}5cm}$$

$$\overline{N}_1 + \overline{N}_2 + \overline{N}_3 + \overline{F} = \overline{0} \qquad \text{(d)}$$

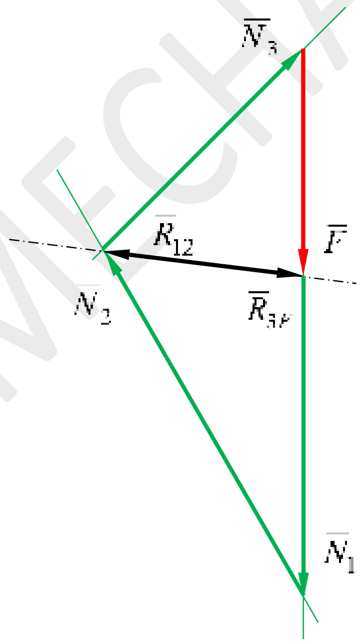
$$\overline{R}_{12} \quad + \quad \overline{R}_{3F} = \overline{0} \qquad \text{(e)}$$

$$\textbf{I.:}\ \overline{N}_1 + \overline{N}_2 + \overline{R}_{3F} = \overline{0} \qquad \text{(f)}$$

$$\textbf{II.:}\ \overline{R}_{12} + \overline{N}_3 + \overline{F} = \overline{0} \qquad \text{(g)}$$



Obrázok 2.2.3



Obrázok 2.2.4

$$N_{1g} = 4{,}3cm \quad \Rightarrow \quad N_1 = N_{1g}\, m_F = 860\,N$$

$$N_{2g} = 5{,}4cm \quad \Rightarrow \quad N_2 = N_{2g}\, m_F = 1080\,N$$

$$N_{3g} = 3{,}8cm \quad \Rightarrow \quad N_3 = N_{3g}\, m_F = 760\,N$$

Úlohu graficky riešime tzv. *Culmannovou metódou*. Na základe definície o rovnováhe troch síl je možné graficky vyriešiť rovnováhu troch síl. Nahradíme napr. sily $\overline{F}$ a $\overline{N}_3$ ich výslednicou $\overline{R}_{3F}$, ktorá je v rovnováhe so silami $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$. Jej nositeľka n_{3F} potom ako nositeľka výslednice $\overline{F}$ a $\overline{N}_3$ musí prechádzať v obrázku uvoľnenia (pôsobenia síl) priesečníkom nositeliek sčítavaných síl (*II.*) a súčasne priesečníkom nositeliek síl $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$ (*I.*), s ktorými je v rovnováhe. Podobne nositeľka čiastočnej výslednice $\overline{R}_{12}$druhej dvojice síl $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$ musí prechádzať priesečníkom síl $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$ a súčasne priesečníkom nositeliek $\overline{F}$ a $\overline{N}_3$, s ktorými je v rovnováhe.Ak má byť splnená rovnica (e), ktorá vyjadruje rovnováhu dvoch síl, výsledníc $\overline{R}_{12}$ a $\overline{R}_{3F}$, musia byť tieto dve sily rovnako veľké, opačne orientované a musia ležať na spoločnej nositeľke, ktorá je spojnicou priesečníkov nositeliek dvoch a dvoch sčítavaných síl (body *I.*,*II.*). Túto spojnicu nazývame *Culmannova priamka* (*Cp*). Rovnicu (d) môžeme potom prepísať v tvare dvoch podmienok rovnováhy troch síl (f) a (g).

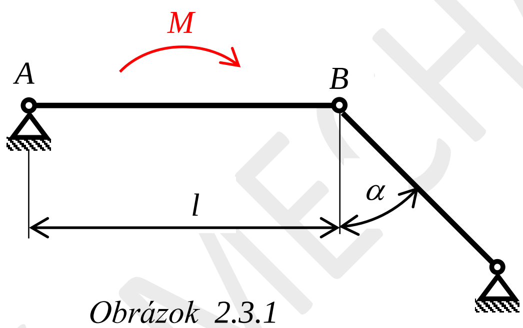
Grafické riešenie tejto úlohy spočíva v nájdení priesečníkov nositeliek dvoch a dvoch síl v obrázku uvoľnenia telesa. Ich spojením dostaneme *Culmannovu priamku Cp* ako nositeľku dvoch pomocných síl $\overline{R}_{12}$ a $\overline{R}_{3F}$. Pokračujeme riešením rovnováhy síl vyjadrenej podmienkou (g), kde zo známej sily $\overline{F}$ nanesenej do silového obrázka v zvolenej mierke síl (*obr. 2.2.4*) určíme veľkosti a orientácie síl $\overline{N}_3$ a $\overline{R}_{12}$. Zmenou orientácie $\overline{R}_{12}$ dostaneme silu $\overline{R}_{3F}$. Podľa podmienky (f) nájdeme v silovom obrazci sily $\overline{N}_1$ a $\overline{N}_2$.

Poznámka: *Čiastočné výslednice a ich orientácie pri riešení obvykle nevyznačujeme. Berieme ich len ako pomocné sily. Úlohu je možné riešiť aj rovnováhou čiastočných výsledníc iných dvoch a dvoch síl.*

PRÍKLAD 2.3: Nosník *AB* viazaný k rámu rovinným kĺbom v bode *A* a prútom v bode *B* (*obr. 2.3.1*) je zaťažený momentom o veľkosti M = 400 N.m. Daná je dĺžka l = 2 m a uhol α = 45°. Určte reakcie vo väzbách analyticky a graficky.

Dané: M, l, α

Hľadané: $\overline{A}, \overline{B}$



Obrázok 2.3.1

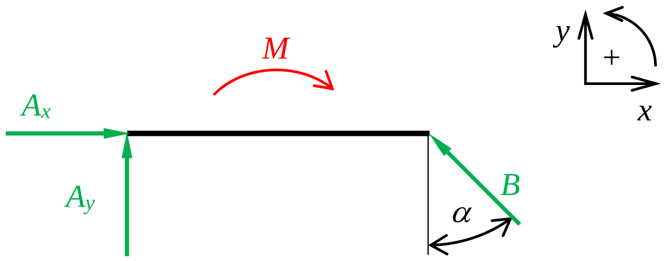
Riešenie: Po zaťažení nosníka momentom $\overline{M}$ začnú vo väzbách, ktorými je nosník viazaný k rámu, pôsobiť reakčné sily $\overline{A}, \overline{B}$. Obe sily pôsobia v jednej spoločnej rovine a spolu s momentom $\overline{M}$ tvoria všeobecnú rovinnú silovú sústavu. Nosník je preto telesom v rovine.

Tvarová a statická určitosť: Väzbovú závislosť daného telesa v rovine vyjadríme vzťahom:

$$i = v - u = 3 - (2 + 1) = 0$$

Úloha je tvarovo a staticky určitá.

Analytické riešenie: K uvoľnenému hmotnému objektu (nosník *AB*) zakreslíme vonkajší zaťažujúci moment M a reakcie nahrádzajúce účinky väzieb v bodoch A a *B* (*obr. 2.3.2*).



Obrázok 2.3.2

Napíšeme tri skalárne podmienky rovnováhy:

$$\sum F_{ix} = 0: \qquad A_x - B\sin\alpha = 0 \tag{a}$$
$$\sum F_{iy} = 0: \qquad A_y + B\cos\alpha = 0 \tag{b}$$
$$\sum M_{iA} = 0: \quad -M + B\cos\alpha\, l = 0 \tag{c}$$

Ak z (c) vyjadríme $B = \dfrac{M}{l\,\cos\alpha} = 282{,}8N$

Potom $A_x = B\sin\alpha = \dfrac{M}{l\,\cos\alpha}\sin\alpha = \dfrac{M\,tg\alpha}{l} = 200\,N$

$$A_y = -B\cos\alpha = -\frac{M}{l\cos\alpha}\cos\alpha = -\frac{M}{l} = -200\,N$$

Veľkosť a smer výslednej reakcie v bode A vypočítame zo vzťahov:

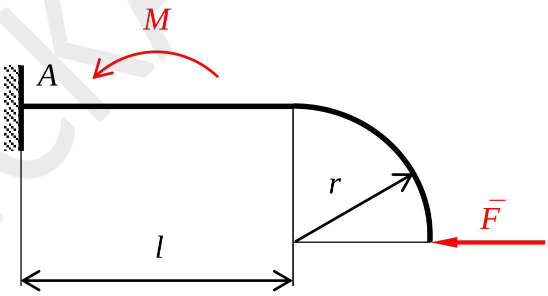
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = 282{,}8N \tag{d}$$
$$\cos\alpha_A = \frac{A_x}{A} \quad\Rightarrow\quad \alpha_A = \arccos\frac{A_x}{A} = 45° \tag{e}$$

Moment – silová dvojica môže byť v rovnováhe len s iným momentom – silovou dvojicou. Preto $\alpha_A = \alpha$.

PRÍKLAD 2.4: Teleso nepravidelného tvaru na *obrázku 2.4.1* je zaťažené vonkajšou silou $\overline{F}$ a vonkajším momentom $\overline{M}$. Určte reakcie vo votknutí telesa analyticky a graficky, ak sú dané sila F = 400N, moment M = 800$N.m$ a rozmery r = 1m, l = 2m.

Dané: $\overline{F}, M, r, l$

Hľadané: $\overline{A}, \overline{M}_A$



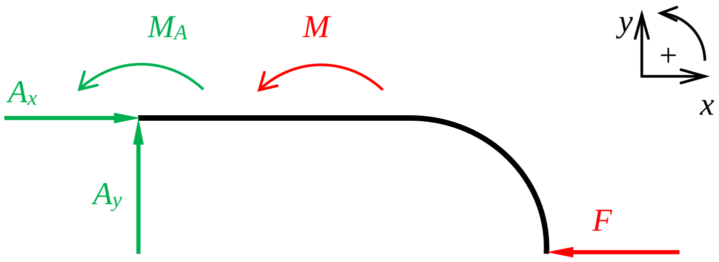
Obrázok 2.4.1

Riešenie: Teleso je zaťažené silou $\overline{F}$ a momentom $\overline{M}$, ktorý nahradíme dvojicou síl pôsobiacich v tej istej rovine, ako sila $\overline{F}$. Za predpokladu rovnovážneho stavu musí reakcia v jedinej väzbe tohto telesa k rámu pôsobiť v tej istej rovine, ako vonkajšie zaťaženie. Všetky sily potom tvoria VRSS.

Tvarová a statická určitosť: Väzba votknutím odoberá telesu v rovine tri stupne voľnosti pohybu (2 posuvy a otočenie (u = 3)), tomu zodpovedajú tri neznáme parametre (n_p = 3), a to dva parametre reakcie $\overline{A}$ (pri analytickom riešení súradnicové zložky A_x, A_y, pri grafickom veľkosť a smer daný nositeľkou) a veľkosť momentu M_A. Ak platí

$i = v - u = 3 - 3 = 0$, potom úloha je tvarovo i staticky určitá.

Analytické riešenie: Uvoľníme hmotný objekt (*obr. 2.4.2*). Zakreslíme známu zaťažujúcu silu F, moment M a neznáme A_x, A_y, M_A s predpokladanými orientáciami. Zvolíme vhodnú súradnicovú sústavu.



Obrázok 2.4.2

Napíšeme skalárne podmienky rovnováhy:

$$\sum F_{ix} = 0: \quad A_x - F = 0 \qquad \text{(a)} \qquad \Rightarrow \quad A_x = F = 400N$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad A_y = 0 \qquad \text{(b)} \qquad \Rightarrow \quad A_y = 0$$

$$\sum M_{iA} = 0: \quad -F \cdot r + M + M_A = 0 \quad \text{(c)} \qquad \Rightarrow \quad M_A = -M + F \cdot r = -400N.m$$

Veľkosť a smer výslednej reakcie v bode A vypočítame:

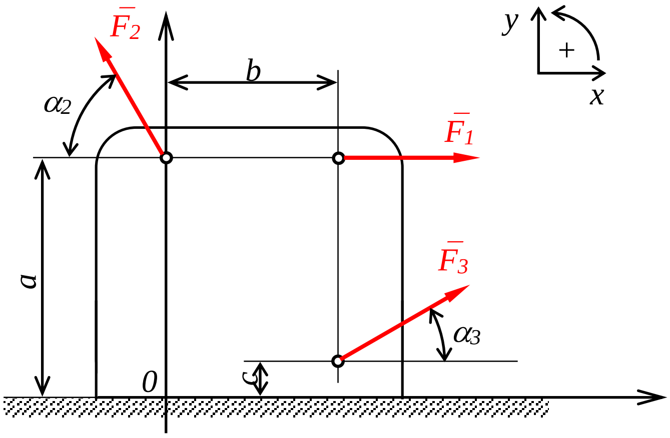
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = 400N \qquad \text{(d)}$$

$$\cos \alpha_A = \frac{A_x}{A} = 0 \Rightarrow \alpha = 0° \qquad \text{(e)}$$

PRÍKLAD 2.5: Rovinná príruba znázornená na *obr. 2.5.1* je zaťažená silami $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$. Určte, aký je výsledný účinok danej silovej sústavy v bode *0* a jej výslednicu. Úlohu riešte analyticky. Dané sú veľkosti síl F_1 = 200N, F_2 = 500N, F_3 = 250N, α_1 = 0°, α_2 = 60°, α_3 = 30°, a = 0,7m, b = 0,5m, c = 0,1m.

Dané: $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a, b, c$

Hľadané: $\overline{S}, \overline{M}_0, \overline{R}$



Obrázok 2.5.1

Riešenie: Nositeľky všetkých síl pôsobiacich na prírubu ležia v spoločnej rovine, majú rôzne pôsobiská, veľkosti, smery, orientácie a nepretínajú sa v jednom bode. Tvoria preto všeobecnú rovinnú silovú sústavu, ktorej výsledný účinok na prírubu môže byť posuvný, daný výsledným posuvným účinkom $\overline{S}$ a súčasne otáčavý účinok, daný momentom k uvažovanému vzťažnému bodu $\overline{M}_0$.

Analytické riešenie: Veľkosť výsledného posuvného účinku S a súčasne aj výslednice R určíme zo *statických podmienok nahradenia* danej silovej sústavy:

$$R_x = S_x = \sum F_{ix}: \quad R_x = S_x = F_1 + F_3 \cos\alpha_3 - F_2 \cos\alpha_2 \qquad \text{(a)}$$

$$R_y = S_y = \sum F_{iy}: \quad R_y = S_y = F_2 \sin\alpha_2 + F_3 \sin\alpha_3 \qquad \text{(b)}$$

Po dosadení: $R_x = S_x = 166{,}506 N$, $R_y = S_y = 558{,}012 N$

$$R = S = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{166{,}5^2 + 558^2} = 582{,}32 N$$

Uhol α_R, ktorý zviera nositeľka výsledného posuvného účinku *s* a tiež výslednice *r* s kladnou osou *x*, je daný smerovým kosínusom

$$\cos\alpha_R = \frac{R_x}{R} \quad \Rightarrow \alpha_R = \arccos\frac{R_x}{R} = \arccos\frac{166{,}5}{582{,}3} = 73°23'06'' \qquad \text{(c)}$$

Tento smerový uhol určuje zároveň zmysel výslednice $\overline{R}$.

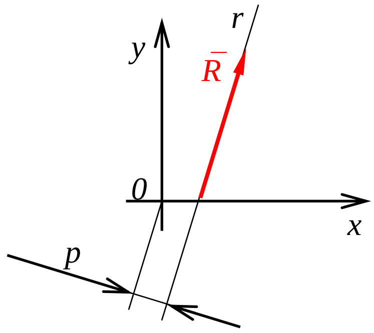
Výsledný otáčavý účinok jednotlivých síl k osi kolmej na rovinu pôsobenia síl a prechádzajúcej zvoleným vzťažným bodom *0* (moment M_0) je daný algebrickým súčtom momentov jednotlivých síl k tej istej osi, resp. bodu (*Varignonová veta*)

$$\begin{aligned} M_0 &= \sum M_{i0} \\ M_0 &= -F_3 \cos\alpha_3\, c + F_3 \sin\alpha_3\, b - F_1\, a + F_2 \cos\alpha_2\, a \qquad \text{(d)} \\ M_0 &= 75{,}85 N.m \end{aligned}$$

Výsledný zaťažujúci účinok danej VRSS je nahradený posuvným účinkom S = 582,32 N a otáčavým účinkom vyjadreným momentom o veľkosti M_0 = 75,85 N.m. Kladná hodnota vypočítanej veľkosti momentu znamená, že otáčavý účinok pôsobí v predpokladanom kladnom zmysle, t.j. proti smeru pohybu hodinových ručičiek.

Výsledný účinok VRSS môžeme nahradiť aj jej výslednicou posunutou od vzťažného bodu 0 o vzdialenosť *p* (*obr. 2.5.2*) tak, aby moment výslednice $\overline{R}$ k vzťažnému bodu sa rovnal momentu M_0 (algebrickému súčtu momentov jednotlivých síl k tomu istému bodu).

$$M_0 = p \cdot R = \quad \Rightarrow \quad p = \frac{M_0}{R} = 0{,}13 m \qquad \text{(e)}$$

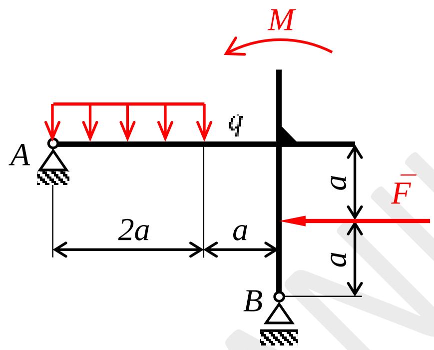


Obrázok 2.5.2

PRÍKLAD 2.6: Zalomený nosník znázornený na obrázku *2.6.1* je zaťažený spojitým zaťažením q[N.m^{-1}], osamelou silou veľkosti $F = q \cdot 2a$ [N] a silovou dvojicou, ktorej moment $M = q \cdot a^2$ [N.m]. Určte analyticky a graficky reakcie $\overline{A}$ a $\overline{B}$ vo väzbách, ak rozmer a = 1 m a veľkosť spojitého zaťaženia je q = 200 N.m^{-1}.

Dané: $\overline{F}, \overline{q}, M, a$

Hľadané: $\overline{A}, \overline{B}$



Obrázok 2.6.1

Riešenie: Nosník je zaťažený spojitým zaťažením $\overline{q}$, silou $\overline{F}$ a silovou dvojicou, ktoré naň pôsobia v spoločnej rovine. Pre dosiahnutie rovnovážneho stavu, keď nosník nemení svoju polohu, musia aj reakcie vo väzbách *A a B* pôsobiť v tej istej rovine. Všetky sily tvoria potom všeobecnú rovinnú silovú sústavu a nosník považujeme za teleso v rovine.

Tvarová a statická určitosť: Nosník ako teleso v rovine má tri stupne voľnosti pohybu. K rámu je viazaný kĺbom v bode *A*, ktorý uberá telesu dva stupne voľnosti pohybu a posuvným lôžkom, ktoré uberá jeden stupeň voľnosti. V rovinnom kĺbe *A* sú neznáme dva parametre reakcie $\overline{A}$ (pri analytickom riešení A_x a A_y, pri grafickom riešení veľkosť *A* a uhol α_A). V posuvnom lôžku *B* je známa nositeľka *b*, neznáma je len veľkosť reakcie *B*.

Počet stupňov voľnosti je daný väzbovou závislosťou

$$i = v - u = 3 - (2 + 1) = 0.$$

Úloha je tvarovo i staticky určitá. Pri analytickom riešení rovnováhy VRSS máme k dispozícii tri nezávislé statické podmienky rovnováhy, z ktorých vieme vypočítať tri neznáme parametre.

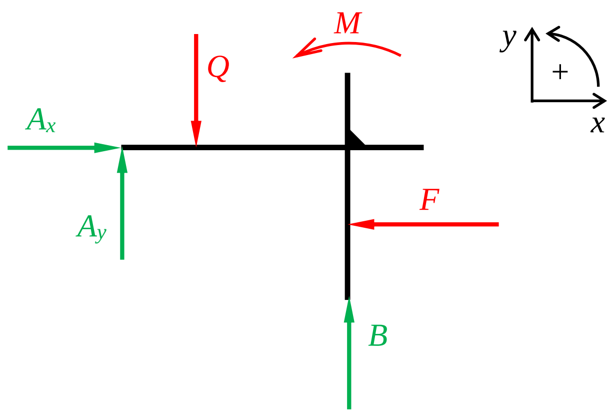
Analytické riešenie: Vyšetrované teleso uvoľníme z väzieb (*obr. 2.6.2*). Zakreslíme všetky sily, ktoré naň pôsobia: zaťažujúce sily $\overline{F}$, $\overline{Q}$, moment $\overline{M}$ a neznáme reakcie v bodoch *A a B*, z ktorých vyznačíme predpokladané orientácie síl. Spojité zaťaženie $\overline{q}$ pri riešení nahradíme silou $\overline{Q}$, ktorej účinok na vyšetrované teleso odpovedá účinku pôvodného spojitého zaťaženia $\overline{q}$. Jej veľkosť je daná vzťahom $Q = q \cdot 2a$ a sila pôsobí v ťažisku plochy zobrazujúcej priebeh spojitého zaťaženia. V obrázku uvoľnenia vyznačíme súradnicovú sústavu a zvolíme kladnú orientáciu momentov.

Pri riešení použijeme tri statické podmienky rovnováhy

$$\sum F_{ix} = 0: \quad A_x - F = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad A_y - Q + B = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$\sum M_{iA} = 0: \quad M - Q \cdot a - F \cdot a + B \cdot 3a = 0 \qquad \text{(c)}$$



Obrázok 2.6.2

Dosadením daných hodnôt a riešením sústavy rovníc (a), (b), (c) dostaneme hodnoty

$$A_x = F = q \cdot 2a = 400N$$

$$B = \frac{F \cdot a + Q \cdot a - M}{3a} = \frac{q \cdot 2a \cdot a + q \cdot 2a \cdot a - q \cdot a^2}{3a} = q \cdot a = 200N$$

$$A_y = Q - B = q \cdot 2a - B = 200N$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = 447{,}213N$$

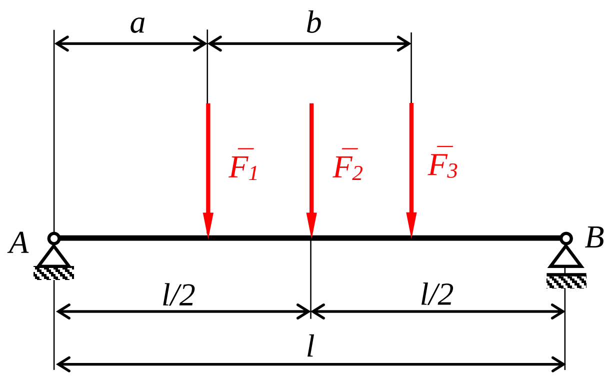
Uhol, ktorý zviera nositeľka *a* s kladným smerom osi *x* zistíme pomocou smerového kosínusu

$$\cos\alpha_A = \frac{A_x}{A} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_A = \arccos\frac{A_x}{A} = 26°33'53''$$

PRÍKLAD 2.7: Na vodorovný nosník *AB* dĺžky l = 10 m (*obr. 2.7.1*) pôsobia v zvislom smere tri sily $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ o veľkosti F_1= 50 000 N, F_2 = 30 000 N a F_3 = 10 000 N. Ich nositeľky f_1, f_2, f_3 sú navzájom rovnobežné. Určte reakcie vo väzbách, ak nosník je k rámu viazaný v bode *A* rovinným kĺbom a v bode *B* posuvným lôžkom. Dané sú rozmery: a = 3 m, b = 4 m. Úlohu riešte analyticky a graficky.

Dané: $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, a, b, l$

Hľadané: $\overline{A}, \overline{B}$



Obrázok 2.7.1

Riešenie: Nosník je zvonku zaťažený silami $\overline{F}_1,\ \overline{F}_2,\ \overline{F}_3$, ktorých nositeľky ležia v jednej spoločnej rovine a sú navzájom rovnobežné (*obr. 2.7.2*).
V prípade rovnováhy silovej sústavy pôsobiacej na nosník reakcie v podperách *A* a *B* musia pôsobiť v tej istej rovine a smere, to znamená, že ich nositeľky musia byť rovnobežné s nositeľkami vonkajších zaťažujúcich síl. Všetky sily pôsobiace na nosník tvoria potom rovnobežnú rovinnú silovú sústavu (RRSS). Nosník považujeme za teleso v rovine. Teleso v rovine má tri stupne voľnosti pohybu. Väzba kĺbom v bode *A* uberá dva stupne voľnosti pohybu. Väzba posuvným lôžkom v bode *B* uberá *1* stupeň voľnosti pohybu.

Tvarová určitosť je daná väzbovou závislosťou

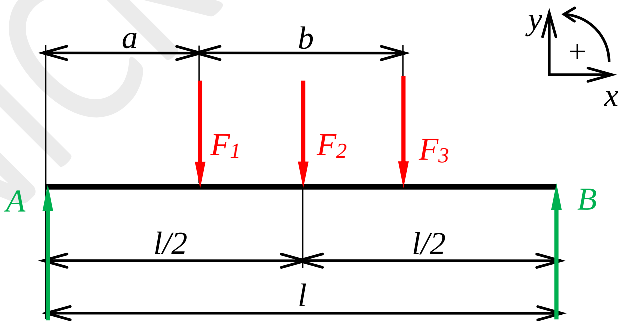
$$i = v - u = 3 - (2 + 1) = 0$$

Úloha je tvarovo určitá.

Analytické riešenie: Nosník uvoľníme z väzieb (*obr. 2.7.2*). K uvoľnenému telesu zakreslíme známe sily $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ a neznáme reakcie vo väzbách (v bodoch *A a B*) s predpokladanými orientáciami. Zvolíme pravouhlú súradnicovú sústavu a kladný zmysel orientácie momentov.
Pretože sily $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ a reakcia $\overline{B}$ v posuvnom lôžku sú navzájom rovnobežné, potom aj nositeľka reakcie v kĺbe *A* musí byť s nimi rovnobežná. Všetky sily pôsobiace na nosník *AB* sú rovnobežné a teda tvoria rovnobežnú rovinnú silovú sústavu.
Úloha je staticky určitá, pretože

$$i_S = r - n_p = 2 - (1 + 1) = 0$$

kde $r = 2$ je počet nezávislých statických podmienok rovnováhy *RRSS* a $n_p = (1+1) = 2$ je počet neznámych reakcií $\overline{A},\ \overline{B}$.



Obrázok 2.7.2

Pre rovnováhu *RRSS* zvolíme dve momentové podmienky rovnováhy k bodom *A* a *B*, pretože pri tejto voľbe v každej z podmienok bude len jedna neznáma

$$\sum M_{iA} = 0: \qquad -F_1 \cdot a - F_2 \cdot \frac{l}{2} - F_3 \cdot (a + b) + B \cdot l = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\sum M_{iB} = 0: \qquad F_1 \cdot (l - a) + F_2 \cdot \frac{l}{2} + F_3 \cdot (l - a - b) - A \cdot l = 0 \qquad \text{(b)}$$

Po dosadení a vyriešení sústavy rovníc dostaneme

z (a) $$B = \frac{F_1 \cdot a + F_2 \cdot \frac{l}{2} + F_3 \cdot (a+b)}{l} = 37000\,N$$

z (b) $$A = \frac{F_1 (l-a) + F_2 \frac{l}{2} + F_3 (l-a-b)}{l} = 53000\,N$$

Hodnoty veľkosti vypočítaných reakcií sú kladné, to znamená, že predpoklad orientácií bol správny. Kontrolu správnosti urobíme pomocou zložkovej rovnice

$$\sum F_{iy} = 0: \quad -A + F_1 + F_2 + F_3 - B = -53000 + 50000 + 30000 + 10000 - 37000 = 0.$$

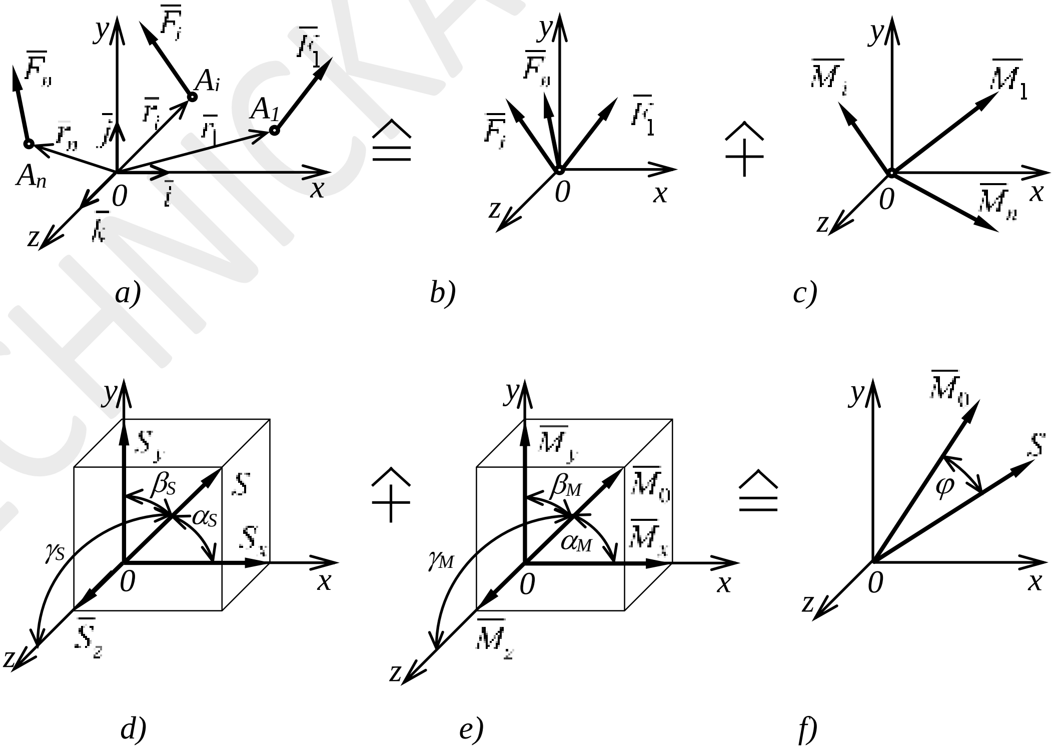
Veľkosti neznámych reakcií boli vypočítané správne.

2.4 VŠEOBECNÁ PRIESTOROVÁ SILOVÁ SÚSTAVA

Všeobecnú priestorovú silovú sústavu tvoria sily ľubovoľne rozložené v priestore. Je to najvšeobecnejší typ silovej sústavy, pre ktorú platí

$$\bar{S} \neq \bar{0}\ , \quad \bar{M}_0 \neq \bar{0}\ , \quad \bar{S} \cdot \bar{M}_0 \neq 0$$

Keďže vo všeobecnosti $\bar{S}$ a $\bar{M}_0$ nie sú kolmé, *nemôžeme* VPSS nahradiť jednou silou.



Obrázok 2.7

2.4.1 Nahradenie VPSS v zvolenom počiatku

Majme danú VPSS v zvolenom počiatku 0 (*obr. 2.7a*). Účinok i-tej sily k bodu 0 je

- posuvný $\bar{F}_i$
- otáčavý $\bar{M}_{i0} = \bar{r}_i \times \bar{F}_i$

Výsledný účinok od všetkých síl danej silovej sústavy je v bode 0

- posuvný (*obr. 2.7b*) $\bar{S} = \sum \bar{F}_i$
- otáčavý (*obr. 2.7c*) $\bar{M}_0 = \sum \bar{M}_{i0}$

$$\bar{M}_0 = \sum \bar{M}_{i0} = \sum \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \sum \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ F_{ix} & F_{iy} & F_{iz} \end{vmatrix}$$

Veľkosť a smer posuvného a otáčavého účinku

$$\bar{S} = \bar{S}_x + \bar{S}_y + \bar{S}_z = S_x \cdot \bar{i} + S_y \cdot \bar{j} + S_z \cdot \bar{k} \tag{2.18}$$

$$\bar{M}_0 = \bar{M}_x + \bar{M}_y + \bar{M}_z = M_x \cdot \bar{i} + M_y \cdot \bar{j} + M_z \cdot \bar{k} \tag{2.19}$$

Účinok VPSS vzhľadom k bodu 0 je vyjadrený šiestimi rovnicami

$$\begin{aligned} S_x &= \sum F_{ix} = \sum F_i \cos\alpha_i & M_x &= \sum M_{ix} = \sum (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) \\ S_y &= \sum F_{iy} = \sum F_i \cos\beta_i & M_y &= \sum M_{iy} = \sum (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) \\ S_z &= \sum F_{iz} = \sum F_i \cos\gamma_i & M_z &= \sum M_{iz} = \sum (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) \end{aligned} \tag{2.20}$$

Veľkosť a poloha výsledného posuvného účinku $\bar{S}$ (*obr. 2.7d*) sa určí vzťahmi

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}$$

$$\cos\alpha_S = \frac{S_x}{S}, \quad \cos\beta_S = \frac{S_y}{S}, \quad \left(\cos\gamma_S = \frac{S_z}{S}\right)$$

Veľkosť a poloha výsledného otáčavého účinku M_0 (*obr. 2.7e*) je:

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

$$\cos\alpha_M = \frac{M_x}{M_0}, \quad \cos\beta_M = \frac{M_y}{M_0}, \quad \left(\cos\gamma_M = \frac{M_z}{M_0}\right)$$

Uhol φ (*obr. 2.7f*) môžeme určiť zo skalárneho súčinu

$$\bar{S} \cdot \bar{M}_0 = S\, M_0 \cos\varphi$$

odkiaľ $\cos\varphi = \dfrac{\bar{S} \cdot \overline{M}_0}{S\, M_0}$

Vzhľadom na vzťahy (2.18), (2.19) bude

$$\cos\varphi = \frac{S_x\, M_x + S_y\, M_y + S_z\, M_z}{S\, M_0}.$$

2.4.2 Podmienky rovnováhy VPSS

Podmienkami rovnováhy všeobecnej priestorovej silovej sústavy sú $\bar{S} = \bar{0}$, $\overline{M}_0 = \bar{0}$, t. j.

$$\sum \overline{F}_i = \bar{0}\,, \qquad \sum \overline{M}_{i0} = \bar{0} \qquad (2.21)$$

V skalárnom tvare je to šesť rovníc rovnováhy:

- 1. alternatíva: *3 silové a 3 momentové rovnice* napísané výhodne k súradnicovým osiam

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0 & \sum M_{ix} &= 0 \\ \sum F_{iy} &= 0 & \sum M_{iy} &= 0 \\ \sum F_{iz} &= 0 & \sum M_{iz} &= 0 \end{aligned} \qquad (2.22)$$

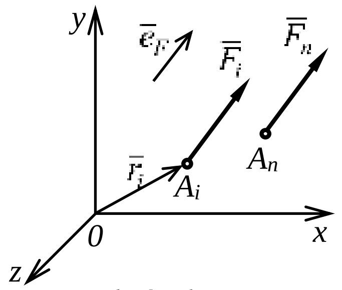
Silové rovnice môžeme obdobne, ako v predošlých kapitolách, nahradiť momentovými rovnicami k ďalším ľubovoľným osiam, ale m*omentové rovnice* nemôžeme nahradiť ďalšími silovými rovnicami. Musíme mať *minimálne* tri momentové rovnice k trom rôznym ľubovoľným osiam. Takto dostaneme ďalšie alternatívy vyjadrenia podmienok rovnováhy.

- 2. alternatíva: *2 silové a 4 momentové rovnice*
- 3. alternatíva: *1 silová a 5 momentových rovníc*
- 4. alternatíva: *6 momentových rovníc* (k osiam o_1 až o_6)

Osi o_1 až o_6 (nemusia byť medzi nimi osi *x, y, z*) *nesmú byť navzájom rovnobežné a nesmú byť pretnuteľné jednou priamkou.* Vzhľadom na náročnosť voľby osí, v záujme získania nezávislých statických podmienok rovnováhy používame prevažne základnú skladbu podmienok rovnováhy VPSS podľa (2.22).

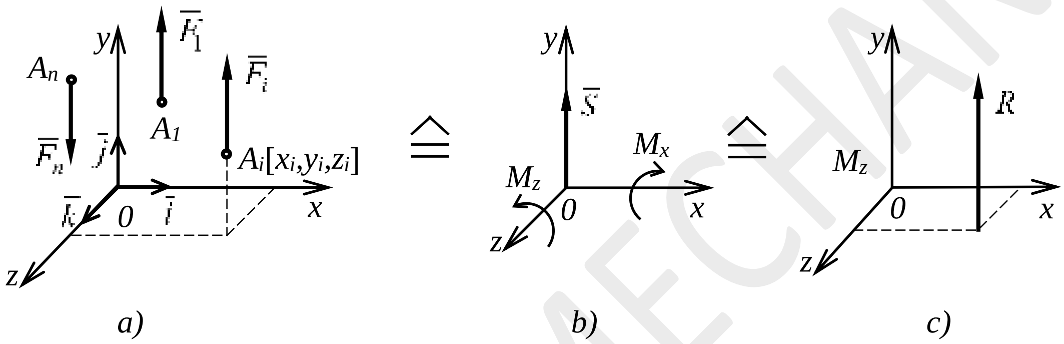
2.5 ROVNOBEŽNÁ PRIESTOROVÁ SILOVÁ SÚSTAVA

Na RPSS sa môžeme pozerať ako na zvláštny prípad všeobecnej priestorovej silovej sústavy, kde sily sú vzájomne rovnobežné, to znamená, že všetky sily $\overline{F}_i$ sú kolineárne s jednotkovým vektorom $\bar{e}_F$ (*obr. 2.8*).



Obrázok 2.8

Pre zjednodušenie zvoľme súradnicovú os y rovnobežnú so smerom síl danej silovej sústavy (*obr. 2.9a*).



Obrázok 2.9

2.5.1 Nahradenie RPSS v zvolenom počiatku

Výsledný účinok RPSS v bode 0 pre sústavu rovnobežnú s osou y je

- posuvný $\bar{S} = \sum \bar{F}_i = \sum F_i \cdot \bar{j} = S \cdot \bar{j} \quad \Rightarrow \quad S = \sum F_{iy} = \sum F_i$
- otáčavý $\bar{M}_0 = \sum \bar{M}_{i0}$ (2.23)

$$\bar{M}_0 = \sum \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ 0 & F_{iy} & 0 \end{vmatrix} = \sum \left(- z_i\, F_{iy}\, \bar{i} + x_i\, F_{iy}\, \bar{k} \right) \tag{2.24}$$

Priemetom (2.23) do osí x, y, z (*obr. 2.9b*) dostaneme

$$\begin{aligned} S &= S_y = \sum F_{iy} = \sum F_i \\ M_x &= \sum M_{ix} = \sum \left(- z_i F_{iy} \right) \\ M_z &= \sum M_{iz} = \sum \left(x_i F_{iy} \right) \end{aligned} \tag{2.25}$$

Výsledný moment $\bar{M}_0$ leží v rovine x,z, jeho veľkosť je

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_z^2}$$

2.5.2 Nahradenie RPSS výslednicou

Rovnobežnú silovú sústavu môžeme nahradiť výslednicou $\overline{R}$ (*obr. 2.9c*).

$$\overline{R} = \overline{S} = \sum \overline{F}_{iy}$$

Veľkosť a poloha výslednice je

$$R = \sum F_i$$

$$\begin{aligned} -z_R\, R &= M_x \\ x_R\, R &= M_z \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad z_R = \frac{-M_x}{R}, \qquad x_R = \frac{M_z}{R} \tag{2.26}$$

2.5.3 Rovnováha RPSS

RPSS je v rovnováhe vtedy, keď jej posuvný aj otáčavý účinok sa rovná nule. Zo všeobecných podmienok rovnováhy $\left(\overline{S} = \overline{0},\, \overline{M}_0 = \overline{0}\right)$ vyplývajú pre túto silovú sústavu podmienky rovnováhy:

$$\sum \overline{F}_i = \overline{0} \quad , \quad \sum \overline{M}_{i0} = \overline{0} \tag{2.27}$$

Vektorové podmienky rovnováhy v tomto prípade rozpíšeme na tri skalárne rovnice:

- 1. alternatíva: *1 silová a 2 momentové rovnice, napr. k osiam x, z*

$$\begin{aligned} \sum F_{iy} &= \sum F_i = 0 \\ \sum M_{ix} &= 0 \\ \sum M_{iz} &= 0 \end{aligned} \tag{2.28}$$

- 2. alternatíva: *3 momentové rovnice k ľubovoľným osiam a, b, c*

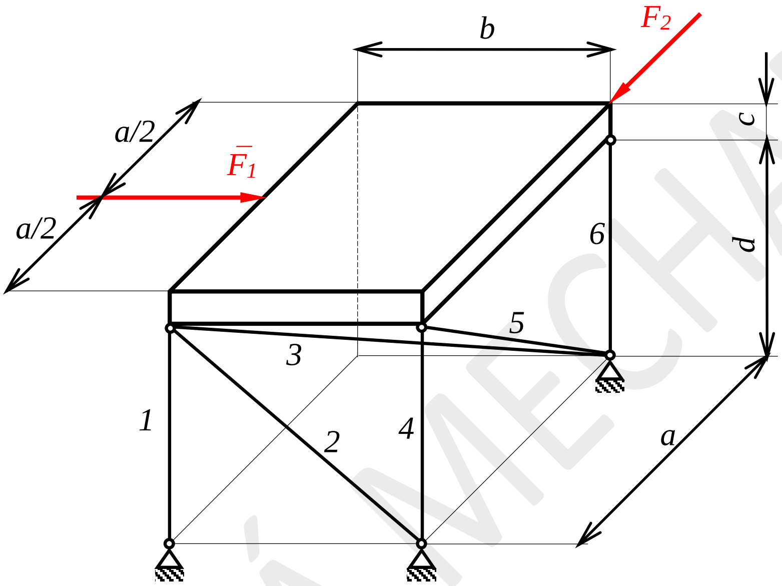
$$\begin{aligned} \sum M_{ia} &= 0 \\ \sum M_{ib} &= 0 \\ \sum M_{ic} &= 0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Poznámka: *Žiadna z osí nesmie byť rovnobežná s danou RPSS. Osi a, b, c sa nesmú pretínať v jednom bode, ani byť navzájom rovnobežné.*

RIEŠENÉ PRÍKLADY

PRÍKLAD 2.8: Tuhá obdĺžniková doska je uložená v danej polohe pomocou šiestich prútov. Doska je zaťažená silami $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ a vlastnou tiažou $\overline{G}$. Vypočítajte osové sily vo všetkých prútoch. Úlohu riešte analyticky.

Dané: $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{G}, a, b, c, d$
Hľadané: $\overline{N}_1 \div \overline{N}_6$



Obrázok 2.8.1

Riešenie: Po zaťažení dosky silami $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{G}$ vzniknú vo väzbách reakcie, ktoré majú dosku udržať v pôvodnej polohe. Zaťažujúce sily pôsobia na teleso v rôznych rovinách. Rovnako väzby prútmi, ktorými je doska upevnená k základni, sú zrealizované tak, že nositeľky ich reakcií na vonkajšie zaťaženie ležia v rôznych rovinách. Zaťažujúce sily spolu so silami reakčnými tvoria všeobecnú priestorovú silovú sústavu (VPSS).

Tvarová a statická určitosť: Voľné teleso v priestore má 6 stupňov voľnosti pohybu. Doska je k rámu viazaná šiestimi prútmi. Každý z nich uberá jeden stupeň voľnosti pohybu. Potom

$$i = v - u = 6 - 6 \cdot 1 = 0$$, úloha je tvarovo určitá.

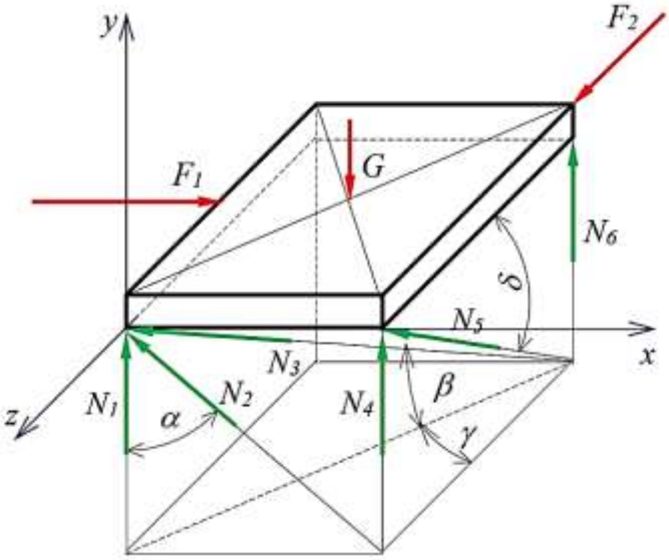
Pri analytickom riešení máme k dispozícii šesť statických podmienok rovnováhy (3 silové a 3 momentové), z ktorých vieme vypočítať šesť neznámych parametrov (veľkosti síl N_1 až N_6). Úloha je preto aj staticky určitá.

Analytické riešenie: Uvoľníme hmotný objekt (*obr. 2.8.2*), t.j. väzby prútmi nahradíme silami N_1 až N_6. Nositeľky síl v prútoch poznáme, ich orientácie predpokladáme podľa obrázku.

Poznámka: *Sily, ktorými nahrádzame väzby telesa k rámu, je nutné zakresliť k uvoľnenému telesu vždy v mieste pôsobenia na teleso!*

Napíšeme podmienky rovnováhy. V prípade VPSS je potrebné zostaviť šesť rovníc, podľa možností čo najjednoduchších, t.j. s minimálnym počtom neznámych v každej rovnici. Pre vyjadrenie veľkostí súradnicových zložiek jednotlivých síl potrebujeme vypočítať uhly odklonu ich nositeliek od osí zvolenej súradnicovej sústavy zo zadaných rozmerov

$$tg\alpha = \frac{b}{d}, \qquad tg\beta = \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad tg\gamma = \frac{b}{a}, \qquad tg\delta = \frac{d}{a}$$



Obrázok 2.8.2

V našom prípade môžeme napísať napríklad tri silové a tri momentové podmienky rovnováhy.

$$\sum F_{ix} = 0: \qquad F_1 - N_2 \sin\alpha - N_3 \cos\beta \sin\gamma = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\sum F_{iy} = 0: \qquad -G + N_1 + N_4 + N_6 + N_2 \cos\alpha + N_5 \sin\delta + N_3 \sin\beta = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$\sum F_{iz} = 0: \qquad F_2 + N_5 \cos\delta + N_3 \cos\beta \cos\gamma = 0 \qquad \text{(c)}$$

$$\sum M_{ix} = 0: \qquad -G\,\frac{a}{2} + F_2\, c + N_6\, a = 0 \qquad \text{(d)}$$

$$\sum M_{iy} = 0: \qquad -F_1\,\frac{a}{2} - F_2\, b - N_5 \cos\delta\; b = 0 \qquad \text{(e)}$$

$$\sum M_{iz} = 0: \qquad -G\,\frac{b}{2} - F_1\, c + N_4\, b + N_5 \sin\delta\; b + N_6\, b = 0 \qquad \text{(f)}$$

Poznámka: *Momentové podmienky sú vyjadrené k trom zvoleným osiam. Veľkosti otáčavých účinkov (momentov) jednotlivých síl k osiam vyjadruje vždy súčin veľkosti príslušnej súradnicovej zložky a kolmej vzdialenosti jej nositeľky od danej osi.*

Riešením systému rovníc nájdeme veľkosti osových síl v prútoch N_1 až N_6.

z (d) $$N_6 = \frac{G\,\frac{a}{2} - F_2\,c}{a}$$

z (e) $$N_5 = \frac{-F_1\,\frac{a}{2} - F_2\,b}{b\cos\delta}$$

z (f) $$N_4 = \frac{G\,\frac{b}{2} + F_1\,c - N_5 \sin\,\delta\;b - N_6\,b}{b}$$

z (c) $$N_3 = \frac{-F_2 - N_5 \cos\delta}{\cos\beta\cos\gamma}$$

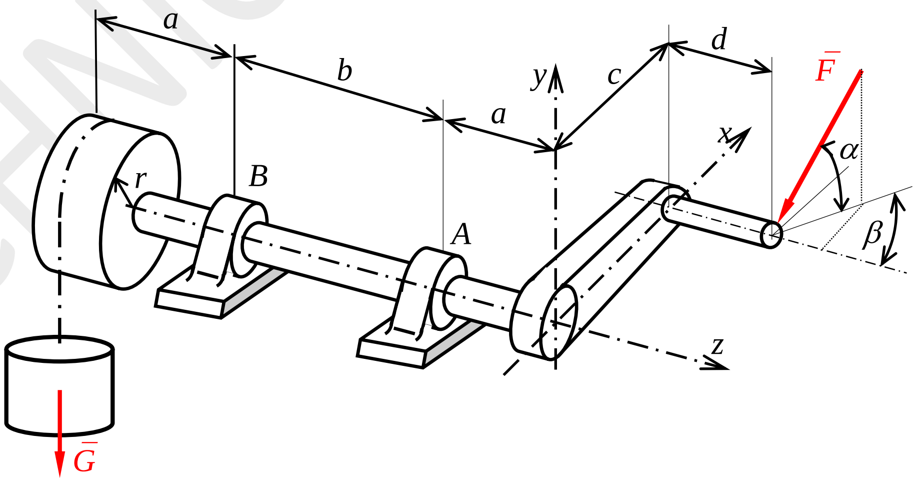
z (a) $$N_2 = \frac{F_1 - N_3 \cos\beta \sin\,\gamma}{\sin\,\alpha}$$

z (b) $$N_1 = G - N_4 - N_6 - N_2 \cos\alpha - N_5 \sin\delta - N_3 \sin\beta.$$

PRÍKLAD 2.9: Na kľuku zdvíhadla pôsobí sila F = 245N. Ložisko v mieste B prenáša sily radiálne a ložisko v mieste A sily radiálne i axiálne. Určte tiaž G závažia a reakcie v ložiskách pri zachovaní rovnovážneho stavu, ak a = 0,1m, b = 0,15m, c = 0,25m, d = 0,08m, r = 0,1m , α = 70°, β = 35°.

Dané: $\overline{F}, a, b, c, d, r, \alpha, \beta$

Hľadané: $\overline{G}, \overline{A}, \overline{B}$



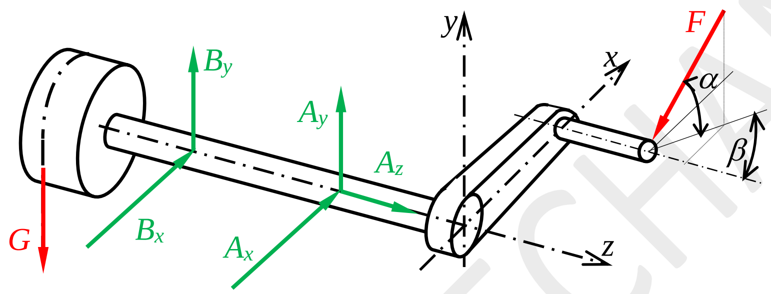
Obrázok 2.9.1

Riešenie: Vonkajšie sily $\overline{F}$ a $\overline{G}$ spolu s reakciami v ložiskách pôsobia na zdvíhadlo v rôznych rovinách, majú rôzne pôsobiská, veľkosti, smery a tvoria VPSS.

Tvarová a statická určitosť: Voľné teleso v priestore má šesť stupňov voľnosti. Hriadeľ zdvíhadla je uložený v krátkom radiálno-axiálnom ložisku Aa krátkom radiálnom ložisku B. Ložisko A odoberá tri stupne voľnosti (tri posuvy v smere osí x, y, z), ložisko B dva stupne voľnosti (dva posuvy v smere osí x, y). Väzbová závislosť je vyjadrená vzťahom

$$i = v - u = 6 - (3 + 2) = 1.$$

Teleso sa môže otáčať okolo osi z. Rovnováha síl je však nielen podmienkou relatívneho pokoja, ale aj rovnomerného (v našom prípade otáčavého) pohybu. V šiestich podmienkach rovnováhy máme 5 neznámych parametrov –reakciíA_x, A_y, A_z, B_x, B_y. Úloha je staticky preurčená. Statickú určitosť dosiahneme pridaním jedného neznámeho parametra (veľkosť tiažovej sily závažia G).



Obrázok 2.9.2

Analytické riešenie: Uvoľníme hmotný objekt (*obr. 2.9.2*). Zakreslíme k nemu známe sily. Väzby nahradíme príslušnými reakčnými silami. Napíšeme podmienky rovnováhy.

$$\sum F_{ix} = 0: \qquad B_x + A_x - F\cos\alpha \sin\beta = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\sum F_{iy} = 0: \qquad B_y + A_y - G - F\sin\alpha = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$\sum F_{iz} = 0: \qquad A_z - F\cos\alpha\cos\beta = 0 \qquad \text{(c)}$$

$$\sum M_{ix} = 0: \qquad B_y(a+b) + A_y\, a - G(2a+b) + F\sin\alpha\; d = 0 \qquad \text{(d)}$$

$$\sum M_{iy} = 0: \qquad -B_x(a+b) - A_x\, a + F\cos\alpha\cos\beta\; c - F\cos\alpha\sin\beta\; d = 0 \qquad \text{(e)}$$

$$\sum M_{iz} = 0: \qquad G\,r - F\sin\alpha\; c = 0. \qquad \text{(f)}$$

Po dosadení daných hodnôt

$$G = \frac{245\sin 70°\cdot 0{,}25}{0{,}1} = 575{,}5N$$

$$A_z = 245\cos 70°\cos 35° = 68{,}6N$$

$$A_y = \frac{245\sin 70°\cdot 0{,}08 + (245\sin 70° + 575{,}5)\cdot 0{,}25 - 575{,}5\cdot 0{,}35}{0{,}15} = 122{,}8N$$

$$B_y = 245\sin 70° + 575{,}5 - 122{,}8 = 682{,}9N$$

$$B_x = \frac{245\cos 70°\cos 35° \cdot 0{,}25 - 245\cos 70°\sin 35° \cdot 0{,}18}{0{,}15} = 56{,}7N$$

$$A_x = 245\cos 70°\sin 35° - 56{,}7 = -8{,}6N\ .$$

Reakcia A_x je orientovaná v opačnom zmysle ako predpokladaná. Pre výsledné reakcie v bodoch A, B platí:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{(-8{,}6)^2 + 122{,}8^2 + 68{,}6^2} = 140{,}9N$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{56{,}7^2 + 682{,}9^2} = 685{,}2N\ .$$

Poznámka: *Pre technickú prax je potrebné poznať aj radiálnu silu v ložisku A*

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(-8{,}6)^2 + 122{,}8^2} = 123{,}1N\ .$$

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

[1] PAŠKO, J. – ŠMERINGAIOVÁ, A.: *Technická mechanika I.* Prešov: FVT TU v Košiciach so sídlom v Prešove. 2012, 184 s., ISBN 978-80-553-0891-3

[2] PAŠKO, J. – ŠMERINGAIOVÁ, A.: *Príručka statiky s príkladmi*, Prešov: FVT, 2008, 202 s., ISBN 978-80-553-0127-3

[3] BUŠOVÁ, B. - CABAN, S. – ŽIARAN, S.: *Mechanika I. Statika*. Bratislava: STU. 1996, 272s. ISBN 80-227-0831-3