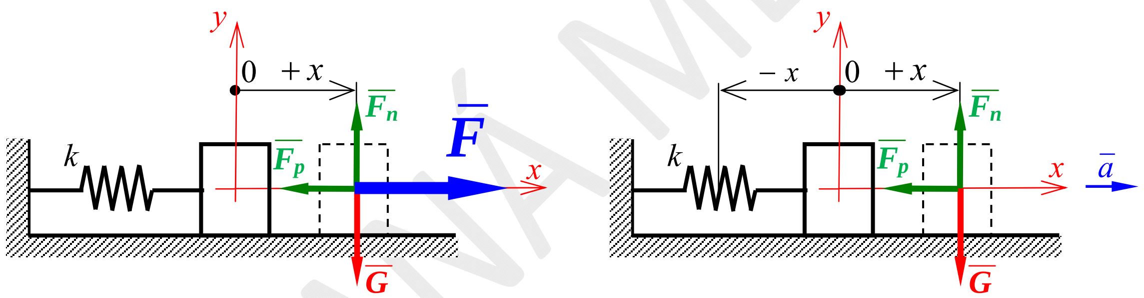
VOĽNÉ NETLMENÉ KMITANIE LINEÁRNYCH MECHANICKÝCH SÚSTAV S JEDNÝM STUPŇOM VOĽNOSTI

PRÍKLAD 6.1: Teleso o hmotnosti m je upevnené k rámu pomocou valcovej pružiny s tuhosťou k. Pôsobením vonkajšej sily $\bar{F}$ vychýlime teleso z jeho rovnovážnej polohy. Určte dobu kmitu T a frekvenciu kmitania telesa f_0, ktoré nastane po odznení účinku vonkajšej sily. Vplyv pasívnych odporov zanedbajte.

RIEŠENIE: Telesá upevnené k rámu pružnými väzbami (pružinami) konajú po vychýlení z rovnovážnej polohy kmitavý pohyb. Kmitavý pohyb je možné popísať ako pohyb striedavo zrýchlený a spomalený, určený pohybovou rovnicou. Pri odvodení pohybovej rovnice vychádzame z obrázku uvoľnenia kmitajúceho telesa. V danom prípade skúmame hranol uložený na podložke, ktorý podľa *obr. 6.1a* po vychýlení z kľudovej (rovnovážnej) polohy silou $\bar{F}$, bude konať translačný pohyb v smere osi x. Pre zjednodušenie riešenia nahradíme teleso hmotným bodom. Uvažujeme nasledovne:
Ak na teleso (hmotný bod) nepôsobí v smere osi x žiadna vonkajšia sila a pružina nie je deformovaná, pružina sa nachádza v počiatku súradnicovej sústavy $0(x,y)$, resp. v *rovnovážnej polohe* (RP).



a) *b)*

Obrázok 6.1

Pôsobením vonkajšej sily $\bar{F}$ v smere osi x vychýlime teleso z rovnovážnej polohy ($x = 0$) a teleso okamžite uvoľníme. V okamihu, keď vonkajšia sila $\bar{F}$ prestane na teleso pôsobiť, vznikne priamočiary kmitavý pohyb, tzv. „*voľné kmitanie bez tlmenia*“. Pri riešení použijeme *metódu uvoľnenia* a pohybovú rovnicu zostavíme *metódou zrýchľujúcich síl*. V tomto prípade pasívne odpory a hmotnosť pružiny zanedbáme. Na teleso tak v smere osi x pôsobí len *vratná sila v pružine* F_p (*obr. 6.1b*).

Ak teleso z rovnovážnej polohy posunieme o vzdialenosť x, pružina sa deformuje (predĺži) a na teleso začne pôsobiť silou orientovanou proti zmyslu deformácie pružiny Zložku tejto sily v smere osi x vyjadruje rovnica $F_p = -kx$, kde konštanta k je *silová konštanta* (*tuhosť pružiny*), $k > 0$. Ak teleso uvoľníme (vonkajšia sila prestane pôsobiť), sila v pružine mu udelí zrýchlenie a potenciálna energia natiahnutej pružiny sa premení na kinetickú energiu telesa. Po prechode rovnovážnou polohou teleso začne pružinu stláčať. Kinetická energia sa premení na potenciálnu energiu stlačenej pružiny, situácia sa opakuje a teleso začne vykonávať periodický pohyb po priamke. Takáto sústava predstavuje *lineárny harmonický oscilátor*.

Pohybová rovnica vo vektorovom tvare má na základe *obr. 6.1b* tvar

$$m\,\bar{a} = \bar{F}_p + \bar{G} + \bar{F}_n \tag{a}$$

kde m - hmotnosť telesa,

$\bar{a}$ - zrýchlenie telesa; $a = a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$, $a_y = 0$

$\bar{F}_p$ - sila v pružine; $F_p = kx$,

$\bar{G}$ - tiaž telesa; $G = mg$; g je tiažové zrýchlenie,

$\bar{F}_n$ - väzbová reakcia od podložky.

Vyjadrime pohybovú rovnicu (a) v skalárnom tvare:

$$x: \quad m\,\ddot{x} = -F_p \tag{b}$$

$$y: \quad 0 = F_n - G \tag{c}$$

Z (c) vypočítame veľkosť väzbovej reakcie F_n.

$$0 = F_n - mg \quad \Rightarrow \quad F_n = mg$$

Vlastná pohybová rovnica translačného kmitavého pohybu telesa má tvar

$$m\,\ddot{x} = -k\,x \tag{d1}$$

$$\boxed{m\,\ddot{x} + k\,x = 0} \tag{d2}$$

Pre určenie doby kmitu T a frekvencie kmitania telesa f_0 vypočítame *vlastnú kruhovú frekvenciu* voľného netlmeného kmitania. Upravme rovnicu (d1), resp. (d2) na tvar lineárnej diferenciálnej rovnice 2. rádu:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \tag{d3}$$

kde hodnotu Ω_0 *vlastnej uhlovej frekvencie,* resp. *vlastnej kruhovej frekvencie* voľného netlmeného kmitania vyjadruje konštanta pri výchylke x

$$\frac{k}{m} = \Omega_0^2 = konšt.. \tag{e}$$

Potom pohybovú rovnicu translačného kmitavého pohybu telesa zapíšeme v tvare

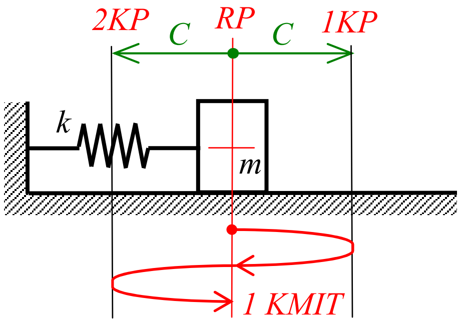
$$\boxed{\ddot{x} + \Omega_0^2\,x = 0} \tag{d4}$$

Čas T (*periódu kmitania*) a *frekvenciu kmitania* f_0 vypočítame:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} \tag{f}$$

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{T} = \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}} \tag{g}$$

Poznámka: Perióda kmitania – čas potrebný na vykonanie jedného kmitu, t. j. pohybu telesa z rovnovážnej polohy (RP) do prvej krajnej polohy (1KP), potom do druhej krajnej polohy (2KP) a späť do rovnovážnej polohy.

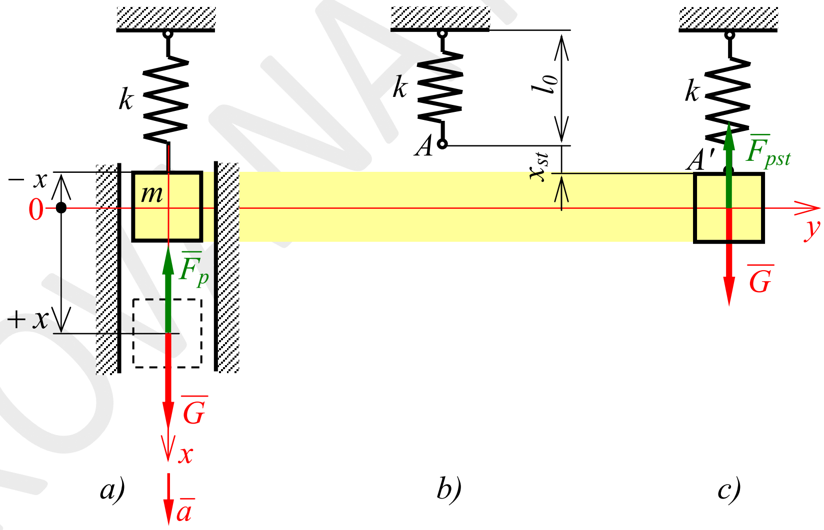


Obrázok 6.2

Poznámka: Frekvencia kmitania alebo *vlastný kmitočet* je dôležitým parametrom v teórii kmitania. Je to počet kmitov za časovú jednotku [s]. Jednotkou je 1 herz [Hz], rozmer [s^{-1}].

PRÍKLAD 6.2: Určte, aký vplyv má *statické predĺženie pružiny* na jej *vlastný kmitočet*. Teleso o hmotnosti m je zavesené na pružine s tuhosťou k a kmitá v zvislom smere.

RIEŠENIE: Na *obr. 6.3* je prípad lineárnej mechanickej sústavy, kde os pružiny je vo vertikálnom smere. Kmitavý pohyb nastane v smere osi pružiny.



Obrázok 6.3

Koncový bod nezaťaženej pružiny (*obr. 6.3b*) zaujme polohu označenú bodom A. Po zavesení telesa (hmotného bodu) o hmotnosti m sa pružina predĺži a jej koncový bod sa posunie o výchylku x_{st} vyvolanú statickou (stálou a nemennou) tiažovou silou telesa (bod A'). *Obr. 6.3c* zobrazuje mechanickú sústavu (hmotný bod + pružina) v rovnovážnej polohe, pre ktorú platí podmienka rovnováhy tiaže $\overline{G}$ telesa a zodpovedajúcej statickej vratnej sily v pružine $\overline{F}_{pst}$. Ak veľkosti týchto síl sú:

$$G = mg; \qquad F_{pst} = k\,x_{st}\,,$$

Potom platí

$$G - F_{pst} = 0$$

$$mg - k\,x_{st} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{mg = k\,x_{st}}$$

Keď potom teleso vychýlime z rovnovážnej polohy o vzdialenosť x, bude celková deformácia pružiny $(x + x_{st})$. Pohybová rovnica v skalárnom tvare zostavená v smere osi x zvolenej súradnicovej sústavy podľa obrázku uvoľnenia (*obr. 6.3a*) bude:

$$m\ddot{x} = -k\left(x + x_{st}\right) + mg\,.$$

Po úprave a dosadení $mg = k\,x_{st}$

$$m\ddot{x} = -kx - kx_{st} + kx_{st}$$

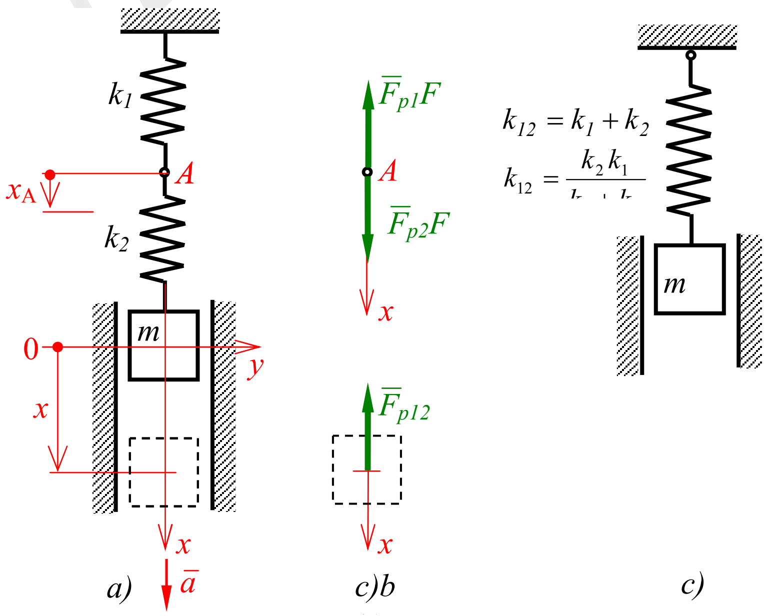
dostávame rovnakú pohybovú rovnicu ako v predošlom prípade

$$m\ddot{x} = -k\,x$$

$$\boxed{m\ddot{x} + k\,x = 0}$$

Poznámka: Priebeh voľného kmitavého pohybu lineárnej mechanickej sústavy bez trenia s jedným stupňom voľnosti *nezávisí od tiažovej sily telesa*. Tiažová sila v prípade zvislej osi pružiny má vplyv len na určenie rovnovážnej polohy sústavy, okolo ktorej bude vykonávať voľné netlmené kmitanie.

PRÍKLAD 6.3: Teleso je k rámu upevnené pomocou dvoch pružín s tuhosťami k_1, k_2 zapojenými *za sebou*, t. j. *sériovo* (*obr. 6.4*). Zostavte pohybovú rovnicu kmitajúceho telesa a odvoďte vzťah pre výpočet tuhosti ekvivalentnej pružiny.



Obrázok 6.4

RIEŠENIE: Po vychýlení z rovnovážnej polohy teleso kmitá v zvislom smere. Na základe obrázku uvoľnenia telesa (hmotného bodu) - *obr. 6.4b* zostavíme pohybovú rovnicu v skalárnom tvare.

$$m\ddot{x} = -F_{p2} = -k_2(x - x_A) \tag{a}$$

kde $F_{p2} = -k_2(x - x_A)$ je veľkosť vratnej sily od pružiny k_2. V bode A, v ktorom sú pružiny spojené navzájom musí byť splnená podmienka rovnováhy.

$$0 = F_{p2} - F_{p1} = k_2(x - x_A) - k_1 x_A \tag{b}$$

Upravme (b)

$$k_2(x - x_A) = k_1 x_A$$

potom

$$x_A = \frac{k_2 x}{k_1 + k_2} \tag{c}$$

Dosadíme (c) do (a)

$$m\ddot{x} = -k_2\left(x - \frac{k_2 x}{k_1 + k_2}\right)$$

$$m\ddot{x} = -k_2 x + \frac{k_2^2 x}{k_1 + k_2} = \frac{-k_2(k_1 + k_2)x + k_2^2 x}{k_1 + k_2} = \frac{-k_2 k_1 x - k_2^2 x + k_2^2 x}{k_1 + k_2}$$

a upravíme na

$$\boxed{m\ddot{x} + \frac{k_2 k_1}{k_1 + k_2} x = 0} \tag{d}$$

$$\boxed{m\ddot{x} + k_{12} x = 0} \qquad \text{kde} \qquad \boxed{k_{12} = \frac{k_2 k_1}{k_1 + k_2}}$$

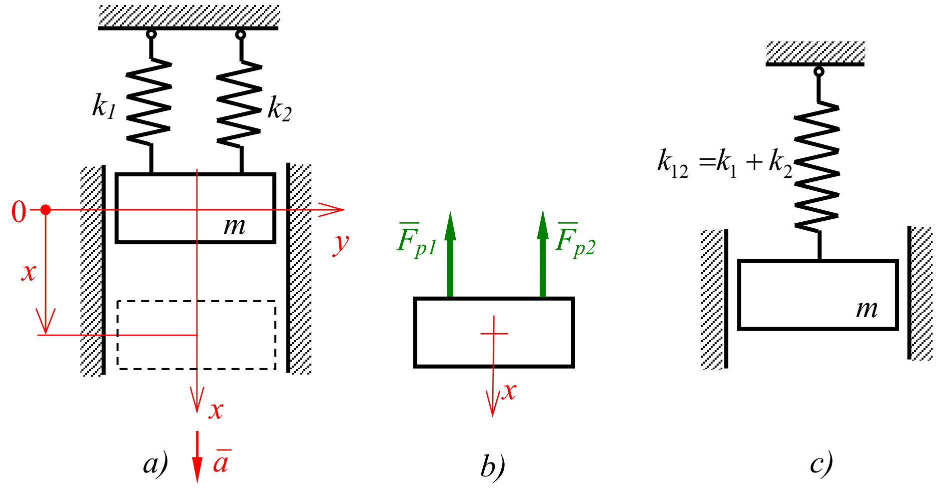
Poznámka: Prevrátená hodnota výslednej tuhosti k_{12} pružiny, ktorá ekvivalentne nahrádza dve pružiny zapojené za sebou (sériovo) je rovná súčtu ich prevrátených hodnôt.

Platí: $$\boxed{\frac{1}{k_{12}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_{12} = \frac{k_2 k_1}{k_1 + k_2}}$$

Toto pravidlo platí rovnako pre viacero pružín („*N*“) pružín zapojených do série:

$$\boxed{\frac{1}{k_{1\ldots N}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{k_i}}$$

PRÍKLAD 6.4: Teleso je k rámu upevnené pomocou dvoch pružín s tuhosťami k_1, k_2 zapojenými *vedľa seba*, t. j. *paralelne* (*obr. 6.5*). Zostavte pohybovú rovnicu kmitajúceho telesa a odvoďte vzťah pre výpočet tuhosti ekvivalentnej pružiny.



Obrázok 6.5

RIEŠENIE: Po vychýlení z rovnovážnej polohy teleso kmitá v zvislom smere. Na základe obrázku uvoľnenia na *obr. 6.5b* telesa (hmotného bodu) zostavíme pohybovú rovnicu v skalárnom tvare.

$$m\ddot{x} = -F_{p1} - F_{p2} = -k_1 x - k_2 x \qquad \text{(a)}$$

Kde F_{p1}, F_{p2} sú veľkosti vratných síl v pružinách s tuhosťami k_1, k_2. Po úprave (a):

$$\boxed{m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = 0} \qquad \text{(b)}$$

$\boxed{m\ddot{x} + k_{12}x = 0}$, kde $\boxed{k_{12} = k_1 + k_2}$

Poznámka: Výsledná tuhosť pružiny, ktorá ekvivalentne nahrádza dve pružiny zapojené *vedľa seba* (*paralelne*), je rovná súčtu ich tuhostí.

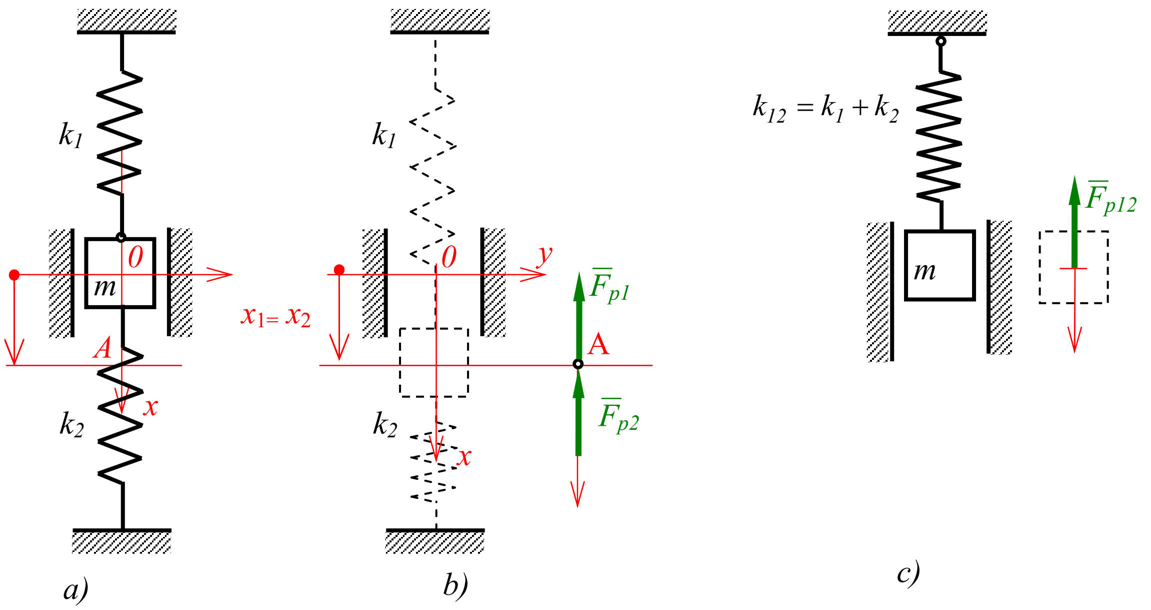
Platí $\boxed{k_{12} = k_1 + k_2}$ (c)

Toto pravidlo platí aj pre viacero pružín ("*N*") zapojených *paralelne*.

$$\boxed{k_{1...N} = \sum_{i=1}^{N} k_i}$$

Poznámka: Špeciálnym prípadom zapojenia pružín je zapojenie podľa *obr. 6.6*, pri ktorom sa zapojenie javí na prvý pohľad ako sériové, ide však o paralelné zapojenie, nakoľko veľkosť predĺženia obidvoch pružín je v každom okamihu kmitania rovnaká. Pre výslednú tuhosť takto zapojených pružín platí rovnaký vzťah ako pri klasickom paralelnom zapojení (c).

Poznámka: Pomôcka pri určení typu zapojenia pružín:
Paralelné: Pri kmitania mechanickej sústavy vzniká v pružinách rovnako veľká deformácia.
Sériové: Počas kmitania mechanickej sústavy vzniká v pružinách rôzne veľká deformácia.



Obrázok 6.6