Metóda redukcie hmotnostných a silových veličín

Uvedená metóda je založená na myšlienke, že celú pohybujúcu sa sústavu nahradíme jedným redukovaným útvarom, a to rotačne uloženým kotúčom, alebo translačne uloženým telesom, alebo hmotným bodom s rovnakými dynamickými vlastnosťami ako pôvodná sústava. Za redukovaný člen, teda člen, na ktorý redukujeme silové a hmotnostné účinky telies sústavy, volíme obyčajne hnací člen sústavy, čo však nie je všeobecná podmienka.

Vlastná pohybová rovnica sústavy s 1° voľnosti pohybu má tvar:

$$M^*.\ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{dM^*}{dq}\dot{q}^2 = Q \qquad (11.3)$$

q - zovšeobecnená súradnica

M^* - zovšeobecnená redukovaná hmotnosť

Q - zovšeobecnená redukovaná sila

Pri sústavách s konštantným prevodom, pri ktorých je $M^*(q) = \overline{konšt.}$ platí

$$\frac{dM^*}{dq} = 0$$

a rovnica (11.3) sa zjednoduší na tvar:

$$M^*.\ddot{q} = Q \qquad (11.4)$$

Vzhľadom na druh pohybu člena sústavy, na ktorý redukujeme, môžu mať jednotlivé členy rovnice 11.3 význam podľa tabuľky

Translačný pohyb		**Rotačný pohyb**
m_{red}	M^*	I_{red}
F_{red}	Q	M_{red}
s	q	φ
$\dot{s} = v$	$\dot{q}$	$\dot{\varphi} = \omega$
$\ddot{s} = a$	$\ddot{q}$	$\ddot{\varphi} = \alpha$
$m_{red}.a + \frac{1}{2}\frac{dm_{red}}{ds}v^2 = F_{red}$	*Pohybová rovnica*	$I_{red}.\alpha + \frac{1}{2}\frac{dI_{red}}{d\varphi}\omega^2 = M_{red}$
$F_{red} = m_{red}.a$ a – zrýchlenie člena, na ktorý redukujeme	*Zjednodušený tvar pre* $M^*(q) = \overline{konšt.}$	$M_{red} = I_{red}.\alpha$ α – uhlové zrýchlenie člena, na ktorý redukujeme

Zovšeobecnenú redukovanú hmotnosť určujeme z rovnosti kinetickej energie pôvodnej a náhradnej sústavy, čo môžeme vyjadriť rovnicou:

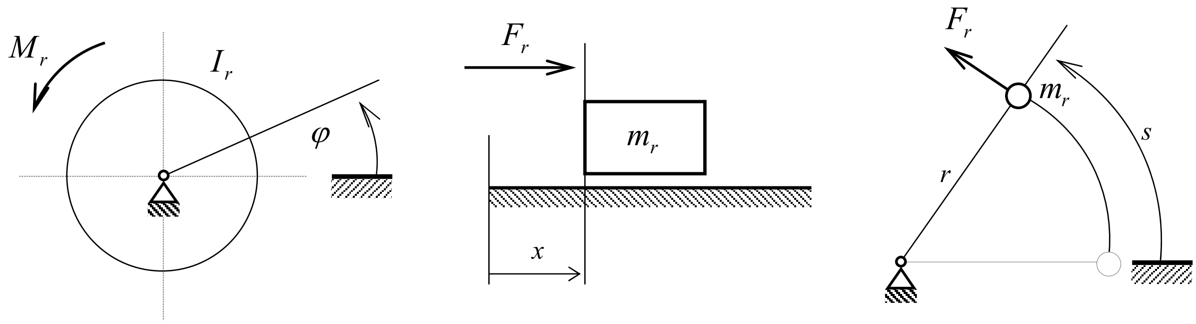
$$\sum_i \left(\frac{1}{2}m_i v_i^2 + \frac{1}{2}I_i\omega_i^2\right) = \frac{1}{2}M^*.\dot{q}^2 \qquad (11.5)$$

Zovšeobecnenú redukovanú silu Q určujeme z rovnosti elementárnych prác pracovných síl na sústavu pôsobiacich a elementárnej práce hľadanej zovšeobecnenej sily Q alebo Q vypočítame z rovnosti okamžitého výkonu pracovných síl pôsobiacich na sústavu a výkonu hľadanej zovšeobecnenej sily Q.

$$Q.\delta q = \sum_i \overline{F}_i.\delta\overline{r}_i \tag{11.6}$$

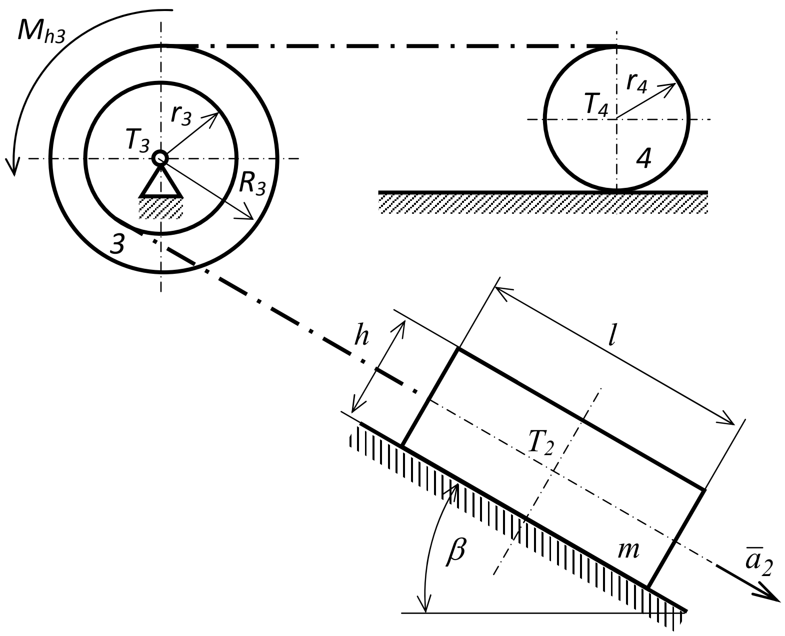
$$Q.\dot{q} = \sum_i \overline{F}_i.\overline{v}_i \qquad \text{alebo} \qquad Q.\dot{q} = \sum_i \overline{M}_i.\omega_i$$

Základnými redukovanými útvarmi sú:
a) rotujúci kotúč,
b) translačne sa pohybujúce teleso,
c) rotujúci hmotný bod.



a) b) c)

Príklad 1:
Určte hnací moment M_h tak, aby teleso 2 dosiahlo rýchlosť v_2 na dráhe s_2. V čase $t = 0$ sa sústava nachádza v pokoji. Predpokladajte, že sa teleso 2 rozbieha konštantným zrýchlením $\bar{a}_2$.
Dané sú hodnoty: GHV, m_2, m_3, m_4, r_3, R_3, r_4, l, h, i_{T3}), β, s_2, v_2, a_2-*konšt.*
Úlohu riešte
- metódou redukcie hmotnostných a silových veličín **s redukciou na teleso 3**.
- Lagrangeovými rovnicami II. rádu
- metódou Virtuálnych prác



Obr. 1

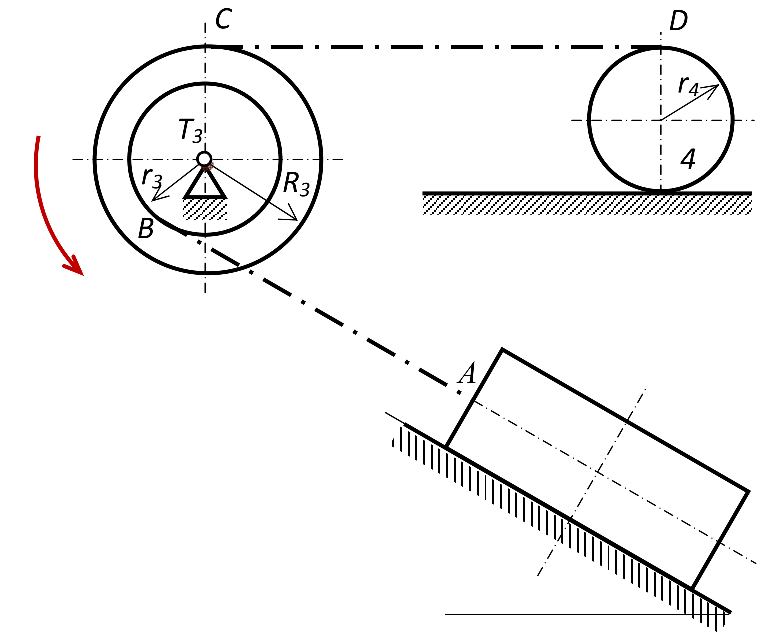
I. ROZBOR POHYBOV JEDNOTLIVÝCH ČLENOV SÚSTAVY

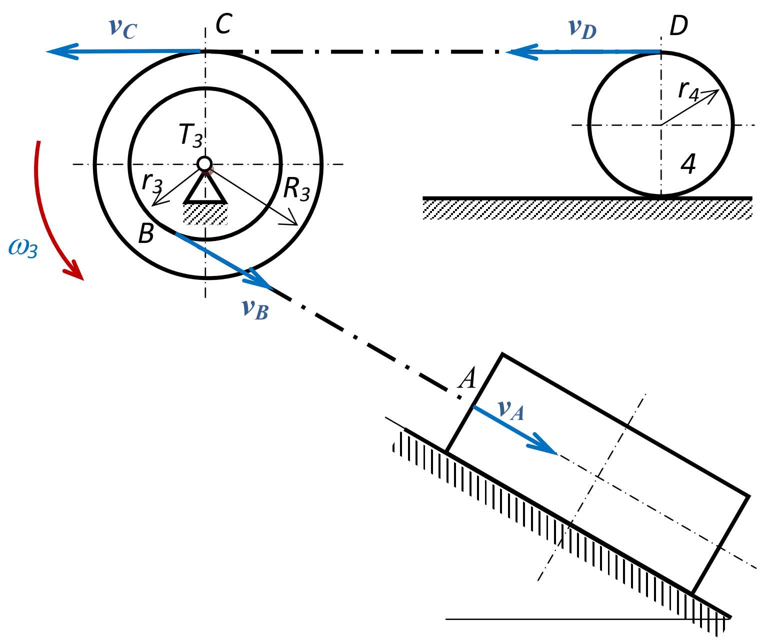
Teleso 2: translačný pohyb (TP)
Teleso 3: rotačný pohyb (RT)
Teleso 4: všeobecný rovinný pohyb (VšRP)

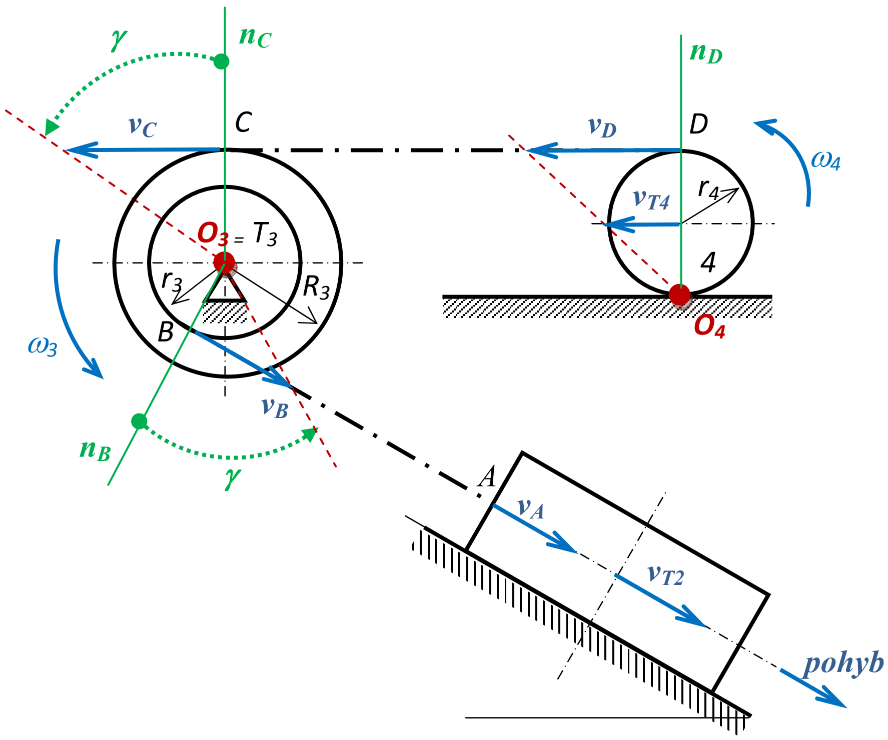
Kinematické veličiny charakterizujúce pohyb:

Teleso 2: a_{T2}, v_{T2}, s_2
Teleso 3: α_3, ω_3, φ_3
Teleso 4: a_{T4}, v_{T4}, s_4
α_4, ω_4, φ_4

Na Obr.2 sú znázornené rýchlosti charakteristických bodov sústavy s využitím Vety o zorných uhloch :
„Z okamžitého stredu otáčania vidíme v danom časovom okamihu rýchlosti všetkých bodov telesa pod rovnakým zorným uhlom.“


C
D
r_4
T_3
r_3
R_3
4
B
A


v_C
C
v_D
D
r_4
T_3
r_3
R_3
4
B
ω_3
v_B
A
v_A



Obr. 2

Teleso	v, ω	s, φ	a, α
T3 - teleso na ktoré redukujem	$\omega_3 = \omega_3 \, . \, ...$	$\varphi_3 = \varphi_3 \, . \, ...$	$\alpha_3 = \alpha_3 \, . \, ...$
T2	$v_{T2} = \omega_3 \, . \, ...$	$s_2 = \varphi_3 \, . \, ...$	$a_{T2} = \alpha_3 \, . \, ...$
T4	$\omega_4 = \omega_3 \, . \, ...$	$\varphi_4 = \varphi_3 \, . \, ...$	$\alpha_4 = \alpha_3 \, . \, ...$
	$v_{T4} = \omega_3 \, . \, ...$	$s_4 = \varphi_3 \, . \, ...$	$a_{T4} = \alpha_3 \, . \, ...$

Zo zadania vyplýva, že je potrebné **redukovať** hmotnostné a silové veličiny vzhľadom **na teleso** *3*, preto budeme aj kinematické veličiny telies *2 a 4* (a_{T2}, v_{T2}, s_2, a_{T4}, v_{T4}, s_4, α_4, ω_4, φ_4) vyjadrovať pomocou odpovedajúcich kinematických veličín telesa 3 (α_3, ω_3, φ_3) s využitím prevodových pomerov.

Napríklad pre rýchlosti (uhlové rýchlosti) platia vzťahy:

$$v_{T2} = v_A \tag{1}$$

$$v_A = v_B \tag{2}$$

$$v_B = \omega_3 . r_3 \tag{3}$$

$$v_C = \omega_3 . R_3 \tag{4}$$

$$v_C = v_D \tag{5}$$

$$v_D = \omega_4 . 2r_4 \tag{6}$$

$$v_{T4} = \omega_4 . r_4 \tag{7}$$

Z rovníc (1) až (3)

$$v_{T2} = v_A = v_B = \omega_3 . r_3$$

Z rovníc (4) až (6)

$$\omega_3 . R_3 = \omega_4 . 2r_4$$

$$\omega_4 = \omega_3 . \frac{R_3}{2r_4}$$

Dosadením do (7)

$$v_{T4} = \omega_3 . \frac{R_3}{2r_4} . r_4 = \omega_3 . \frac{R_3}{2}$$

Prehľadné spracovanie potrebných kinematických veličín telies *2* a *4* vzhľadom na teleso *3* s využitím rovníc (1) až (7) je uvedené v Tab. **Zelenou farbou** sú označené prevodové pomery, pričom platí, že ak poznáme prevodový pomer medzi rýchlosťami, poznáme aj prevodový pomer medzi dráhovými veličinami, resp. medzi zrýchleniami. Tieto vzťahy využijeme pri ďalšom riešení - pri zostavovaní vlastnej pohybovej rovnice sústavy.

Tab.1

Teleso	***v, ω***	***s, φ***	***a, α***
***T3** - teleso na ktoré redukujem*	$\omega_3 = \omega_3 \,.\, 1$	$\varphi_3 = \varphi_3 \,.\, 1$	$\alpha_3 = \alpha_3 \,.\, 1$
T2	$v_{T2} = \omega_3 \,.\, \boldsymbol{r_3}$	$s_2 = \varphi_3 \,.\, \boldsymbol{r_3}$	$a_{T2} = \alpha_3 \,.\, \boldsymbol{r_3}$
T4	$\omega_4 = \omega_3 \,.\, \boldsymbol{R_3/2.r_4}$	$\varphi_4 = \varphi_3 \,.\, \boldsymbol{R_3/2.r_4}$	$\alpha_4 = \alpha_3 \,.\, \boldsymbol{R_3/2.r_4}$
	$v_{T4} = \omega_3 \,.\, \boldsymbol{R_3/2}$	$s_4 = \varphi_3 \,.\, \boldsymbol{R_3/2}$	$a_{T4} = \alpha_3 \,.\, \boldsymbol{R_3/2}$

Tabuľka prevodov je základným krokom pri všetkých troch metódach riešenia dynamiky sústav telies.

II. METÓDA REDUKCIE

Vychádzame z vlastnej pohybovej rovnice

$$M^* . \ddot{q} + \frac{1}{2} \frac{dM^*}{dq} \dot{q}^2 = Q$$

resp. z jej zjednodušenej podoby (*M*(q) = konšt.*)

$$M^* . \ddot{q} = Q$$

Keďže redukujeme na člen 3, ktorý vykonáva rotačný pohyb, základná pohybová rovnica má tvar

$$M_{red} = I_{red} . \alpha_3 \tag{8}$$

I_{red} získame porovnaním kinetickej energie sústavy s kinetickou energiou redukovaného člena

$$E_{K\,red} = E_{K\,sús}$$

$$\frac{1}{2} I_{red}.\omega_3{}^2 = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 + \frac{1}{2} I_i \omega_i^2\right) \tag{9}$$

M_{red} získame porovnaním výkonu sústavy s výkonom redukovaného člena

$$P_{red} = P_{sús}$$

$$M_{red}.\dot{\varphi} = \sum_i \left(F_i.v_i + M_i.\omega_i\right) \tag{10}$$

a) určenie I_{red}

$$E_{K\,red} = E_{K2} + E_{K3} + E_{K4}$$

$$\frac{1}{2} I_{red}.\omega_3{}^2 = \frac{1}{2} m_2 v_{T2}^2 + \frac{1}{2} I_{T3}\omega_3^2 + \frac{1}{2} m_4 v_{T4}^2 + \frac{1}{2} I_{T4}\omega_4^2 \qquad /.2$$

$$I_{red}.\omega_3{}^2 = m_2 v_{T2}^2 + I_{T3}\omega_3^2 + m_4 v_{T4}^2 + I_{T4}\omega_4^2$$

Dosadením za v_{T2}, v_{T4}, ω_4 vzťahy z Tab.

$$I_{red}.\omega_3{}^2 = m_2 \omega_3^2.r_3^2 + I_{T3}\omega_3^2 + m_4 \omega_3^2.\frac{R_3^2}{4} + I_{T4}\omega_3^2.\frac{R_3^2}{4.r_4^2} \qquad /.\frac{1}{\omega_3^2}$$

$$I_{red} = m_2.r_3^2 + I_{T3} + m_4.\frac{R_3^2}{4} + I_{T4}.\frac{R_3^2}{4.r_4^2} \tag{11}$$

Pre momenty zotrvačnosti telesa 3(dvojvalec) platí

$$I_{T3} = m_3.i_{T3}^2 \tag{12}$$

Pre momenty zotrvačnosti telesa 4 (valec) platí

$$I_{T4} = \frac{1}{2} m_4.r_4^2 \tag{13}$$

Dosadením (12), (13) do (11)

$$I_{red} = m_2.r_3^2 + m_3.i_{T3}^2 + m_4.\frac{R_3^2}{4} + \frac{1}{2} m_3.r_4^2.\frac{R_3^2}{4.r_4^2}$$

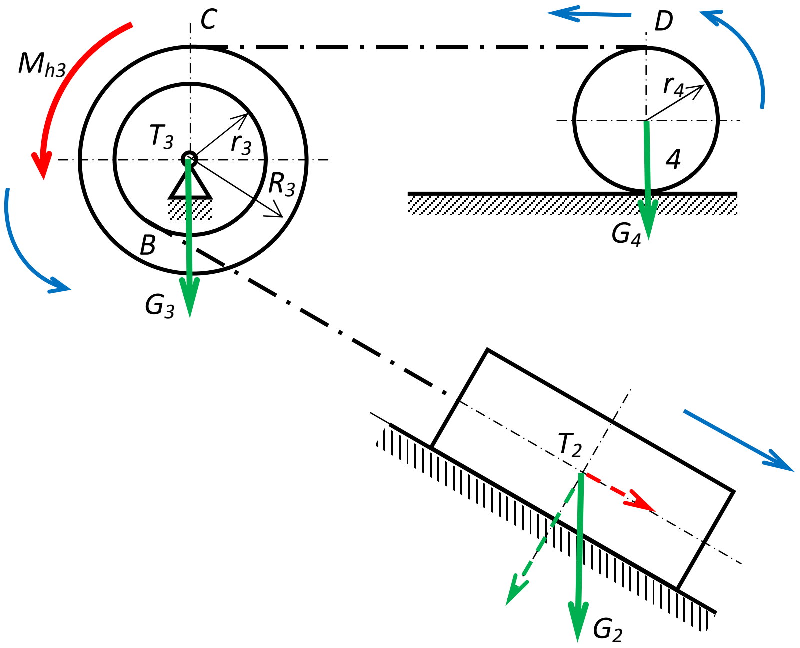
$$I_{red} = m_2.r_3^2 + m_3.i_{T3}^2 + m_4.\frac{R_3^2}{4} + \frac{1}{2} m_4.\frac{R_3^2}{4}$$

$$I_{red} = m_2.r_3^2 + m_3.i_{T3}^2 + \frac{3}{8} m_4.R_3^2 \tag{14}$$

b) určenie M_{red}

$$P_{red} = P_{súst}$$

$$P_{red} = P_2 + P_3 + P_4 \tag{15}$$



Obr. 3

Pre určenie výkonov jednotlivých telies je dôležité určenie pracovných síl a momentov. K pracovným silám patria

- vonkajšie sily a momenty, ktoré uvádzajú sústavu do pohybu
- tiaže resp. ich zložky pôsobiace v smere pohybu.

Znamienko „+“ alebo „-“ určíme porovnaním orientácie pracovnej sily (momentu) so smerom pohybu telesa.

Na sústavu podľa zadania pôsobí vonkajší moment „$+M_{h3}$ “, iná vonkajšia sila (moment) tam nie je.

Každé z telies sústavy má svoju vlastnú tiaž, ale len tiaž telesa *2* má zložku v smere pohybu „$+G_2.sin\beta$“.

Pracovné sily a momenty sú na Obr. zobrazené červenou farbou, pohyb jednotlivých telies modrou farbou.

Pre výkony jednotlivých telies sústavy platí:

Teleso 2: $P_2 = + G_2.sin\beta.\ v_{T2}$

Teleso 3: $P_3 = + M_{h3}.\omega_3$

Teleso 4: -

Dosadením do (15)

$$M_{red}.\omega_3 = G_2.\sin\beta.v_{T2} + M_{h3}.\omega_3 + 0 \tag{16}$$

$$M_{red}.\omega_3 = G_2.\sin\beta.\omega_3.r_3 + M_{h3}.\omega_3 + 0 \qquad /.\frac{1}{\omega_3}$$

$$M_{red} = G_2.\sin\beta.r_3 + M_{h3} \tag{17}$$

c) určenie α_3

Uhlové zrýchlenie α_3 je kinematickou veličinou, ktorú nepoznáme. Je potrebné určiť ju na základe známych parametrov v_2 a s_2, pričom vieme, že sústava sa rozbieha z kľudu konštantným zrýchlením a_2. Platí

$$a_2 = \frac{v.dv}{ds}$$

$$a_2.ds = v.dv$$

$$a_2.\int_0^{s_2} ds = \int_0^{v_2} v.dv$$

$$a_2.s_2 = \frac{v_2^2}{2}$$

$$a_2 = \frac{v_2^2}{2s_2} \tag{18}$$

Vzťah medzi hľadaným α_3 a teraz už známym a_{T2} určíme pomocou prevodových pomerov z Tab.1. Platí:

$$a_{T2} = \alpha_3.r_3$$

$$\alpha_3 = \frac{a_{T2}}{r_3}$$

Dosadením za a_{t2} z rovnice (18) dostávame vzťah pre α_3

$$\alpha_3 = \frac{\frac{v_2^2}{2s_2}}{r_3} = \frac{v_2^2}{2.r_3.s_2} \tag{19}$$

d) Záver _ určenie M_{h3}

Dosadením rovníc (19), (17) a (14) do rovnice (8)

$$G_2.\sin\beta.r_3 + M_{h3} = (m_2.r_3^2 + m_3.i_{T3}^2 + \frac{3}{8}m_4.R_3^2).\frac{v_2^2}{2.r_3.s_2}$$

$$M_{h3} = (m_2.r_3^2 + m_3.i_{T3}^2 + \frac{3}{8}m_4.R_3^2).\frac{v_2^2}{2.r_3.s_2} - G_2.\sin\beta.r_3 \tag{20}$$

III. LAGRANGEOVE ROVNICE II. DRUHU

Základný tvar rovnice:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta E_K}{\theta \dot{q}}\right)-\frac{\theta E_K}{\theta q}=Q \qquad (21)$$

Voľba zovšeobecnených súradníc – rotácia telesa 3:

$$q=\varphi_3; \qquad \dot{q}=\omega_3; \qquad \ddot{q}=\alpha_3$$

Rovnica (21) bude mať tvar

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta E_K}{\theta \omega_3}\right)-\frac{\theta E_K}{\theta \varphi_3}=M_{red} \qquad (22)$$

a) Určenie kinetickej energie sústavy $E_{Ksúst.}$

$$E_{Ksús.}=E_{K2}+E_{K3}+E_{K4} \qquad (23)$$

Kinetickú energiu a momenty zotrvačnosti jednotlivých telies určíme vzťahmi:

$$E_{K2}=\frac{1}{2}m_2.v_2{}^2$$

$$E_{K5}=\frac{1}{2}I_{T3}.\omega_3^2 \qquad I_{T3}=m_3.i_{T3}{}^2$$

$$E_{K4}=\frac{1}{2}m_4.v_{T4}{}^2+\frac{1}{2}I_{T4}.\omega_4{}^2 \qquad I_{T4}=\frac{1}{2}m_4\ r_4^2$$

Dosadíme do (23):

$$E_{Ksúst.}=\frac{1}{2}m_2v_2^2+\frac{1}{2}I_{T3}.\omega_3^2+\frac{1}{2}m_4v_{T4}^2+\frac{1}{2}I_{T4}.\omega_4^2$$

Dosadíme vzťahy pre určenie momentov zotrvačnosti a rýchlosti v_{T2}, v_{T4}, ω_4 nahradíme ich závislosťami na rýchlosti ω_3 a upravíme:

$$E_{Ksúst.}=\frac{1}{2}m_2\omega_3^2.r_3^2+\frac{1}{2}I_{T3}\omega_3^2+\frac{1}{2}m_4\omega_3^2.\frac{R_3^2}{4}+\frac{1}{2}I_{T4}\omega_3^2.\frac{R_3^2}{4.r_4^2}$$

$$E_{Ksúst.}=\frac{1}{2}(m_2\omega_3^2.r_3^2+m_3.i_{T3}^2\omega_3^2+m_4\omega_3^2.\frac{R_3^2}{4}+\frac{1}{2}m_4.r_4^2\omega_3^2.\frac{R_3^2}{4.r_4^2})$$

$$E_{Ksúst.}=\frac{1}{2}\omega_3^2(m_2.r_3^2+m_3.i_{T3}^2+\frac{3}{8}m_4.R_3^2)$$

Výraz v zátvorke je možné považovať za konštantu, pretože hmotnosti a polomery sa počas pohybu sústavy nebudú meniť. Ak tento výraz označíme K_1

$$K_1 = m_2.r_3^2 + m_3.i_{T3}^2 + \frac{3}{8} m_4.R_3^2 \tag{23}$$

potom kinetickú energiu sústavy je možné zapísať v tvare

$$E_{K\,súst.} = \frac{1}{2} K_1.\omega_3^2 \tag{24}$$

b) určenie M_{red}

M_{h3} ako zovšeobecnenú silu Q určíme porovnaním výkonu redukovaného člena s výkonom sústavy, ktorý je daný súčtom okamžitých výkonov pracovných síl pôsobiacich na sústavu

$$P_{red} = P_{súst.} \tag{25}$$

$$Q \cdot \omega_3 = P_2 + P_3 + P_4$$

Na sústavu podľa zadania pôsobí vonkajší moment „$+M_{h3}$“, iná vonkajšia sila (moment) tam nie je.

Každé z telies sústavy má svoju vlastnú tiaž, ale len tiaž telesa *2* má zložku v smere pohybu „$+G_2.sin\beta$“.

Pracovné sily a momenty sú na Obr. zobrazené červenou farbou, pohyb jednotlivých telies modrou farbou.

Pre výkony jednotlivých telies sústavy platí:

Teleso 2: $P_2 = + G_2.sin\beta.\ v_{T2}$

Teleso 3: $P_3 = + M_{h3}.\omega_3$

Teleso 4: -

Dosadením do (15)

$$M_{red}.\omega_3 = G_2.\sin\beta.v_{T2} + M_{h3}.\omega_3 + 0 \tag{26}$$

$$M_{red}.\omega_3 = G_2.\sin\beta.\omega_3.r_3 + M_{h3}.\omega_3 + 0 \qquad /.\frac{1}{\omega_3}$$

$$M_{red} = G_2.\sin\beta.r_3 + M_{h3} \tag{27}$$

c) Derivácie $E_{ksúst}$ podľa rovnice (22)

$$\frac{\partial E_{Ksúst.}}{\partial\omega_3} = \frac{\partial(\frac{1}{2}K_1.\omega_3^2)}{\partial\omega_3} = \frac{1}{2}K_1\frac{\partial\omega_3^2}{\partial\omega_3} = \frac{1}{2}K_1.2.\omega_3 = K_1.\omega_3$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{Ksúst.}}{\partial\omega_3}\right) = \frac{dK_1.\omega_3}{dt} = K_1\frac{d\omega_3}{dt} = K_1.\alpha_3$$

$$\frac{\theta E_{Ks\acute{u}st.}}{\theta\varphi_3} = \frac{\theta\left(\frac{1}{2}K_1.\omega_3^2\right)}{\theta\varphi_3} = 0$$

Po dosadení do (22) dostávame:

$$K_1.\alpha_3 = M_{red} \tag{28}$$

d) určenie α_3

Uhlové zrýchlenie α_3 je kinematickou veličinou, ktorú nepoznáme. Je potrebné určiť ju na základe známych parametrov v_2 a s_2, pričom vieme, že sústava sa rozbieha z kľudu konštantným zrýchlením a_2. Platí

$$a_2 = \frac{v.dv}{ds}$$

$$a_2.ds = v.dv$$

$$a_2.\int_0^{s_2} ds = \int_0^{v_2} v.dv$$

$$a_2.s_2 = \frac{v_2^2}{2}$$

$$a_2 = \frac{v_2^2}{2s_2} \tag{29}$$

Vzťah medzi hľadaným α_3 a teraz už známym a_{T2} určíme pomocou prevodových pomerov z Tab.1. Platí:

$$a_{T2} = \alpha_3.r_3$$

$$\alpha_3 = \frac{a_{T2}}{r_3}$$

Dosadením za a_{t2} z rovnice (18) dostávame vzťah pre α_3

$$\alpha_3 = \frac{\frac{v_2^2}{2s_2}}{r_3} = \frac{v_2^2}{2.r_3.s_2} \tag{30}$$

e) určenie M_{h3}

Dosadením rovníc (23), (27) a (30) do rovnice (28)

$$K_1.\frac{v_2^2}{2.r_3.s_2} = G_2.\sin\beta.r_3 + M_{h3}$$

$$M_{h3} = (m_2.r_3^2 + m_3.i_{T3}^2 + \frac{3}{8} m_4.R_3^2).\frac{v_2^2}{2.r_3.s_2} - G_2.sin\,\beta.r_3 \qquad (31)$$

METÓDA VIRTUÁLNYCH PRÁC

Mechanický systém sa pohybuje tak, aby sa virtuálna práca efektívnych síl (vonkajších i zotrvačných) na virtuálnych posunutiach rovnala nule

$$\delta A = 0$$

V zovšeobecnenom vyjadrení

$$\delta A = \sum_i (Q_{p_i} - Q_{Di}).\delta q_i$$

$$\sum_i (Q_{p_i} - Q_{Di}).\delta q_i = 0$$

Q_{p_i} - zovšeobecnená pracovná sila pôsobiaca na *i*-té teleso

Q_{Di} - zovšeobecnená D´Alambertova zotrvačná sila pôsobiaca na *i*-té teleso

δq_i - zovšeobecnená súradnica elementárneho posunutia *i*-tého telesa

Pre všeobecný rovinný pohyb telesa platí:

$$\sum_i (F_{p_i} - F_{Di}).\delta s_i + \sum_i (M_{p_i} - M_{Di}).\delta\varphi_i = 0$$

kde
F_{pi}, M_{pi} – pracovné sily a momenty pôsobiace na *i*-té teleso
F_{Di}, M_{Di} – zotrvačné sily a momenty pôsobiaca na *i*-té teleso
δs_i, $\delta\varphi_i$ - virtuálne posunutie, pootočenie *i*-tého telesa

Keďže sústava je uvedená do pohybu tak, že telesá vykonávajú rovnomerne zrýchlený pohyb, budú mať všetky telesá zotrvačné účinky, ale len na niektoré telesá pôsobia pracovné sily.

Podobne ako pri riešení príkladu Metódou redukcie, aj pri metóde *Virtuálnych prác* sú pracovné sily a momenty určené tým istým spôsobom.
Pracovné sily:

$$+M_{h3} \quad \text{a} \quad +G_2.sin\beta$$

Na základe (21) a vzhľadom na pohyb jednotlivých telies (translačný, rotačný, všeobecný) je ich virtuálna práca

Teleso 2: $\delta A_2 = (G_2.sin\,\beta - m_2.a_{T2}).\delta s_2$

Teleso 3: $\delta A_3 = (M_{h3} - I_{T3}.\alpha_3).\delta\varphi_3$

Teleso 4: $\delta A_4 = (0 - m_4.a_{T4}).\delta s_2 + (0 - I_{T4}.\alpha_4).\delta\varphi_4$

Potom virtuálna práca ***sústavy*** je daná rovnicou

$$\delta A=(G_2.sin\,\beta-m_2.a_{T2}).\delta s_2+(M_{h3}-I_{T3}.\alpha_3).\delta\varphi_3+(0-m_4.a_{T4}).\delta s_2+(0-I_{T4}.\alpha_4).\delta\varphi_4$$

Keďže virtuálna práca sústavy je rovná nule, platí

$$(G_2.sin\,\beta-m_2.a_{T2}).\delta s_2+(M_{h3}-I_{T3}.\alpha_3).\delta\varphi_3+(0-m_4.a_{T4}).\delta s_2+(0-I_{T4}.\alpha_4).\delta\varphi_4=0$$

Dosadením prevodových pomerov z *Tab.1* za kinematické veličiny (za zrýchlenia a za dráhové veličiny) dostávame:

$$(G_2.sin\beta-m_2.\alpha_3.r_3).\delta\varphi_3.r_3+(M_{h3}-I_{T3}.\alpha_3).\delta\varphi_3+(0-m_4.\alpha_3.\frac{R_3}{2}).\delta\varphi_3.\frac{R_3}{2}+(0-I_{T4}.\alpha_3.\frac{R_3}{2r_4}).\delta\varphi_3.\frac{R_3}{2r_4}=0$$

Ak celú rovnicu vynásobíme výrazom $\frac{1}{\delta\varphi_3}$, dostávame

$$(G_2.sin\,\beta-m_2.\alpha_3.r_3).r_3+(M_{h3}-I_{T3}.\alpha_3)+(0-m_4.\alpha_3.\frac{R_3}{2}).\frac{R_3}{2}+(0-I_{T4}.\alpha_3.\frac{R_3}{2r_4}).\frac{R_3}{2r_4}=0$$

Po roznásobení

$$G_2.sin\,\beta.r_3-m_2.\alpha_3.r_3^{\,2}+M_{h3}-I_{T3}.\alpha_3-m_4.\alpha_3.\frac{R_3^{\,2}}{4}-I_{T4}.\alpha_3.\frac{R_3^{\,2}}{4r_4^{\,2}}=0$$

Pre momenty zotrvačnosti telies 3a 4 platia vzťahy (12) a (13)

$$I_{T3}=m_3.i_{T3}^2$$

$$I_{T4}=\frac{1}{2}m_4.r_4^2$$

$$G_2.sin\,\beta.r_3-m_2.\alpha_3.r_3^{\,2}+M_{h3}-m_3.i_{T3}^2.\alpha_3-m_4.\alpha_3.\frac{R_3^{\,2}}{4}-\frac{1}{2}m_4.r_4^2.\alpha_3.\frac{R_3^{\,2}}{4r_4^{\,2}}=0$$

$$G_2.sin\,\beta.r_3-m_2.\alpha_3.r_3^{\,2}+M_{h3}-m_3.i_{T3}^2.\alpha_3-\frac{3}{8}m_4.\alpha_3.R_3^{\,2}=0 \qquad (32)$$

Členy rovnice (24), ktoré „obsahujú“ kinematickú veličinu (u nás α_3) osamostatníme a následne túto kinematickú veličinu vyberieme pred zátvorku:

$$G_2.sin\,\beta.r_3+M_{h3}=m_2.\alpha_3.r_3^{\,2}+m_3.i_{T3}^2.\alpha_3+\frac{3}{8}m_4.\alpha_3.R_3^{\,2}$$

$$G_2.sin\,\beta.r_3+M_{h3}=\alpha_3.(m_2.r_3^{\,2}+m_3.i_{T3}^2+\frac{3}{8}m_4.R_3^{\,2}) \qquad (33)$$

*Cieľom riešenia je nájsť **Mh₃** na základe **daných veličín**.*

Vo vzťahu (33) je okrem „Mh_3“ neznámou veličinou aj uhlové zrýchlenie α_3, určenie ktorého je popísané pri Metóde redukcie v časti ***c).***

Z rovnice (19) uvedenej pri riešení príkladu Metódou redukcie je zrýchlenie $\boldsymbol{\alpha_3}$ vyjadrené už len pomocou **daných** kinematickými veličín:

$$\alpha_3 = \frac{v_2^2}{2.r_3.s_2} \tag{34}$$

Dosadením (19) do (33) dostávame

$$G_2.sin\,\beta.r_3 + M_{h3} = \frac{v_2^2}{2.r_3.s_2}.(m_2.r_3{}^2 + m_3.i_{T3}^2 + \frac{3}{8}m_4.R_3{}^2)$$

Potom pre Mh_3 platí:

$$M_{h3} = (m_2.r_3^2 + m_3.i_{T3}^2 + \frac{3}{8}m_4.R_3^2).\frac{v_2^2}{2.r_3.s_2} - G_2.\sin\beta.r_3 \tag{35}$$