6.3 VOĽNÉ TLMENÉ KMITANIE LINEÁRNYCH MECHANICKÝCH SÚSTAV S JEDNÝM STUPŇOM VOĽNOSTI

Zákon zachovania mechanickej energie netlmeného harmonického kmitania bol odvodený za predpokladu, že na kmitajúcu mechanickú sústavu nepôsobia žiadne vonkajšie sily, ktoré by tento pohyb ovplyvnili. Potom amplitúda kmitania oscilátora ostáva konštantná, nezávislá na čase a pohyb takéhoto oscilátora môže trvať neobmedzene dlho. Tento poznatok je však v rozpore s technickou praxou, kde sa amplitúda kmitania vždy s časom zmenšuje. Príčinou tohto javu je účinok tlmiacich síl, ktoré majú svoj fyzikálny pôvod v existencii pasívnych odporov v mechanickej sústave. Kmity pri pôsobení pasívnych odporov postupne zanikajú alebo v určitých prípadoch, napriek počiatočnej výchylke alebo rýchlosti, vôbec nevzniknú. Tlmenie pri kmitaní mechanických sústav je závislé na viacerých faktoroch. Neexistuje univerzálny matematický model tlmiacej sily, ktorý by bol vyhovujúci pre všetky druhy tlmenia. V inžinierskej praxi sa matematický model tlmenia pre konkrétnu mechanickú sústavu určuje experimentálne.

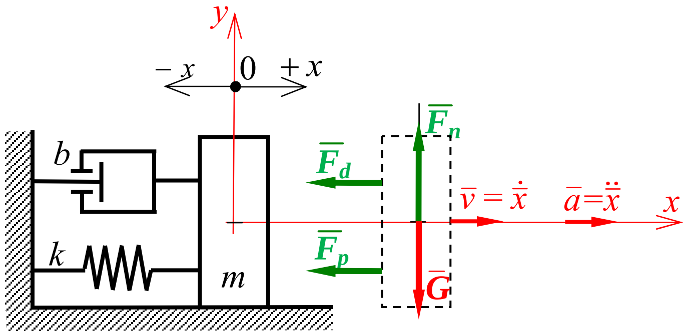
Pri matematickom modelovaní tlmenia hľadáme funkciu na vyjadrenie ekvivalentnej tlmiacej sily, ktorá čo najvernejšie popisuje tlmenie v reálnej mechanickej sústave. Účinok tlmenia je závislý na hustote prostredia, v ktorom oscilátor kmitá a tiež na veľkosti rýchlosti jeho pohybu. Experimentálne môžeme tlmený kmitavý pohyb realizovať napríklad ponorením kmitajúcej sústavy – harmonického oscilátora do viskóznej kvapaliny, pretože tlmenie vo vode je väčšie ako vo vzduchu. Pri pohybe telesa v kvapaline je tlmiaca sila $\overline{F}_d$ priamo úmerná prvej mocnine relatívnej rýchlosti $\overline{v}$ telesa vzhľadom na kvapalinu.

$$\boxed{\overline{F}_d = -b\overline{v}} \tag{6.25}$$

kde b je *súčiniteľ lineárneho tlmenia* a znamienko mínus vyjadruje, že tlmiaca sila je vždy orientovaná proti zmyslu pohybu. Ide o lineárne viskózne tlmenie. Takéto vyjadrenie tlmiaceho účinku pomerne presne platí pre tlmiče používané v automobiloch.

Priamočiare voľné kmitanie s viskóznym tlmením

Uvažujme mechanickú sústavu vytvorenú telesom hmotnosti m, upevnenú k rámu pomocou valcovej pružiny s lineárnou charakteristikou a tlmičom s lineárnym viskóznym tlmením (*obr. 6.9*) tak, že teleso môže konať len priamočiary pohyb. Nech sa teleso (hmotný bod) pri nedeformovanej pružine nachádza v rovnovážnej polohe. Pôsobením vonkajšieho silového účinku v smere osi x vychýlime teleso z rovnovážnej polohy a okamžite uvoľníme. Po odznení vonkajšieho silového účinku vznikne priamočiary tlmený kmitavý pohyb, tzv. *„voľné kmitanie s tlmením"*, pri riešení ktorého použijeme *metódu uvoľnenia* a pohybovú rovnicu zostavíme *metódou zrýchľujúcich síl*. V tomto prípade šmykové trenie medzi telesom a podložkou, hmotnosť pružiny a tlmiča zanedbáme. Na teleso tak v smere pohybu pôsobí len vratná sila v pružine F_p, ktorá vzniká v samotnej sústave ako reakcia na porušenie rovnováhy telesa a tlmiaca sila F_d vyjadrujúca účinok lineárneho viskózneho tlmenia.



Obrázok 6.9

Pohybová rovnica vo vektorovom tvare

$$m\,\overline{a} = \overline{F}_p + \overline{F}_d + \overline{G} + \overline{F}_n \tag{6.26}$$

kde m - hmotnosť telesa,
$\overline{a}$ - zrýchlenie telesa; $a = a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$, $a_y = 0$
$\overline{F}_p$ - sila v pružine; $F_p = k\,x$,
$\overline{F}_d$ - tlmiaca sila; $F_d = b\dot{x}$,
$\overline{G}$ - tiaž telesa; $G = m\,g$; g je tiažové zrýchlenie,
$\overline{F}_n$ - väzbová reakcia od podložky.

Vyjadrime pohybovú rovnicu (6.26) v skalárnom tvare:

$$x: \qquad m\,\ddot{x} = -F_p - F_d \tag{6.27}$$

$$y: \qquad 0 = F_n - G \tag{6.28}$$

Rovnica (6.28) vyjadruje skutočnosť, že v smere osi y pohyb neexistuje, alebo je rovnomerný. Vypočítame z nej veľkosť väzbovej reakcie F_n.

$$0 = F_n - mg \quad \Rightarrow \quad F_n = mg$$

Pre ďalšiu matematickú analýzu kmitania použijeme skalárnu pohybovú rovnicu (6.27) zostavenú v smere osi x. Pohybová rovnica kmitavého pohybu telesa má tvar

$$m\,\ddot{x} = -k\,x - b\,\dot{x} \tag{6.29}$$

alebo

$$\boxed{m\,\ddot{x} + b\dot{x} + k\,x = 0} \tag{6.30}$$

Pohybová rovnica *voľného tlmeného kmitania* má tvar *homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice 2. rádu s konštantnými koeficientmi.*

$$\boxed{\ddot{x}+\frac{b}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0} \tag{6.31}$$

Na základe (6.9) platí $\frac{k}{m}=\Omega_0^2$. Označme ďalej

$$\boxed{\frac{b}{m}=2\delta} \tag{6.32}$$

kde δ je *konštanta útlmu*, jej rozmer je [s^{-1}]. Rovnicu (6.31) potom zapíšeme v tvare

$$\boxed{\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\Omega_0^2 x=0} \tag{6.33}$$

Pri jej riešení použijeme metódu *charakteristickej rovnice.* Riešenie rovnice hľadáme v tvare $x = e^{rt}$. Potom $\dot{x}=re^{rt}$, $\ddot{x}=r^2e^{rt}$. Po dosadení do (6.33) a po úprave dostaneme

$$e^{rt}\left(r^2+2\delta r+\Omega_0^2\right)=0\,,$$

resp. $r^2+2\delta r+\Omega_0^2=0$

ktorej riešením je

$$r_{1,2}=-\delta\pm\sqrt{\delta^2-\Omega_0^2} \tag{6.34}$$

Hodnotám r_1, r_2 odpovedá všeobecné riešenie rovnice (6.34) v tvare lineárnej kombinácie

$$x=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t} \tag{6.35}$$

kde C_1 a C_2 sú ľubovoľné konštanty. Ak označíme

$$p=\sqrt{\delta^2-\Omega_0^2} \tag{6.36}$$

potom $r_{1,2}=-\delta\pm p$ (6.37)

Po dosadení (6.36) do (6.37) a po úprave dostaneme

$$x=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}=e^{-\delta t}\left(C_1e^{pt}+C_2e^{-pt}\right) \tag{6.38}$$

Podľa veľkosti tlmenia môžu nastať tri prípady riešenia rovnice (6.35):

a) *Tlmenie je veľké:* $\boxed{\delta>\Omega_0}$, čo fyzikálne znamená, že tlmiaca sila je výrazná. Potom obidve riešenia charakteristickej rovnice r_1, r_2 sú reálne čísla a x nemá žiadnu periodickú zložku. Teoreticky za čas t sa teleso dostane znovu do rovnovážnej polohy x = 0. Grafický priebeh závislosti $x = x(t)$ je krivka (a) na *Obrázku 6.10c*. Pri takomto veľkom tlmení o pohybe hovoríme, že je to **aperiodický pohyb**. Kmitanie vôbec nenastane.

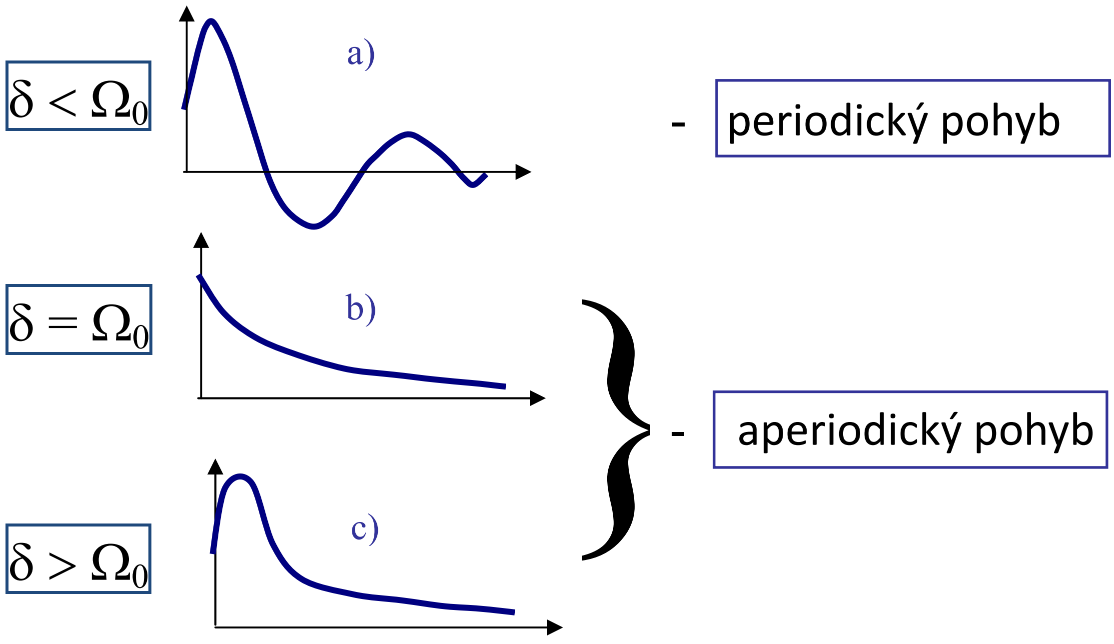
b) *Tlmenie je také, že* $\boxed{\delta = \Omega_0}$ V takomto prípade z matematiky vyplýva, že rovnica (8.81) má dvojnásobný reálny koreň

$$r_{1,2} = -\delta, \tag{6.39}$$

čo je funkcia $x_1 = e^{-\delta t}$ a aj funkcia $x_2 = te^{-\delta t}$. Všeobecné riešenie je ich lineárnou kombináciou a má tvar

$$x = e^{-\delta t}\left(C_1 + C_2 t\right) \tag{6.40}$$

Tento pohyb nazývame **medzný aperiodický pohyb**. Zodpovedá mu krivka (b) na *Obrázku 6.10b.*



Obrázok 6.10

c) Tlmený kmitavý pohyb nastáva len pri malom tlmení, ak $\boxed{\delta < \Omega_0}$. Označme

$$\Omega_d = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2} \tag{6.41}$$

Korene charakteristickej rovnice potom majú tvar

$$r_{1,2} = -\delta \pm i\Omega_d \tag{6.42}$$

a všeobecné riešenie pohybovej rovnice má tvar

$$x = e^{-\delta t}\left(C_1 e^{i\Omega_d t} + C_2 e^{-i\Omega_d t}\right) \tag{6.43}$$

Aplikovaním Eulerovho vzorca $e^{+i\Omega_d t} = \cos(\Omega_d t) \pm i \sin(\Omega_d t)$ vo vzťahu (6.43) a po úprave dostaneme

$$x = e^{-\delta t}\left[A\cos(\Omega_d t) + B\sin(\Omega_d t)\right] \tag{6.44}$$

kde $A = (C_1 + C_2)$, $B = i(C_1 - C_2)$. C_1, C_2 sú v tomto prípade ľubovoľné komplexne združené konštanty, ktoré závisia od počiatočných podmienok. A a B sú už reálne konštanty. Výsledné riešenie (6.44) môžeme napísať v tvare

$$x = Ce^{-\delta t}\sin(\Omega_d t + \varphi) = x_p(t)\sin(\Omega_d t + \varphi) \tag{6.45}$$

kde $A = C\sin\varphi$, $B = C\cos\varphi$, $x_p(t) = Ce^{-\delta t}$ (6.46)

Potom $C = \sqrt{A^2 + B^2}$; $tg\,\varphi = \dfrac{A}{B}$

Na základe vzťahov (6.44) a (6.45) môžeme konštatovať, že v prípade malého tlmenia v sústave ($\Omega_0 > \delta$) bude teleso vykonávať tlmený kmitavý pohyb. *Výkmit výchylky kmitania* $x_p(t)$ sa bude s narastajúcim časom exponenciálne zmenšovať. Parameter Ω_d je *vlastná uhlová frekvencia tlmenej sústavy*, φ je *začiatočná fáza výchylky*.

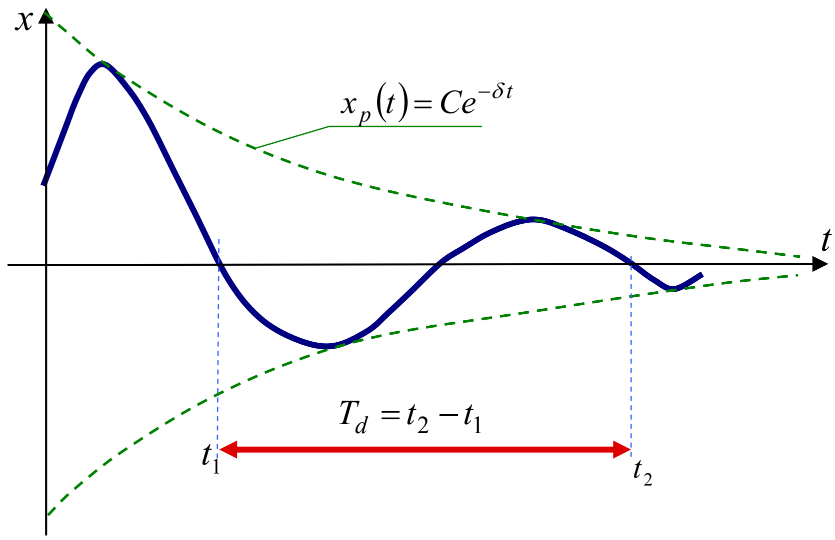
Konštanty C, φ, A, B závisia od začiatočných podmienok a od parametrov charakterizujúcich dynamické vlastnosti sústavy. Voľné tlmené kmitanie nastane len vtedy, ak je aspoň jedna začiatočná podmienka nenulová. Grafické zobrazenie riešenia (6.45) pre uvedené začiatočné podmienky, keď $x_0 > 0$, $v_0 > 0$ je na *obr. 6.11, resp. 6.12*.

Prísne vzaté, ak doba kmitu je charakterizovaná, ako najmenší časový interval, za ktorý sú parametre pohybu rovnaké, potom nemôžeme tlmený kmitavý pohyb pokladať za periodický pohyb, pretože kmitajúci bod nedosiahne svoju pôvodnú výchylku. Pohyb je kváziperiodický a o perióde T_d môžeme hovoriť iba ako o časovom intervale, za ktorý hmotný bod prechádza rovnovážnou polohou, resp. časový interval medzi dvomi po sebe sa opakujúcimi maximálnymi výchylkami s rovnakým znamienkom. Doba kmitu voľného kmitania s viskóznym tlmením je

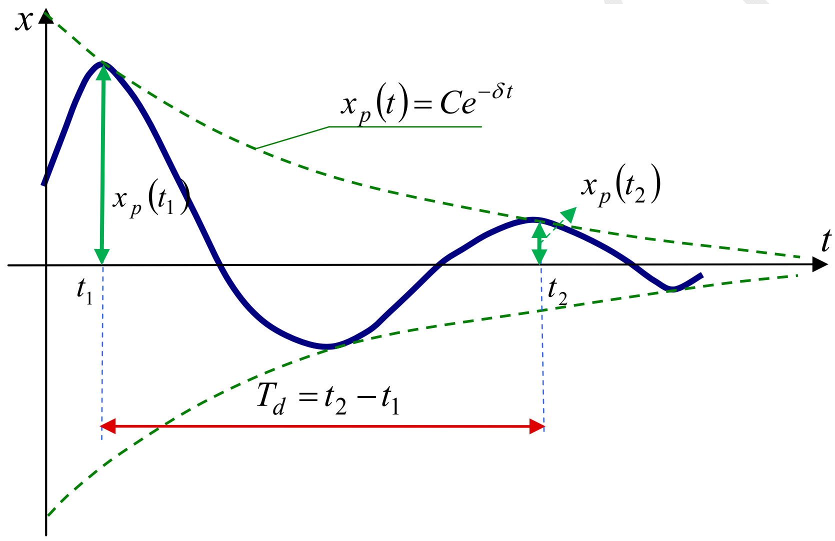
$$T_d = \frac{2\pi}{\Omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{4\pi m}{\sqrt{4km - b^2}} \tag{6.47}$$

Platí $T_d > T$, kde T je perióda vlastných kmitov. Vidíme, že tlmenie predlžuje dobu kmitu. Ak je tlmenie malé, perióda sa prakticky rovná perióde netlmených kmitov. Zväčšovaním tlmenia perióda narastá. Vlastný kmitočet je potom

$$f_d = \frac{1}{T_d} = \frac{\Omega_d}{2\pi} = \frac{\sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2}}{2\pi} \tag{6.48}$$



Obrázok 6.11



Obrázok 6.12