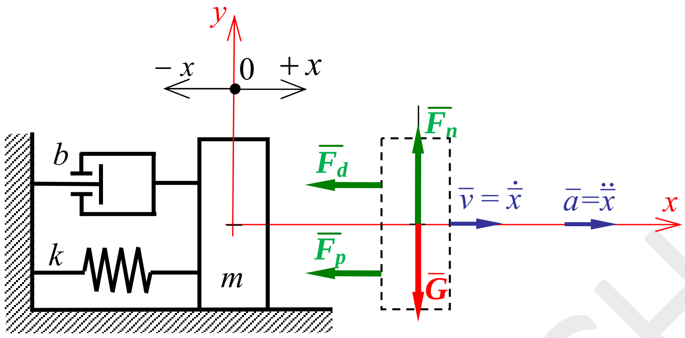
VOĽNÉ TLMENÉ KMITANIE LINEÁRNYCH MECHANICKÝCH SÚSTAV S JEDNÝM STUPŇOM VOĽNOSTI

PRÍKLAD 6.7: Teleso o hmotnosti $\boldsymbol{m}$ je k rámu pripojené pružinou pružinovej konštanty $\boldsymbol{k}$ a tlmičom so súčiniteľom lineárneho tlmenia $\boldsymbol{b}$. Určte periódu $\boldsymbol{T_d}$ a frekvenciu $\boldsymbol{f_d}$ tlmeného kmitania telesa.



Obrázok 6.12

RIEŠENIE: Teleso hmotnosti m je upevnené k rámu pomocou valcovej pružiny s lineárnou charakteristikou a tlmičom s lineárnym viskóznym tlmením tak, že teleso môže konať len priamočiary pohyb. Pri nedeformovanej pružine sa teleso (hmotný bod) nachádza v rovnovážnej polohe. Pôsobením vonkajšieho silového účinku v smere osi x vychýlime teleso z rovnovážnej polohy a okamžite uvoľníme. Po odznení vonkajšieho silového účinku vznikne priamočiary tlmený kmitavý pohyb, tzv. „*voľné kmitanie s tlmením*“. Pri riešení použijeme *metódu uvoľnenia* a pohybovú rovnicu zostavíme *metódou zrýchľujúcich síl*. Zanedbáme šmykové trenie medzi telesom a podložkou, hmotnosť pružiny a tlmiča. Potom na teleso v smere pohybu pôsobí len vratná sila v pružine F_p, ktorá vzniká v mechanickej sústave ako reakcia na porušenie rovnováhy telesa a tlmiaca sila F_d, ktorá vyjadruje účinok lineárneho viskózneho tlmenia.

Pohybová rovnica vo vektorovom tvare

$$m\,\overline{a} = \overline{F}_p + \overline{F}_d + \overline{G} + \overline{F}_n \qquad \text{(a)}$$

kde
- m - hmotnosť telesa,
- $\overline{a}$ - zrýchlenie telesa; $a = a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$, $a_y = 0$
- $\overline{F}_p$ - sila v pružine; $F_p = kx$,
- $\overline{F}_d$ - tlmiaca sila; $F_d = b\dot{x}$,
- $\overline{G}$ - tiaž telesa; $G = mg$; g je tiažové zrýchlenie,
- $\overline{F}_n$ - väzbová reakcia od podložky.

Pohybová rovnica (a) v skalárnom tvare:

$$x: \quad m\ddot{x} = -F_p - F_d \qquad \text{(b)}$$

$$y: \quad 0 = F_n - G \qquad \text{(c)}$$

V smere osi y pohyb neexistuje, z podmienky rovnováhy (c) vypočítame väzbovú reakciu F_n.

$$0 = F_n - mg \quad \Rightarrow \quad F_n = mg$$

Pri odvodení pohybovej rovnice kmitavého pohybu telesa vychádzame z (b)

$$m\,\ddot{x} = -k\,x - b\,\dot{x}$$

$$\boxed{m\,\ddot{x} + b\dot{x} + k\,x = 0}$$

Pohybová rovnica *voľného tlmeného kmitania* má tvar *homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice 2. rádu s konštantnými koeficientmi.*

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0} \tag{d}$$

Platí $\dfrac{k}{m} = \Omega_0^2$

$$\frac{b}{m} = 2\delta \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{b}{2m}$$

kde δ je *konštanta útlmu*, jej rozmer je [s^{-1}]. Rovnicu (d) zapíšeme v tvare

$$\boxed{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \Omega_0^2\,x = 0}$$

Podľa veľkosti tlmenia môžu nastať tri prípady (podrobnejšie - Prednáška_týždeň_ 11). V tomto prípade uvažujeme alternatívu c).

a) Aperiodický pohyb - $\boxed{\delta > \Omega_0}$ *Tlmenie je veľké* - tlmiaca sila je výrazná, kmitanie vôbec nenastane.

b) Medzný aperiodický pohyb - $\boxed{\delta = \Omega_0}$

c) **Tlmený kmitavý pohyb** nastáva len pri malom tlmení, ak $\boxed{\delta < \Omega_0}$. Potom *vlastnú uhlovú frekvenciu tlmenej sústavy* vypočítame:

$$\Omega_d = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2} \tag{e}$$

Prísne vzaté, ak je doba kmitu je charakterizovaná, ako najmenší časový interval, za ktorý sú parametre pohybu rovnaké, potom nemôžeme tlmený kmitavý pohyb pokladať za periodický pohyb, pretože kmitajúci bod nedosiahne svoju pôvodnú výchylku. Pohyb je kváziperiodický a o perióde T_d môžeme hovoriť iba ako o *časovom intervale, za ktorý hmotný bod prechádza rovnovážnou polohou, resp. časový interval pohybu medzi dvomi po sebe sa opakujúcimi maximálnymi výchylkami s rovnakým znamienkom.*

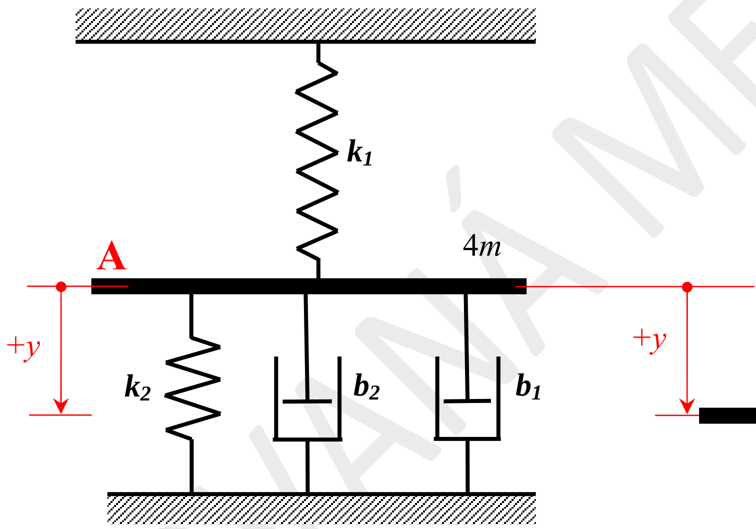
Doba kmitu *voľného kmitania s viskóznym tlmením* je

$$T_d = \frac{2\pi}{\Omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{4\pi m}{\sqrt{4km - b^2}} \tag{f}$$

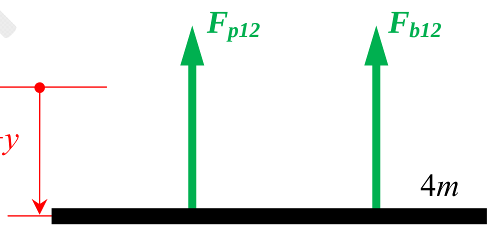
Platí $T_d > T$, kde T je perióda vlastných kmitov. Vidíme, že tlmenie predlžuje dobu kmitu. Ak je tlmenie malé, perióda sa prakticky rovná perióde netlmených kmitov. Zväčšovaním tlmenia perióda narastá. Vlastný kmitočet je potom

$$f_d = \frac{1}{T_d} = \frac{\Omega_d}{2\pi} = \frac{\sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2}}{2\pi} \tag{g}$$

PRÍKLAD 6.8: Doska A hmotnosti $\boldsymbol{4m}$ je uchytená k rámu podľa *Obrázku 6.13A*. Určte dobu $\boldsymbol{T_d}$ kmitu dosky A okolo jej rovnovážnej polohy a frekvenciu kmitania $\boldsymbol{f_d}$, ak sú dané hodnoty m, b_1, b_2, k_1, k_2. Pružiny a tlmiče považujte za nehmotné, odpor vzduchu zanedbajte.



Obrázok 6.13A



Obrázok 6.13B

Po vychýlení dosky z jej rovnovážnej polohy dochádza k deformáciám pružín a tlmičov, v dôsledku čoho začnú v pružinách i tlmičoch pôsobiť vratné a tlmiace sily a mechanická sústava začína kmitať okolo rovnovážnej polohy bez ďalšieho silového pôsobenia. Vzniká priamočiary kmitavý pohyb, tzv. „*nevynútené lineárne kmitanie s tlmením*“, resp. *voľné tlmené kmitanie*.
Pri riešení úlohy dosku A vychýlime z rovnovážnej polohy v smere osi y a v tejto polohe sústavu uvoľníme (*Obrázok 6.13B*). V prípade vertikálnych osí pružín spôsobí tiažová sila dosky A po zmontovaní danej mechanickej sústavy tzv. *trvalú statickú deformáciu pružín*, resp. *statickú výchylku*, v dôsledku ktorej sa rovnovážna poloha dosky A zmení a v pružinách začnú pôsobiť tzv. *statické vratné sily*. Tie sú trvale v rovnováhe s tiažovou silou dosky A a mechanická sústava ostáva v pokoji. Tiažová sila dosky A má potom vplyv len na určenie rovnovážnej polohy sústavy, okolo ktorej sústava kmitá, preto pri ďalšom výpočte nebudeme s tiažou dosky uvažovať.

Pružiny 1, 2 nahradíme jednou pružinou tuhosti k_{12}. Pružiny 1 a 2 sú zapojené *paralelne* (v oboch pružinách vzniká rovnako veľká deformácia). Tuhosť sústavy pružín k_{12} vypočítame:

$$k_{12} = k_1 + k_2$$

Tlmiaci účinok oboch tlmičov zapojených vedľa seba, t. j. *paralelne*, vyjadríme výslednou tlmiacou silou F_{d12}. Potom súčiniteľ lineárneho tlmenia b_{12} je určený vzťahom

$$b_{12} = b_1 + b_2$$

Pre veľkosti výsledných síl v pružine a tlmiči platia vzťahy

$$F_{p12} = k_{12}\, y$$

$$F_{d12} = b_{12}\, \dot{y}$$

Základná pohybová rovnica pre dosku A:

$$\boxed{\sum_i F_{iy} = m\, a_y = m\, \ddot{y}}$$

ktorú postupne upravíme na tvar

$$\boxed{\ddot{y} + 2\delta\, \dot{y} + \Omega_0^2 y = 0}$$

Na dosku pôsobia výsledné sily v pružine a v tlmiči, ktoré sú orientované opačne ako zmysel výchylky (proti pohybu), preto v skalárnej pohybovej rovnici zostavenej v smere osi y budú mať znamienko "-".

$$m_A\, \ddot{y} = -F_{p12} - F_{d12}$$

$$4m\, \ddot{y} = -k_{12}\, y - b_{12}\, \dot{y}$$

$$4m\, \ddot{y} + b_{12}\, \dot{y} + k_{12}\, y = 0 \qquad /.\frac{1}{4\mathrm{m}}$$

$$\ddot{y} + \frac{b_{12}}{4\mathrm{m}}\dot{y} + \frac{k_{12}}{4\mathrm{m}} y = 0$$

Z rovnice nevynúteného tlmeného kmitania sústavy vyplýva

- vzťah pre *konštantu útlmu δ*

$$2\delta = \frac{b_{12}}{4m} = \frac{(b_1 + b_2)}{4m} \qquad \Rightarrow \qquad \delta = \frac{(b_1 + b_2)}{8m}$$

- vzťah pre *vlastnú uhlovú frekvenciu netlmeného kmitania*

$$\Omega_0^2 = \frac{(k_1 + k_2)}{4m}$$

- vzťah pre *vlastnú uhlovú frekvenciu tlmenej sústavy* pre prípad *pomerne malého tlmenia*, ak $\Omega_0 > \delta$

$$\Omega_d = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)}{4m} - \left(\frac{b_1 + b_2}{8m}\right)^2}$$

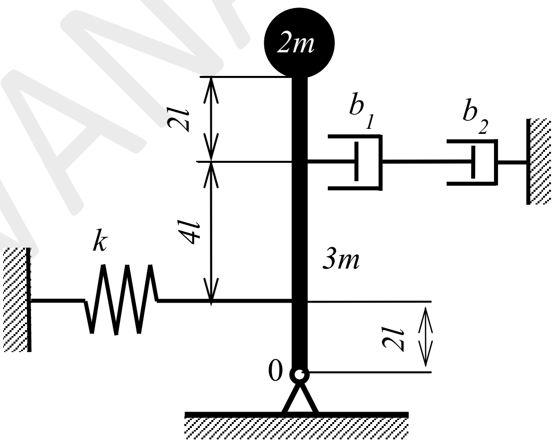
Potom dobu kmitu kruhovej dosky vypočítame

$$T_d = \frac{2\pi}{\Omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{(k_1 + k_2)}{4m} - \left(\frac{b_1 + b_2}{8m}\right)^2}}$$

Pre frekvenciu *voľného tlmeného kmitania* danej mechanickej sústavy platí

$$f_d = \frac{1}{T_d} = \frac{\sqrt{\frac{(k_1 + k_2)}{4m} - \left(\frac{b_1 + b_2}{8m}\right)^2}}{2\pi}$$

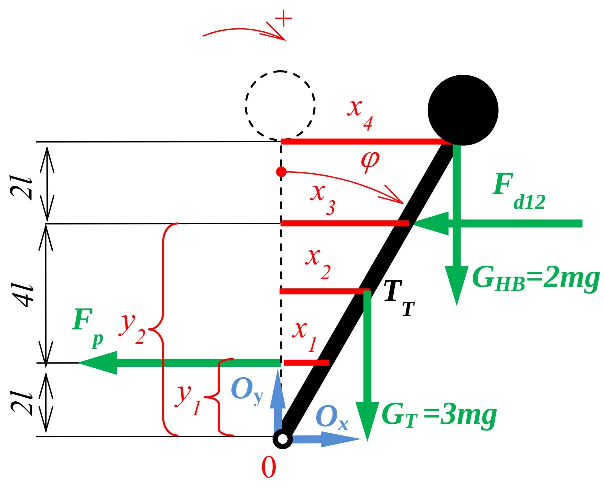
PRÍKLAD 6.9: Tyč hmotnosti $3m$ a dĺžky $8l$ je spolu s hmotným bodom hmotnosti $2m$ viazaná k rámu kĺbom, nehmotnou pružinou a tlmičmi podľa *obrázku 6.14*. Určte dobu kmitu danej mechanickej sústavy okolo rovnovážnej polohy a frekvenciu kmitania.



Obrázok 6.14

Hmotná tyč je k rámu upevnená kĺbom v bode 0, pružinou s lineárnou charakteristikou a dvoma tlmičmi s lineárnym viskóznym tlmením. Ak neuvažujeme pasívne odpory, budú pri malom vychýlení (pootočení) z rovnovážnej polohy pôsobiť na teleso:

– momenty od tiažových síl hmotného bodu a hmotnej tyče,
– moment od vratnej sily v pružine,
– momenty od výslednej tlmiacej sily.



Obrázok 6.15

Pri riešení vychádzame z momentovej pohybovej rovnice mechanickej sústavy:

$$\boxed{\Sigma M_{i0} = I_0\,\alpha = I_0\,\ddot{\varphi}}$$

Ak pre veľmi malé uhly $\varphi\ (\varphi \le 5°)$ platí: $\sin\varphi \doteq \varphi$; $\cos\varphi \doteq 1$, potom

$$x_1 = 2l\sin\varphi = 2l\varphi$$
$$x_2 = 4l\sin\varphi = 4l\varphi$$
$$x_3 = 6l\sin\varphi = 6l\varphi \qquad \dot{x}_3 = 6l\,\dot{\varphi}\cos\varphi = 6l\dot{\varphi}$$
$$x_4 = 8l\sin\varphi = 8l\varphi$$
$$y_1 = 2l\cos\varphi = 2l$$
$$y_2 = 6l\cos\varphi = 6l$$

Tlmiaci účinok oboch tlmičov zapojených za sebou, t. j. *sériovo*, vyjadríme výslednou tlmiacou silou F_{b12}. Potom súčiniteľ lineárneho tlmenia b_{12} je určený vzťahom

$$\frac{1}{b_{12}} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} \qquad \Rightarrow \qquad b_{12} = \frac{b_1\,b_2}{b_1 + b_2}$$

Moment zotrvačnosti sústavy hmotnej tyče a hmotného bodu k osi rotácie v bode 0:

$$I_0 = I_{TYČ_0} + I_{HB_0},$$

Vzhľadom na to, že hmotná tyč sa bude otáčať okolo stáleho stredu otáčania 0, ktorý nie je totožný s jej ťažiskom, je pre výpočet momentu zotrvačnosti k bodu 0 potrebné použiť Steinerovu vetu:

$$\boxed{I_{TYČ_0} = I_{TYČ_T} + mc^2}$$

Moment zotrvačnosti hmotnej tyče k jej ťažisku je vo všeobecnosti určený vzťahom:

$$I_{TYČ_T} = \frac{1}{12} m l^2 = \frac{1}{12} 3m(8l)^2 ,$$

kde m je hmotnosť tyče a l je celková dĺžka tyče. V našom prípade potom platí

$$I_{TYČ_0} = I_{TYČ_T} + mc^2 = \frac{1}{12} 3m(8l)^2 + 3m(4l)^2$$

$$I_{TYČ_0} = \frac{1}{4} 64 m l^2 + 3.16 ml^2 = (16+48) ml^2$$

$$I_{TYČ_0} = 64 m l^2$$

Rovnako moment zotrvačnosti hmotného bodu určíme pomocou Steinerovej vety

$$\boxed{I_{HB_0} = I_{HB_T} + mc^2}$$

kde $I_{HB_T} = 0$ vzhľadom na to, že hmotný bod je bezrozmerný,

c - je vzdialenosť hmotného bodu od stredu otáčania.

Potom

$$I_{HB_0} = 0 + 2m(8l)^2$$

$$I_{HB_0} = 128 ml^2$$

Výsledný moment zotrvačnosti mechanickej sústavy k bodu 0 je

$$I_0 = 64\, ml^2 + 128\, ml^2 = 192\, ml^2$$

Pre silu v pružine platí

$$F_p = k\, x_1$$

Výsledná tlmiaca sila

$$F_{d12} = b_{12}\, \dot{x}_3$$

Momentová pohybová rovnica mechanickej sústavy

$$I_0\, \ddot{\varphi} = -F_p\, y_1 - F_{d12}\, y_2 + G_T\, x_2 + G_{HB} x_4$$

$$192ml^2\, \ddot{\varphi} = -kx_1 2l - b_{12} \dot{x}_3\, 6l + 3mg\, 4l\varphi + 2mg\, 8l\varphi$$

$$192ml^2\, \ddot{\varphi} = -k2l\varphi 2l - \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2} 6l\dot{\varphi} 6l + 3mg\, 4l\varphi + 2mg\, 8l\varphi$$

$$192ml^2\, \ddot{\varphi} = -\dot{\varphi} \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2} 36l^2 + \varphi\left(28mgl - 4kl^2\right)$$

Pohybovú rovnicu upravíme na tvar základnej rovnice nevynúteného tlmeného kmitania

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \Omega_0^2\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}\frac{36\,b_1\,b_2}{192m\,(b_1+b_2)} + \varphi\frac{(7mg-kl)}{48ml} = 0$$

Z rovnice nevynúteného tlmeného kmitania sústavy vyplýva

- vzťah pre konštantu útlmu δ

$$2\delta = \frac{36\,b_1\,b_2}{192m(b_1+b_2)} \qquad \Rightarrow \qquad \delta = \frac{18\,b_1\,b_2}{192m(b_1+b_2)}$$

- vzťah pre vlastnú uhlovú frekvenciu netlmeného kmitania

$$\Omega_0^2 = \frac{(7mg-kl)}{48ml}$$

- vzťah pre vlastnú uhlovú frekvenciu tlmenej sústavy pre prípad pomerne malého tlmenia, ak $\Omega_0 > \delta$

$$\Omega_d = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{(7mg-kl)}{48ml} - \left(\frac{18\,b_1\,b_2}{192m(b_1+b_2)}\right)^2}$$

Potom dobu kmitu kruhovej dosky vypočítame

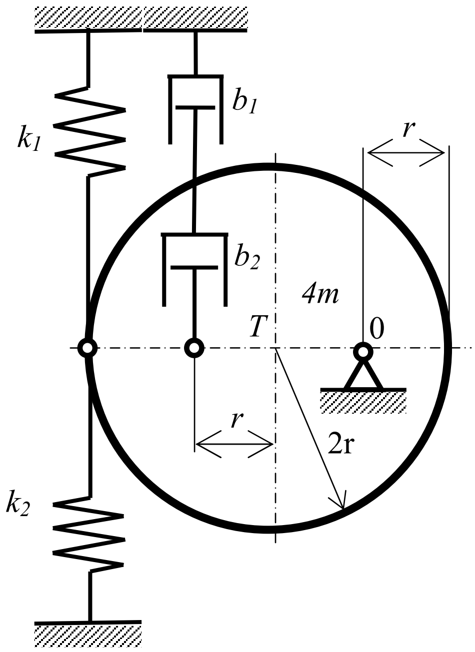
$$T_d = \frac{2\pi}{\Omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{(7mg-kl)}{48ml} - \left(\frac{18\,b_1\,b_2}{192m(b_1+b_2)}\right)^2}}$$

Pre frekvenciu tlmeného kmitania platí

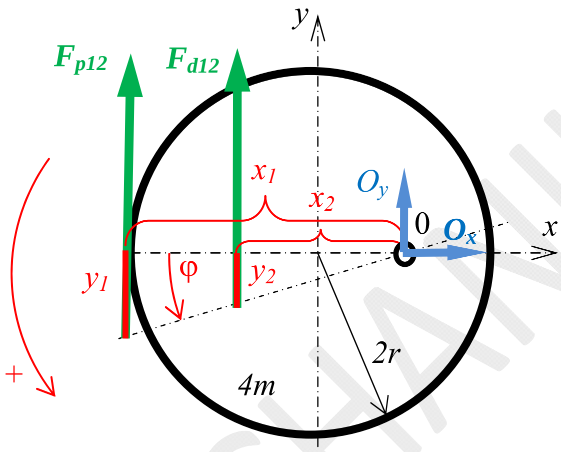
$$f_d = \frac{1}{T_d} = \frac{\sqrt{\frac{(7mg-kl)}{48ml} - \left(\frac{18\,b_1\,b_2}{192\,m(b_1+b_2)}\right)^2}}{2\pi}$$

PRÍKLAD 6.10: Kruhová doska hmotnosti *4m* a polomeru *2r* je viazaná k rámu kĺbom, nehmotnou pružinou (k) a tlmičmi (b_1 a b_2) podľa *obrázku 6.16A*. Určte dobu kmitu valca okolo rovnovážnej polohy a frekvenciu kmitania.

RIEŠENIE: Väzba kĺbom umožňuje kruhovej doske vykonávať otáčavý pohyb okolo pevnej osi rotácie prechádzajúcej bodom 0. Súčasne je doska k rámu upevnená pružinou s lineárnou charakteristikou a dvoma tlmičmi s lineárnym viskóznym tlmením. Pri malom pootočení telesa z rovnovážnej polohy a po jeho uvoľnení budú na teleso pôsobiť, ak neuvažujeme pasívne odpory, len momenty od vratnej sily v pružine a od tlmiacej sily v tlmičoch. Moment od tiažovej sily je kompenzovaný momentom od vratnej sily pružiny v rovnovážnej polohe (*statická výchylka*). Reakcie v strede otáčania nevyvolajú otáčavý účinok telesa.



Obrázok 6.16A



Obrázok 6.16B

Pri zostavení *pohybovej rovnice tlmeného kmitavého pohybu* vychádzame z momentovej pohybovej rovnice:

$$\boxed{\Sigma M_{i0} = I_0\,\alpha = I_0\,\ddot{\varphi}}$$

Uvoľníme teleso vo vychýlenej polohe (*Obrázok 6.16B*) so zvolenou kladnou uhlovou výchylkou φ, nakreslíme naň pôsobiace sily a vyjadríme

- veľkosti deformácie v pružine y_1,
- okamžitú rýchlosť $\dot{y}_2$
- vzdialenosti osí pružiny a tlmičov od osi rotácie x_1, x_2.

v závislosti na uhle pootočenia φ.

Ak pre veľmi malé uhly $\varphi\ (\varphi \le 5°)$:

$$\sin\varphi \doteq \varphi; \qquad \cos\varphi \doteq 1,$$

potom

$$y_1 = 3r\sin\varphi = 3r\varphi$$

$$y_2 = 2r\sin\varphi = 2r\varphi$$

$$\dot{y}_2 = 2r\dot{\varphi}\cos\varphi = 2r\dot{\varphi}$$

$$x_1 = 3r\cos\varphi = 3r$$

$$x_2 = 2r.\cos\varphi = 2r$$

Tlmiaci účinok oboch tlmičov zapojených za sebou, t. j. *sériovo*, vyjadríme výslednou výsledným súčiniteľom lineárneho tlmenia b_{12}

$$\frac{1}{b_{12}} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} \qquad \Rightarrow \qquad b_{12} = \frac{b_1\, b_2}{b_1 + b_2}$$

Pružiny s tuhosťami k_1 a k_2 sú zapojené paralelne (veľkosti ich deformácií sú v každom okamihu rovnaké). Obidve pružiny nahradíme jednou pružinou s výslednou tuhosťou k_{12}, pre ktorú platí:

$$k_{12} = k_1 + k_2$$

Pre odvodenie momentu zotrvačnosti kruhovej dosky s excentricky umiestnenou osou rotácie použijeme Steinerovu vetu $I_0 = I_T + mc^2$ a vzťah pre moment zotrvačnosti valca s rovnakým prierezom po celej dĺžke k osi prechádzajúcej jeho ťažiskom $I_T = \frac{1}{2} m r^2$. Pre kruhovú dosku hmotnosti $4m$, polomeru $2r$ so vzdialenosťou r medzi osou rotácie prechádzajúcou bodom 0 a ťažiskom T platí

$$I_0 = \frac{1}{2} 4m (2r)^2 + 4mr^2$$

$$I_0 = 12 mr^2$$

Pre výslednú silu v pružine platí

$$F_{p12} = k_{12}\, y_1$$

Výsledná tlmiaca sila

$$F_{d12} = b_{12}\, \dot{y}_2$$

Na základe obrázku uvoľneného telesa zostavíme momentovú pohybovú rovnicu, kde kladný zmysel otáčania volíme v súlade z naznačenou orientáciou uhlovej výchylky.

$$I_0\, \ddot{\varphi} = -F_{p12}\, x_1 - F_{d12}\, x_2$$

$$I_0\, \ddot{\varphi} = -F_{p12}\, 3r - F_{d12}\, 2r$$

$$12mr^2 \ddot{\varphi} = (-k_{12}\, 3r\varphi)3r - (b_{12}\, 2r\dot{\varphi})2r$$

$$12mr^2 \ddot{\varphi} = -9k_{12} r^2 \varphi - 4b_{12} r^2 \dot{\varphi}$$

Pohybovú rovnicu upravíme na tvar základnej rovnice nevynúteného tlmeného kmitania

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\,\dot{\varphi} + \Omega_0^2 x = 0$$

$$12m\ddot{\varphi} + 4b_{12}\dot{\varphi} + 9k_{12}\,\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{4}{12m} b_{12}\,\dot{\varphi} + \frac{9}{12m} k_{12}\,\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{3m}\frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2}\dot{\varphi} + \frac{3}{4m}(k_1 + k_2)\varphi = 0$$

Z rovnice nevynúteného tlmeného kmitania sústavy vyplýva

- vzťah pre konštantu útlmu δ

$$2\delta = \frac{1}{3m}\cdot\frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{1}{6m}\cdot\frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2}$$

- vzťah pre vlastnú uhlovú frekvenciu netlmeného kmitania

$$\Omega_0^2 = \frac{3(k_1 + k_2)}{4m}$$

- vzťah pre vlastnú uhlovú frekvenciu tlmenej sústavy pre prípad pomerne malého tlmenia, ak $\Omega_0 > \delta$

$$\Omega_d = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{3(k_1 + k_2)}{4m} - \left(\frac{b_1 b_2}{6m(b_1 + b_2)}\right)^2}$$

Potom dobu kmitu kruhovej dosky vypočítame

$$T_d = \frac{2\pi}{\Omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3(k_1 + k_2)}{4m} - \left(\frac{b_1 b_2}{6m(b_1 + b_2)}\right)^2}}$$

Pre frekvenciu tlmeného kmitania platí

$$f_d = \frac{1}{T_d} = \frac{\sqrt{\frac{3(k_1 + k_2)}{4m} - \left(\frac{b_1 b_2}{6m(b_1 + b_2)}\right)^2}}{2\pi}$$