Poznámka na úvod: Riešenie príkladu 5.1 je názornou ukážkou vypracovania zadania č. 2 z Aplikovanej mechaniky. Kinematická analýza a riešenie metódou postupného uvoľňovania danej sústavy telies už boli vysvetlené v Príklade 4.3 v 6. týždni. Pre úplnosť riešenia úlohy 5.1 sú uvedené znovu.

PRÍKLAD 5.1: Zdvíhacie zariadenie na *obrázku 5.1* je tvorené čelným ozubeným kolesom *6*, pevnou kladkou s ozubeným vencom *5* a voľnou kladkou *4*. Určte veľkosť hnacieho momentu M_{h6}, ak za daný čas zdvihu t_2 bremeno *2* dosiahne rýchlosť v_2. Sústava telies sa rozbieha z pokoja a bremeno 2 je zdvíhané rovnomerne zrýchlene. Ozubenie v prevodoch je priame, uhol záberu je α. Dané hodnoty: m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, r_4, R_5, r_5, r_6, i_{T5}, v_2, t_2, a_2 = konšt..

Úlohu riešte:

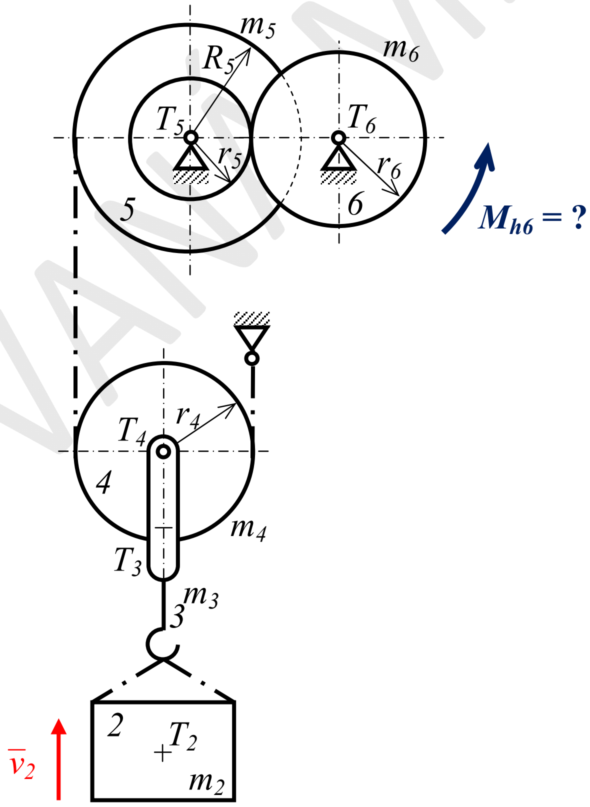
I. Metódou postupného uvoľňovania s uvažovaním vplyvu pasívnych odporov

II. Metódami, pri ktorých vplyv pasívnych odporov zanedbáme:

a) metódou redukcie hmotnostných a silových veličín (redukcia na člen 2),

b) pomocou Lagrangeových rovníc druhého rádu,

c) metódou virtuálnych prác.



Obrázok 5.1

Riešenie: Dynamický model zdvíhacieho zariadenia predstavuje rovinnú pohyblivú sústavu telies s jedným stupňom voľnosti, pretože prevody kinematických veličín sú konštantné a jednotlivé členy konajú rovinné pohyby závislé na rotačnom pohybe hnacieho člena *6*. Sústava má 6 členov, kde ako člen *1* uvažujeme pevný rám.

Základným predpokladom správneho riešenia tohto typu úloh je kinematický rozbor pohybu danej pohyblivej sústavy telies a zostavenie vzájomných prevodových pomerov. Kinematická analýza pohybu je nutnou podmienkou riešenia danej úlohy všetkými metódami.

KINEMATICKÁ ANALÝZA

Rozbor pohybov jednotlivých pohyblivých členov mechanickej sústavy

Teleso 2: translačný pohyb (TP)
Teleso 3: translačný pohyb (TP)
Teleso 4: všeobecný rovinný pohyb (VRP)
Teleso 5: rotačný pohyb (RT)
Teleso 6: rotačný pohyb (RT)

Kinematické veličiny charakterizujúce pohyb jednotlivých členov sústavy:

Teleso 2:	a_2,	v_2,	s_2			
Teleso 3:	a_3,	v_3,	s_3			
Teleso 4:	a_{T4},	v_{T4},	$s_{T3,}$	α_4,	ω_4,	φ_3
Teleso 5:	α_5,	ω_5,	φ_5			
Teleso 6:	α_6,	ω_6,	φ_6			

VÄZBOVÉ PODMIENKY (PREVODOVÉ POMERY)

- vyjadrujú závislosti medzi kinematickými veličinami telies pohyblivej mechanickej sústavy, ktoré sú spojené vzájomnými vnútornými väzbami a u telies konajúcich všeobecný rovinný pohyb, závislosť medzi základnými a uhlovými kinematickými veličinami charakterizujúcimi ich pohyb.

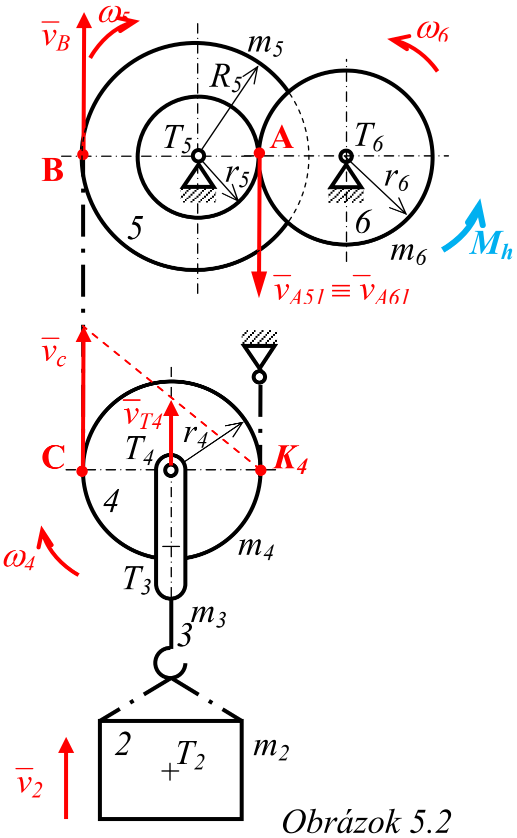
Závislosti **okamžitých rýchlostí** pohyblivých členov mechanickej sústavy:

•• Telesá 2, 3 a 4 sú v danom okamihu zdvíhané rovnakou rýchlosťou. Pre voľnú kladku 4 platí závislosť medzi rýchlosťou jej zdvihu v_{T4} a uhlovou rýchlosťou ω_4 - (a).

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_3 = \bar{v}_{T4}$$

$$v_2 = v_3 = v_{T4} = r_4\,\omega_4 \qquad \text{(a)}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_4 = \frac{v_2}{r_4}$$



Obrázok 5.2

•• Pre väzbu lanom BC platí:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_C$$

$$2\, r_4\, \omega_4 = R_5\, \omega_5 \qquad \text{(b)}$$

$$\Rightarrow \omega_5 = \omega_4 \frac{2\, r_4}{R_5} = \frac{v_2}{r_4} \frac{2\, r_4}{R_5}$$

$$\Rightarrow \omega_5 = v_2 \frac{2}{R_5}$$

•• V bode A platí podmienka valenia:

$$\bar{v}_{A51} = \bar{v}_{A61}$$

$$r_5\, \omega_5 = r_6\, \omega_6 \qquad \text{(c)}$$

$$\Rightarrow \omega_6 = \omega_5 \frac{r_5}{r_6} = v_2 \frac{2}{R_5} \frac{r_5}{r_6}$$

$$\Rightarrow \omega_6 = v_2 \frac{2\, r_5}{r_6\, R_5}$$

Pre všetky metódy riešenia, s uvažovaním alebo bez uvažovania pasívnych odporov je v tomto prípade potrebné vyjadriť závislosti okamžitých rýchlostí telies 3, 4, 5 a 6 na rýchlosti telesa 2. Rovnaké závislosti platia aj pre zrýchlenia a elementárne, resp. virtuálne premiestnenie.

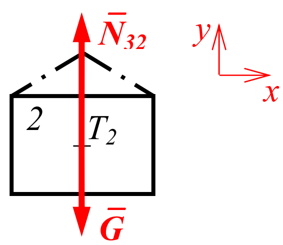
Tabuľka 5.1 Závislostí kinematických veličín telies 3, 4, 5, 6 na kinematických veličinách telesa 2, na ktoré robíme redukciu pohybu celej sústavy

v, ω	$\delta s, \delta\varphi$	a, α
$v_3 = v_2$	$\delta s_3 = \delta s_2$	$a_3 = a_2$
$v_{T4} = v_2$	$\delta s_{T4} = \delta s_2$	$a_{T4} = a_2$
$\omega_4 = \frac{v_2}{r_4}$	$\delta\varphi_4 = \frac{\delta s_2}{r_4}$	$\alpha_4 = \frac{a_2}{r_4}$
$\omega_5 = v_2 \frac{2}{R_5}$	$\delta\varphi_5 = \delta s_2 \frac{2}{R_5}$	$\alpha_5 = a_2 \frac{2}{R_5}$
$\omega_6 = v_2 \frac{2\, r_5}{r_6\, R_5}$	$\delta\varphi_6 = \delta s_2 \frac{2\, r_5}{r_6\, R_5}$	$\alpha_6 = a_2 \frac{2\, r_5}{r_6\, R_5}$

I. METÓDA POSTUPNÉHO UVOĽŇOVANIA

Jednotlivé telesá uvoľníme z väzieb. Zvolíme súradnicovú sústavu v súlade so zmyslom pohybu jednotlivých telies a nakreslíme sily a momenty, ktoré na ne pôsobia. Pohybové rovnice zostavíme metódou zrýchľujúcich síl. Doplníme statické podmienky rovnováhy, kinematické podmienky (prevodové pomery), vzťahy vyjadrujúce vplyv pasívnych odporov a vzťahy pre výpočet hmotnostných veličín (tiažové sily, hmotné momenty zotrvačnosti). Našou úlohou je vypočítať potrebnú veľkosť hnacieho momentu M_{h6}. Pretože nie je potrebné určiť reakcie vo väzbách, riešenie úlohy zjednodušíme zanedbaním vplyvu pasívnych odporov (čapové trenie a tuhosť lán).

Teleso 2 – vykonáva posuvný pohyb nahor v smere osi y. Nahradíme ho hmotným bodom.



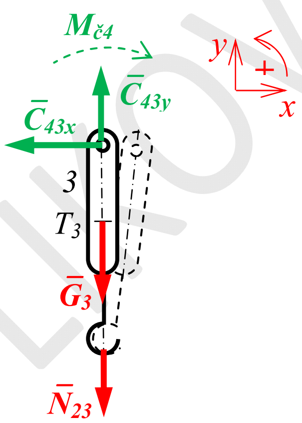
$$\sum F_{ix} = 0: \qquad 0 = 0 \qquad \text{(d)}$$

$$\sum F_{iy} = m_2\, a_2: \qquad m_2\, a_2 = N_{32} - G_2 \qquad \text{(e)}$$

Pre vnútornú väzbu telies 2 a 3 platí zákon akcie a reakcie

$$N_{32} = N_{23}$$

Teleso 3 – vykonáva posuvný pohyb nahor v smere osi y. Účinok momentu čapového trenia $M_{č4}$ sa prejaví v prípade, že väzba kĺbom v bode C nadobudne charakter pevnej väzby.



$$\sum F_{ix} = 0: \qquad 0 = C_{43x} \qquad \text{(f)}$$

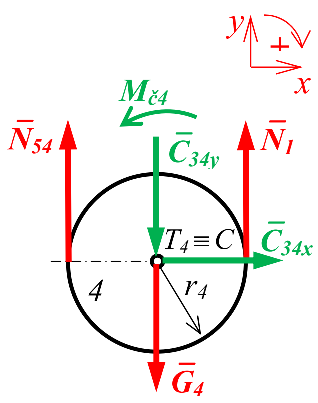
$$\sum F_{iy} = m_3\, a_3: \qquad m_3\, a_3 = C_{43y} - N_{23} - G_3 \qquad \text{(g)}$$

Pre vnútornú väzbu telies 3 a 4 platí zákon akcie a reakcie

$$C_{34\,y} = C_{43\,y}$$

$$C_{34\,x} = C_{43\,x}$$

Teleso 4 – vykonáva všeobecný rovinný pohyb. Pre zostavenie pohybových rovníc je nutný rozklad výsledného pohybu (rotácia okolo pohyblivej osi rotácie prechádzajúcej bodom C a posuvný pohyb ťažiska T_4 telesa 4 nahor v smere osi y) .



$$\sum F_{ix} = 0: \qquad 0 = C_{34x} \qquad \text{(h)}$$

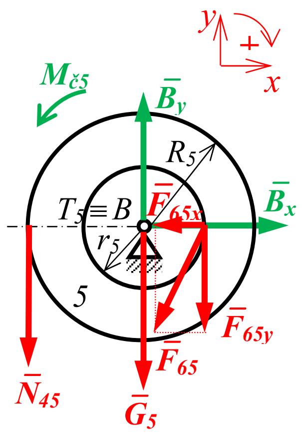
$$\sum F_{iy} = 0: \qquad m_4\, a_{T4} = -C_{34y} + N_1 + N_{54} - G_4 \qquad \text{(i)}$$

$$\sum M_{iT4} = I_{T4}\,\alpha_4: \; I_{T4}\,\alpha_4 = -M_{č4} + N_{54}\, r_4 - N_1\, r_4 \qquad \text{(j)}$$

Pre vnútornú väzbu telies 4 a 5 platí zákon akcie a reakcie

$$N_{54} = N_{45}$$

Teleso 5 – vykonáva rotačný pohyb okolo pevnej osi rotácie prechádzajúcej bodom *B*.



$$\sum F_{ix} = 0: \qquad 0 = B_x - F_{65x} \qquad \text{(k)}$$

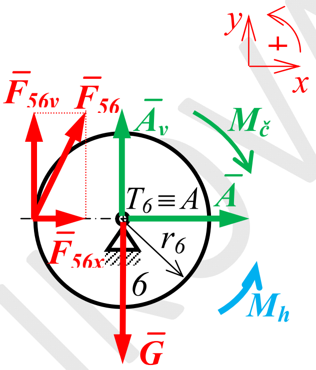
$$\sum F_{iy} = 0: \qquad 0 = B_y - F_{65y} - N_{45} - G_5 \qquad \text{(l)}$$

$$\sum M_{iT5} = I_{T5}\,\alpha_5 : I_{T5}\,\alpha_5 = -M_{č5} + F_{65y}\, r_5 - N_{45}\, R_5 \qquad \text{(m)}$$

Pre vnútornú väzbu telies 5 a 6 platí zákon akcie a reakcie

$$F_{56} = F_{65}$$

Teleso 6 – vykonáva rotačný pohyb okolo pevnej osi rotácie prechádzajúcej bodom *A*.



$$\sum F_{ix} = 0: \qquad 0 = A_x + F_{56x} \qquad \text{(n)}$$

$$\sum F_{iy} = 0: \qquad 0 = A_y + F_{56y} - G_6 \qquad \text{(o)}$$

$$\sum M_{iT6} = I_{T6}\,\alpha_6 : \quad I_{T6}\,\alpha_6 = M_{h6} - M_{č6} - F_{56y} r_6 \qquad \text{(p)}$$

Doplnkové rovnice:

$$G_2 = m_2\, g\,, \quad G_3 = m_3\, g\,, \quad G_4 = m_4\, g\,, \quad G_5 = m_5\, g\,, \quad G_6 = m_6\, g \qquad \text{(r)}$$

$$\left.\begin{aligned} M_{č4} &= r_{č4}\, f_{č4} \sqrt{C_x^2 + C_y^2} \\ M_{č5} &= r_{č5}\, f_{č5} \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \\ M_{č6} &= r_{č6}\, f_{č6} \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(s)}$$

$$I_{T5} = m_5\, i_{T5}^2\,, \quad I_{T4} = \frac{1}{2} m_4\, r_4^2\,, \quad I_{T6} = \frac{1}{2} m_6\, r_6^2 \qquad \text{(t)}$$

Pre prípad bez pasívnych odporov platí: $f_{či}=0;\quad i=4,5,6$. Potom $M_{či}=0;\quad i=4,5,6$. Veľkosť hnacieho momentu určíme z pohybových rovníc (e), (g), (i), (j), (m), (p). Ich postupnou úpravou a zohľadnením vzťahov (a), (b), (c), (r), (t) dostávame:

$$M_{h6}=\left[g\left(m_2+m_3+m_4\right)+a_2\left(m_2+m_3+m_4+\frac{1}{2}m_4+m_5\,i_{T5}^{\;2}\,\frac{4}{R_5^2}+2m_6\left(\frac{r_5}{R_5}\right)^2\right)\right]\frac{r_6\,R_5}{2r_5}$$

Veľkosť hnacieho momentu je určený vo vzťahu k požadovanému zrýchleniu a_2 telesa 2. Vychádzame z požiadavky, že rýchlosť v_2 teleso 2 dosiahne v čase t_2, ak jeho zrýchlenie je konštantné.

$$a_2=\frac{dv}{dt}=konšt.$$

$$a_2\int_0^{t_2}dt=\int_0^{v_2}dv$$

$$a_2\,t_2=v_2\qquad\Rightarrow\qquad \underline{a_2=\frac{v_2}{t_2}}$$

Potom:

$$\boxed{M_{h6}=\left[g\left(m_2+m_3+m_4\right)+\frac{v_2}{t_2}\left(m_2+m_3+m_4+\frac{1}{2}m_4+m_5\,i_{T5}^{\;2}\,\frac{4}{R_5^2}+2m_6\left(\frac{r_5}{R_5}\right)^2\right)\right]\frac{r_6\,R_5}{2r_5}}$$

📖 *Poznámka:* Takto určená veľkosť hnacieho momentu M_{h6} je užitočným hnacím momentom potrebným na vykonanie užitočnej práce. V sústave pôsobia aj pasívne odpory, ktorých účinky vyjadríme pomocou účinnosti. Nech účinnosť ozubeného prevodu medzi členmi 5 a 6 je η_{56}, účinnosť bubna na člene 5 je η_5 a účinnosť kladky 4 je η_4. Vzhľadom na postupný prenos výkonu je výsledná mechanická účinnosť zdvíhacieho zariadenia

$$\eta=\eta_{56}\,\eta_5\,\eta_4$$

Potom skutočná potrebná veľkosť hnacieho momentu M_{h6} je zväčšená o veľkosť M_t potrebného na prekonanie pasívnych odporov

$$M_{h6\,skutoč.}=M_{h6}\cdot\frac{1}{\eta}=M_{h6}+M_t$$

kde $\quad M_t=M_{h6}\left(1-\eta\right)$.

Účinky pasívnych odporov je možné vyjadriť tiež analyticky (doplnkové rovnice (s)). Momenty čapového trenia sú vždy orientované opačne vzhľadom na orientáciu rotačného pohybu hriadeľa (rovnice (j), (m), (p)). Ak $f_{či}\neq 0;\quad i=4,5,6$, potom rovnice (j), (m), (p) sú rovnice iracionálne, čo zvyšuje námahu pri riešení celej sústavy rovníc. V technickej praxi často používame tzv. Ponceletov vzťah na určenie veľkosti momentu čapového trenia:

$$M_{\check{c}} \doteq r_{\check{c}}\, f_{\check{c}} \left(0{,}96 R_x + 0{,}4 R_y\right)$$

kde $R_x > R_y$. Ak platí $R_x < R_y$, je potrebné vymeniť koeficienty pri R_x a R_y. Na záver pripomíname, že takto by sme zohľadnili len vplyv čapového trenia, tuhosť lán by sme zanedbali.

Poznámka: V prípadoch, ak pri sústavách s jedným stupňom voľnosti
- je potrebné definovať len závislosť kinematických veličín na veľkosti pracovných síl a momentov,
- nie je potrebné vypočítať reakcie vo väzbách,
- je možné zanedbať vplyv pasívnych odporov,

je možné pre danú mechanickú sústavu zostaviť len jednu pohybovú rovnicu.

Stanoviť a vypočítať vlastnú pohybovú rovnicu mechanickej sústavy (jej riešenie) je možné s využitím jednej z troch nasledujúcich metód riešenia úlohy.

Princíp riešenia: Pohyb, resp. zmena polohy celej sústavy telies je definovaná prostredníctvom tzv. zovšeobecnenej súradnice, t.j. súradnice, ktorou je určená zmena polohy vybraného člena danej sústavy telies. Kinematickými metódami určíme potom pohyb ostatných členov, ktorých polohu neurčujú zovšeobecnené súradnice priamo. Rovnakým spôsobom vzťahujeme k vybranému členu mechanickej sústavy všetky pracovné a zotrvačné účinky pôsobiace na celú sústavu.

II/a METÓDA REDUKCIE HMOTNOSTNÝCH A SILOVÝCH VELIČÍN

Vlastná pohybová rovnica sústavy s 1° voľnosti pohybu vo všeobecnom tvare:

$$M^* \ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{dM^*}{dq}\dot{q}^2 = Q \qquad (1)$$

Zjednodušený tvar pohybovej rovnice:

$$M^* \ddot{q} = Q \qquad (2)$$

V tomto prípade volíme redukciu na teleso 2, ktoré koná pohyb posuvný. Základná pohybová rovnica má potom tvar:

$$F_{red} = m_{red}\, a_2 \qquad (3)$$

Postupne odvodíme vzťahy pre výpočet: F_{red}, m_{red}, a_2.

1. **Odvodenie vzťahu pre výpočet m_{red}.** Platí: kinetická energia sústavy telies je rovnaká ako kinetická energia redukovaného (náhradného) telesa.

$$E_{Kred} = E_{Ksús.}$$

$$E_{Kred} = E_{K2} + E_{K3} + E_{K4} + E_{K5} + E_{K6} \qquad (4)$$

Kinetickú energiu a momenty zotrvačnosti jednotlivých telies a redukovaného člena určíme vzťahmi:

$$E_{K\,red} = \frac{1}{2} m_{red}\, v_2^2$$

$$E_{K2} = \frac{1}{2} m_2 {v_2}^2$$

$$E_{K3} = \frac{1}{2} m_3 {v_3}^2$$

$$E_{K4} = \frac{1}{2} m_4\, v_{T4}^2 + \frac{1}{2} I_{T4}\, \omega_4^2 \qquad I_{T4} = \frac{1}{2} m_4\, r_4^2$$

$$E_{K5} = \frac{1}{2} I_{T5}\, \omega_5^2 \qquad I_{T5} = m_5\, {i_{T5}}^2$$

$$E_{K6} = \frac{1}{2} I_{T6}\, \omega_6^2 \qquad I_{T6} = \frac{1}{2} m_6\, r_6^2$$

Do (4) dosadíme vzťahy pre výpočet E_K jednotlivých telies:

$$\frac{1}{2} m_{red}\, v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3\, v_3^2 + \frac{1}{2} m_4 v_{T4}^2 + \frac{1}{2} I_{T4}\, \omega_4^2 + \frac{1}{2} I_{T5}\, \omega_5^2 + \frac{1}{2} I_{T6}\, \omega_6^2$$

Rýchlosti $v_3, v_{T4}, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ nahradíme ich závislosťami na rýchlosti v_2 (Tab. 7.1) a upravíme:

$$\frac{1}{2} m_{red}\, v_2^2 = \frac{1}{2} m_2\, v_2^2 + \frac{1}{2} m_3\, v_2^2 + \frac{1}{2} m_4\, v_2^2 + \frac{1}{2} I_{T4} \left(\frac{v_2}{r_4} \right)^2 + \frac{1}{2} I_{T5} \left(v_2 \frac{2}{R_5} \right)^2 + \frac{1}{2} I_{T6} \left(v_2 \frac{2\, r_5}{r_6\, R_5} \right)^2 \qquad \Big/ \cdot \frac{2}{v_2^2}$$

Dosadíme vzťahy pre výpočet momentov zotrvačnosti I_{T4}, I_{T5}, I_{T6} valcov 4, 5, 6

$$m_{red} = m_2 + m_3 + m_4 + \frac{1}{2} m_4\, r_4^2 \left(\frac{1}{r_4} \right)^2 + m_5\, {i_{T5}}^2 \left(\frac{2}{R_5} \right)^2 + \frac{1}{2} m_6\, r_6^2 \left(\frac{2\, r_5}{r_6\, R_5} \right)^2$$

Upravíme na tvar:

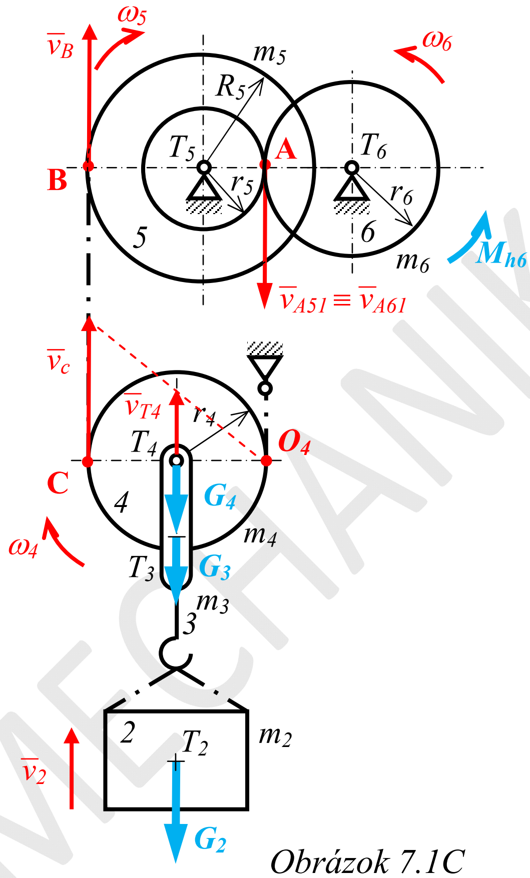
$$m_{red} = m_2 + m_3 + m_4 + \frac{1}{2} m_4 + m_5\, {i_{T5}}^2 \left(\frac{2}{R_5} \right)^2 + 2 m_6 \left(\frac{r_5}{R_5} \right)^2$$

2. **Odvodenie vzťahu pre výpočet** F_{red} .
Platí: Veľkosť okamžitého výkonu všetkých pracovných síl pôsobiacich na jednotlivé telesá sústavy telies je rovnaký, ako okamžitý výkon redukovanej sily F_{red} pôsobiacej na redukovaný (náhradný) člen 2.

$$P_{red} = P_{súst.}$$

$$P_{red} = P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 \qquad (5)$$

Pre okamžité výkony jednotlivých telies sústavy a redukovaného člena platí:



Obrázok 7.1C

Redukovaný člen: $P_{red} = F_{red}\, v_2$

Teleso 2: $P_2 = -G_2\, v_2$

Teleso 3: $P_3 = -G_3\, v_3$

Teleso 4: $P_4 = -G_4\, v_{T4}$

Teleso 5: -

Teleso 6: $P_6 = M_{h6}\, \omega_6$

Dosadíme do (5):

$$F_{red}\, v_2 = -G_2\, v_2 - G_3\, v_3 - G_4\, v_{T4} + M_{h6}\, \omega_6$$

📖 Poznámka: *Kladný zmysel (+) majú zrýchľujúce účinky (sily a momenty) pôsobiace v zmysle skutočného pohybu telies.*
Záporný zmysel (-) priradíme silám a momentom pôsobiacim proti pohybu telies.

Dosadíme vzťahy pre určenie tiažových síl telies 2, 3, 4, 6 a rýchlosti v_3, v_{T4}, ω_6 nahradíme ich závislosťami na rýchlosti v_2 a upravíme:

$$F_{red}\, v_2 = -m_2\, g\, v_2 - m_3\, g\, v_2 - m_4\, g\, v_2 + M_{h6}\, v_2 \frac{2\, r_5}{r_6\, R_5}$$

$$\boxed{F_{red} = -m_2\, g - m_3\, g - m_4\, g + M_{h6} \frac{2\, r_5}{r_6 R_5}}$$

Vyššie odvodené vzťahy dosadíme do základnej pohybovej rovnice (3):

$$-m_2\,g - m_3\,g - m_4\,g + M_{h6}\,\frac{2\,r_5}{r_6\,R_5} = \left(m_2 + m_3 + m_4 + \frac{1}{2} m_4 + m_5\, i_{T5}{}^2 \left(\frac{2}{R_5}\right)^2 + 2m_6 \left(\frac{r_5}{R_5}\right)^2 \right) \cdot a_2$$

Dostali sme jednu (pohybovú) rovnicu o dvoch neznámych - hnací moment M_{h6} a zrýchlenie a_2 telesa 2.

3. Určenie veľkosti zrýchlenia a_2 telesa *2* a hnacieho momentu M_{h6}.

Počas rozbehu danej sústavy telies má byť splnená podmienka, že teleso 2 dosiahne určenú rýchlosť v_2 za čas t_2 a že jeho zrýchlenie bude konštantné. Potom platí:

$$a_2 = \frac{dv}{dt} = konšt.$$

$$a_2 \int_0^{t_2} dt = \int_0^{v_2} dv$$

$$a_2\, t_2 = v_2 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{a_2 = \frac{v_2}{t_2}}$$

4. Výpočet hnacieho momentu M_{h6}:

$$-m_2\,g - m_3\,g - m_4\,g + M_{h6}\,\frac{2}{r_6}\,\frac{r_5}{R_5} = \left(m_2 + m_3 + m_4 + \frac{1}{2} m_4 + m_5\, i_{T5}{}^2 \left(\frac{2}{R_5}\right)^2 + 2m_6 \left(\frac{r_5}{R_5}\right)^2 \right) \cdot \frac{v_2}{t_2}$$

odkiaľ

$$M_{h6} = \left[\left(m_2 + m_3 + m_4 + \frac{1}{2} m_4 + m_5\, i_{T5}{}^2 \left(\frac{2}{R_5}\right)^2 + 2m_6 \left(\frac{r_5}{R_5}\right)^2 \right) \cdot \frac{v_2}{t_2} + m_2\,g + m_3\,g + m_4\,g \right] \cdot \frac{r_6}{2}\,\frac{R_5}{r_5}$$

II/b RIEŠENIE LANGRANGEOVÝMI ROVNICAMI II. DRUHU

Základný tvar pohybovej rovnice:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta E_K}{\theta \dot{q}}\right)-\frac{\theta E_K}{\theta q}=Q \qquad (1)$$

1. **Voľba zovšeobecnených súradníc** – posunutie s_2 telesa 2:

$$q=s_2; \qquad \dot{q}=v_2; \qquad \ddot{q}=a_2 \qquad (2)$$

2. Odvodenie vzťahu pre **výpočet veľkosti zovšeobecnenej sily *Q*** z okamžitých výkonov pracovných síl pôsobiacich na sústavu

$$P_{súst.}=Q\,v_2=P_2+P_3+P_4+P_5+P_6 \qquad (3)$$

Pre výkony pracovných síl a momentov pôsobiacich na jednotlivé telesá sústavy platí:

Teleso 2: $P_2=-G_2\,v_2$
Teleso 3: $P_3=-G_3\,v_3$
Teleso 4: $P_4=-G_4\,v_{T4}$
Teleso 5: -
Teleso 6: $P_6=M_{h6}\,\omega_6$

Dosadíme do (3):

$$Q\,v_2=-G_2\,v_2-G_3\,v_3-G_4\,v_{T4}+M_{h6}\,\omega_6$$

Dosadíme vzťahy pre určenie tiažových síl telies 2, 3, 4, 6, rýchlosti v_3, v_{T4}, ω_6 nahradíme ich závislosťami na rýchlosti v_2 a upravíme:

$$Q\,v_2=-m_2\,g\,v_2-m_3\,g\,v_2-m_4\,g\,v_2+M_{h6}\,v_2\,\frac{2\,r_5}{r_6\,R_5} \qquad \Big/\cdot\frac{1}{v_2}$$

$$\boxed{Q=-m_2\,g-m_3\,g-m_4\,g+M_{h6}\,\frac{2\,r_5}{r_6\,R_5}}$$

3. Odvodenie vzťahu pre **výpočet kinetickej energie sústavy $E_{Ksúst.}$**:

$$E_{Ksús.}=E_{K2}+E_{K3}+E_{K4}+E_{K5}+E_{K6} \qquad (4)$$

Kinetickú energiu a momenty zotrvačnosti jednotlivých telies a redukovaného člena určíme vzťahmi:

$$E_{K\,red} = \frac{1}{2} m_{red}\, v_2^2$$

$$E_{K2} = \frac{1}{2} m_2 {v_2}^2$$

$$E_{K3} = \frac{1}{2} m_3 {v_3}^2$$

$$E_{K4} = \frac{1}{2} m_4\, v_{T4}^2 + \frac{1}{2} I_{T4}\, \omega_4^2 \qquad I_{T4} = \frac{1}{2} m_4\, r_4^2$$

$$E_{K5} = \frac{1}{2} I_{T5}\, \omega_5^2 \qquad I_{T5} = m_5\, {i_{T5}}^2$$

$$E_{K6} = \frac{1}{2} I_{T6}\, \omega_6^2 \qquad I_{T6} = \frac{1}{2} m_6\, r_6^2$$

Dosadíme do (4):

$$E_{Ksúst.} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} m_4 v_{T4}^2 + \frac{1}{2} I_{T4} \omega_4^2 + \frac{1}{2} I_{T5} \omega_5^2 + \frac{1}{2} I_{T6} \omega_6^2$$

Dosadíme vzťahy pre určenie momentov zotrvačnosti valcov 4, 5, 6 a rýchlosti v_3, v_{T4}, ω_4, ω_5, ω_6 nahradíme ich závislosťami na rýchlosti v_2 a upravíme:

$$E_{Ksúst.} = \frac{1}{2} m_2\, v_2^2 + \frac{1}{2} m_3\, v_2^2 + \frac{1}{2} m_4\, v_2^2 + \frac{1}{2} I_{T4} \left(\frac{v_2}{r_4}\right)^2 + \frac{1}{2} I_{T5} \left(v_2 \frac{2}{R_5}\right)^2 + \frac{1}{2} I_{T6} \left(v_2 \frac{2\, r_5}{r_6 R_5}\right)^2$$

$$E_{Ksúst.} = \frac{1}{2} v_2^2 \left[m_2 + m_3 + m_4 + I_{T4} \left(\frac{1}{r_4}\right)^2 + I_{T5} \left(\frac{2}{R_5}\right)^2 + I_{T6} \left(\frac{2\, r_5}{r_6 R_5}\right)^2 \right]$$

$$E_{Ksúst.} = \frac{1}{2} v_2^2 \underbrace{\left[m_2 + m_3 + m_4 + \frac{1}{2} m_4 + m_5\, {i_{T5}}^2 \left(\frac{2}{R_5}\right)^2 + 2 m_6 \left(\frac{r_5}{R_5}\right)^2 \right]}_{K}$$

Ak označíme K = *konšt.* - veľkosť zotrvačného účinku telesa 2, ktoré reprezentuje (zastupuje) celú sústavu telies vypočítaná po dosadení známych hodnôt, potom

$$\underline{E_{K\,súst.} = \frac{1}{2} K\, v_2^2}$$

Derivácie $E_{K\,súst.}$ vzhľadom na (1):

$$\frac{\partial E_{Ksúst.}}{\partial v_2} = \frac{\partial \frac{1}{2} K\, v_2^2}{\partial v_2} = \frac{1}{2} K\, 2 v_2 = K\, v_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{Ksúst.}}{\partial v_2}\right) = \frac{d\left(K\, v_2\right)}{dt} = K\, a_2$$

$$\frac{\partial E_{Ksúst.}}{\partial s_2} = \frac{\partial\left(\frac{1}{2} K v_2^2\right)}{\partial s_2} = 0$$

Po dosadení do (1) dostávame:

$$K\, a_2 - 0 = -m_2\, g - m_3\, g - m_4\, g + M_{h6}\, \frac{2\, r_5}{r_6\, R_5},$$

resp.: $$K\, a_2 = -m_2\, g - m_3\, g - m_4\, g + M_{h6}\, \frac{2\, r_5}{r_6\, R_5}$$

alebo:

$$\left(m_2 + m_3 + m_4 + \frac{1}{2} m_4 + m_5\, i_{T5}^{\;2}\left(\frac{2}{R_5}\right)^2 + 2 m_6 \left(\frac{r_5}{R_5}\right)^2\right) a_2 = -m_2\, g - m_3\, g - m_4\, g + M_{h6}\, \frac{2\, r_5}{r_6\, R_5}$$

4. Výpočet **veľkosti zrýchlenia telesa *2*** a **hnacieho momentu M_{h6}.**

Vychádzame z predpokladu, že poznáme rýchlosť v_2 telesa 2 v čase t_2 a že jeho zrýchlenie je konštantné.

$$a_2 = \frac{dv}{dt} = konšt.$$

$$a_2 \int_0^{t_2} dt = \int_0^{v_2} dv$$

$$a_2\, t_2 = v_2 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{a_2 = \frac{v_2}{t_2}}$$

Dosadíme do pohybovej rovnice a vypočítame M_{h6}.

$$-m_2\, g - m_3\, g - m_4\, g + M_{h6}\, \frac{2}{r_6} = \left(m_2 + m_3 + m_4 + \frac{1}{2} m_4 + m_5\, i_{T5}^{\;2}\left(\frac{2}{R_5}\right)^2 + 2 m_6 \left(\frac{r_5}{R_5}\right)^2\right) \frac{v_2}{t_2}$$

$$M_{h6} = \left[\left(m_2 + m_3 + m_4 + \frac{1}{2} m_4 + m_5\, i_{T5}^{\;2}\left(\frac{2}{R_5}\right)^2 + 2 m_6 \left(\frac{r_5}{R_5}\right)^2\right) \frac{v_2}{t_2} + m_2\, g + m_3\, g + m_4\, g\right] \frac{r_6}{2}\, \frac{R_5}{r_5}$$

II/c RIEŠENIE METÓDOU VIRTUÁLNYCH PRÁC

Pri zostavení pohybovej rovnice sústavy telies vychádzame z podmienky dynamickej rovnováhy (1), z ktorej vyplýva, že súčet virtuálnych prác všetkých pracovných a zotrvačných síl a momentov pôsobiacich na sústavu telies je rovná 0.

$$\delta A = \left(\sum F_{Pi} - F_D\right)\delta_S + \left(\sum M_{Pi} - M_D\right)\delta\varphi = 0 \qquad (1)$$

Pre danú sústavu telies platí:

$$\delta A = \delta A_2 + \delta A_3 + \delta A_4 + \delta A_5 + \delta A_6 = 0 \qquad (2)$$

Vyjadríme virtuálne práce pracovných a zotrvačných účinkov, zotrvačné účinky a virtuálne posunutia, resp. pootočenia jednotlivých členov danej mechanickej sústavy:

1. Určenie **virtuálnych prác** pracovných a zotrvačných účinkov pre jednotlivé telesá:

Teleso 2: $\delta A_2 = \left(-m_2\, g - m_2\, a_2\right)\delta s_2$

Teleso 3: $\delta A_3 = \left(-m_3\, g - m_3\, a_3\right)\delta s_3$

Teleso 4: $\delta A_4 = \left(-m_4\, g - m_4\, a_{T4}\right)\delta s_{T4} + \left(0 - I_{T4}\, \alpha_4\right)\delta\varphi_4$

Teleso 5: $\delta A_5 = \left(0 - I_{T5}\, \alpha_5\right)\delta\varphi_5$

Teleso 6: $\delta A_6 = \left(M_{h6} - I_{T6}\, \alpha_6\right)\delta\varphi_6$

2. Určenie **momentov zotrvačnosti** pre telesá 4, 5, 6:

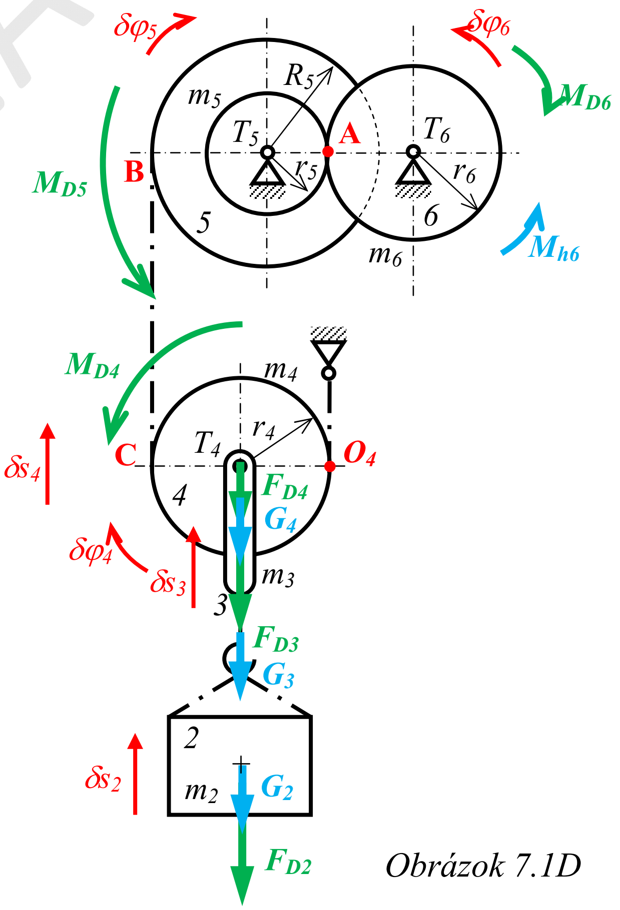
Teleso 4: $I_{T4} = \dfrac{1}{2} m_4\, r_4^2$

Teleso 5: $I_{T5} = m_5\, i_{T5}{}^2$

Teleso 6: $I_{T6} = \dfrac{1}{2} m_6\, r_6^2$

3. Voľba zovšeobecnených súradníc – posunutie telesa 2:

$$q = s_2$$
$$\dot{q} = v_2$$
$$\ddot{q} = a_2$$



Obrázok 7.1D

4. Závislosti kinematických veličín telies 3, 4, 5, 6 na zvolených zovšeobecnených súradniciach (kinematických veličinách telesa 2)

Tabuľka 2

δs, $\delta\varphi$	a, α
$\delta s_3 = \delta s_2$	$a_3 = a_2$
$\delta s_{T4} = \delta s_2$	$a_{T4} = a_2$
$\delta\varphi_4 = \dfrac{\delta s_2}{r_4}$	$\alpha_4 = \dfrac{a_2}{r_4}$
$\delta\varphi_5 = \delta s_2 \dfrac{2}{R_5}$	$\alpha_5 = a_2 \dfrac{2}{R_5}$
$\delta\varphi_6 = \delta s_2 \dfrac{2 r_5}{r_6 R_5}$	$\alpha_6 = a_2 \dfrac{2 r_5}{r_6 R_5}$

Postupne dosadíme do (2) $\delta A = \delta A_2 + \delta A_3 + \delta A_4 + \delta A_5 + \delta A_6 = 0$

- jednotlivé vzťahy pre virtuálne práce:

$$\delta A = (-m_2\, g - m_2\, a_2)\delta s_2 + (-m_3\, g - m_3\, a_3)\delta s_3 + (-m_4\, g - m_4\, a_{T4})\delta s_{T4} + (0 - I_{T4}\,\alpha_4)\delta\varphi_4$$
$$+ (0 - I_{T5}\,\alpha_5)\delta\varphi_5 + (M_{h6} - I_{T6}\,\alpha_6)\delta\varphi_6 = 0$$

- závislosti δs_3, δs_{T4}, $\delta\varphi_4$, $\delta\varphi_5$, $\delta\varphi_6$ na δs_2 - *Tabuľka 2* a vzťahy pre momenty zotrvačnosti:

$$(-m_2\, g - m_2\, a_2)\delta s_2 + (-m_3\, g - m_3\, a_3)\delta s_2 + (-m_4\, g - m_4\, a_{T4})\delta s_2 + \left(0 - \frac{1}{2} m_4\, r_4^2\, \alpha_4\right)\frac{\delta s_2}{r_4}$$
$$+ \left(0 - m_5\, i_{T5}^{\,2}\, \alpha_5\right)\delta s_2 \frac{2}{R_5} + \left(M_{h6} - \frac{1}{2} m_6\, r_6^2\, \alpha_6\right)\delta s_2 \frac{2 r_5}{r_6 R_5} = 0 \qquad / \cdot \frac{1}{\delta s_2}$$

Po úprave:

$$(-m_2\, g - m_2\, a_2) + (-m_3\, g - m_3\, a_3) + (-m_4\, g - m_4\, a_{T4}) + \left(0 - \frac{1}{2} m_4\, r_4^2\, \alpha_4\right)\frac{1}{r_4}$$
$$+ \left(0 - m_5 i_{T5}^{\,2}\, \alpha_5\right)\frac{2}{R_5} + \left(M_{h6} - \frac{1}{2} m_6\, r_6^2\, \alpha_6\right)\frac{2 r_5}{r_6 R_5} = 0$$

Roznásobíme zátvorky a dosadíme závislosti $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ na a_2 - *Tabuľka 2*

$$-m_2\,g - m_2\,a_2 - m_3\,g - m_3\,a_2 - m_4\,g - m_4\,a_2 - \frac{1}{2}m_4\,r_4^2\,\frac{a_2}{r_4}\frac{1}{r_4} - m_5\,i_{T5}^{\;2}a_2\,\frac{2}{R_5}\frac{2}{R_5}$$

$$+M_{h6}\frac{2\,r_5}{r_6\,R_5} - 2m_6\,a_2\,\frac{r_5}{R_5} = 0$$

Rovnicu upravíme a usporiadame členy, ktoré neobsahujú v súčine a_2 na ľavú stranu. Na pravú stranu rovnice dáme výrazy so zrýchlením a_2.

$$M_{h6}\frac{2\,r_5}{r_6\,R_5} - m_2\,g - m_3\,g - m_4\,g =$$

$$= m_2\,a_2 + m_3\,a_2 + m_4\,a_2 + \frac{1}{2}m_4\,a_2 + m_5\,i_{T5}^{\;2}\,a_2\,\frac{4}{R_5^2} + 2m_6\,a_2\left(\frac{r_5}{R_5}\right)^2$$

Zrýchlenie a_2 vyberieme pred zátvorku a dostaneme pohybovú rovnicu sústavy v tvare:

$$M_{h6}\frac{2\,r_5}{r_6\,R_5} - m_2\,g - m_3\,g - m_4\,g = a_2\left(m_2 + m_3 + m_4 + \frac{1}{2}m_4 + m_5\,i_{T5}^{\;2}\,\frac{4}{R_5^2} + 2m_6\left(\frac{r_5}{R_5}\right)^2\right)$$

5. Určenie **veľkosti zrýchlenia telesa *2* a hnacieho momentu M_{h6}.**

Vychádzame z predpokladu, že poznáme rýchlosť v_2 telesa 2 v čase t_2 a že jeho zrýchlenie je konštantné.

$$a_2 = \frac{dv}{dt} = konšt.$$

$$a_2\int_0^{t_2} dt = \int_0^{v_2} dv$$

$$a_2\,t_2 = v_2 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{a_2 = \frac{v_2}{t_2}}$$

Potom:

$$M_{h6} = \left[\left(m_2 + m_3 + m_4 + \frac{1}{2}m_4 + m_5\,i_{T5}^{\;2}\left(\frac{2}{R_5}\right)^2 + 2m_6\left(\frac{r_5}{R_5}\right)^2\right)\frac{v_2}{t_2} + m_2\,g + m_3\,g + m_4\,g\right]\frac{r_6}{2}\frac{R_5}{r_5}$$