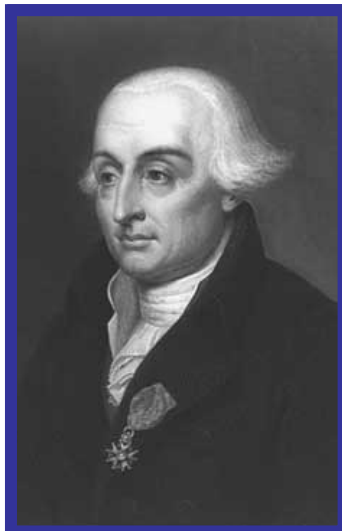


5.3 LAGRANGEOVE ROVNICE II. DRUHU

Lagrangeove rovnice II. druhu sú založené na energetickom princípe. Predstavujú veľmi efektívny spôsob zostavovania vlastných pohybových rovníc mechanickej sústavy. Metóda je vhodná pre konzervatívne (netlmené) sústavy.



Joseph Louis LAGRANGE (1736 – 1818) - taliansko-francúzsky matematik a astronóm.

V roku 1788 vydal dielo *Analytická mechanika*. Lagrange vyslovil princíp virtuálneho posunutia: "Ak hmotný bod viazaný hladkou väzbou je v rovnovážnej polohe, elementárna práca aktívnych síl sa pri ľubovoľnom virtuálnom posunutí z tejto polohy rovná nule". Kombináciou princípu virtuálneho posunutia a d'Alembertovho princípu potom J. L. Lagrange odvodil všeobecnú rovnicu mechaniky, teda analytickú rovnicu na riešenie všetkých typov mechanických úloh: statických i dynamických, úloh na rovnováhu i na pohyb, pre prípad viazaných častíc i objektov bez väzby a pod účinkom všetkých typov síl.

Uvažujme sústavu „ N “ hmotných bodov s *holonómnymi väzbami*, ktorá má „ n “ stupňov voľnosti pohybu. Vplyvom síl pôsobiacich na sústavu sa táto bude pohybovať tak, že v každom okamihu bude súčet virtuálnych prác pracovných a zotrvačných síl rovný nule. Platí

$$\sum_{j=1}^N \bar{F}_j^P \delta \bar{r}_j - \sum_{j=1}^N m_j \frac{d^2 \bar{r}_j}{dt^2} \delta \bar{r}_j = 0 \quad (5.34)$$

kde m_j sú hmotnosti jednotlivých bodov sústavy,
 $\bar{r}_j$ – ich polohové vektory,
 $\delta \bar{r}_j$ – virtuálne premiestnenia,
 $\bar{F}_j^P$ – pracovné sily.

Ďalej rovnicu (5.34) upravíme pre mechanické sústavy s jedným stupňom voľnosti.

MECHANICKÉ SÚSTAVY S JEDNÝM STUPŇOM VOĽNOSTI

Poloha jednotlivých hmotných bodov sústavy je funkciou jej zovšeobecnenej súradnice, prípadne tiež času.

$$\bar{r}_j = \bar{r}_j(q, t) \quad (5.35)$$

$$\text{a} \quad \delta \bar{r}_j = \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q} \delta q \quad (5.36)$$

Potom pre prvý člen rovnice (5.34) platí

$$\sum_{j=1}^N \bar{F}_j^P \delta \bar{r}_j = \sum_{j=1}^N \bar{F}_j^P \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q} \delta q = Q \delta q \quad (5.37)$$

$$\text{kde} \quad Q = \sum_{j=1}^N \bar{F}_j^P \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q} \quad (5.38)$$

V druhom člene rovnice (5.34) upravme zatiaľ len

$$\bar{a}_j \delta \bar{r}_j = \frac{d^2 \bar{r}_j}{dt^2} \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q} \delta q = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{d \bar{r}_j}{dt} \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q} \right) - \frac{d \bar{r}_j}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q} \right) \right] \delta q \quad (5.39)$$

a pre rýchlosť j -teho hmotného bodu platí

$$\bar{v}_j = \dot{\bar{r}}_j = \frac{d \bar{r}_j}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q} \dot{q} + \frac{\delta \bar{r}_j}{\delta t}$$

Z parciálnej derivácie tejto rovnice podľa $\dot{q}$ a z parciálnej derivácie rovnice (5.35) podľa q vyplýva rovnosť

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q}, \quad \text{rovnako} \quad \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q} \right) \quad (5.40)$$

pomocou tejto rovnosti upravme výraz v hranatej zátvorke v (5.39) na

$$\frac{d}{dt} \left(\bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial \dot{q}} \right) - \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{v_j^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{v_j^2}{2} \right) \quad (5.41)$$

Ak použijeme upravené výrazy (5.37) a (5.39) spolu s (5.40), rovnica (5.34) prejde na tvar

$$Q \delta q - \left[\sum_{j=1}^N \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{m_j v_j^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{m_j v_j^2}{2} \right) \right] \delta q = 0 \quad (5.42)$$

Kinetická energia mechanickej sústavy tvorenej „ N “ hmotnými bodmi je

$$E_k = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j v_j^2$$

Rovnicu (5.42) môžeme upraviť na tvar

$$\left\{ Q - \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q} \right] \right\} \delta q = 0 \quad (5.43)$$

Pretože vo všeobecnej rovine $\delta q \neq 0$, musí byť výraz v zátvorke rovný nule.

Rovnica (5.44) predstavuje **základný tvar Lagrangeovej rovnice II. druhu pre mechanickú sústavu s jedným stupňom voľnosti**, resp. jej **pohybovú rovnicu**.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q} = Q \quad (5.44)$$

kde $q, \dot{q}$ - zovšeobecnená súradnica, zovšeobecnená rýchlosť,

E_k - kinetická energia sústavy,

Q - zovšeobecnená sila.

Rovnako, ako pri zostavovaní pohybových rovníc princípom virtuálnych prác, neobsahujú ani Lagrangeove rovnice II. druhu väzbové reakcie. To znamená, že pre mechanické sústavy bez pasívnych odporov sú Lagrangeove rovnice II. druhu *vlastnými pohybovými rovnicami*. Na rozdiel od riešenia princípom virtuálnych prác tu nepracujeme so zotrvačnými účinkami, nepotrebujeme ich preto určovať. Jedinou dynamickou veličinou je tu kinetická energia, ktorá je skalárnou veličinou a je možné ju pomerne jednoducho vyjadriť aj pre zložitejšie sústavy.

Aplikujme *Lagrangeovu rovnicu II. druhu* odvodenú pre sústavu „ N “ hmotných bodov *pre rovinnú mechanickú sústavu s jedným stupňom voľnosti tvorenú telesami konajúcimi posuvný, rotačný alebo všeobecný rovinný pohyb*.

Tabuľka 5.1: Vzťahy pre výpočet kinetickej energie

KINETICKÁ ENERGIA		
Translačný pohyb telesa Pohyb hmotného bodu	Rotačný pohyb telesa	Všeobecný rovinný pohyb telesa
$E_k = \frac{1}{2} m v^2$	$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$	$E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$

Zovšeobecnenú silu Q vypočítame zo vzťahu, ktorý vyjadruje rovnosť virtuálnych prác pracovných síl a momentov a hľadanej zovšeobecnenej sily.

$$Q \delta q = \sum_j \bar{F}_{jt}^P \delta s_j + \sum_k M_k^P \delta \varphi_k$$

kde $\bar{F}_{jt}^P$ - dotyčnicová zložka pracovných síl pôsobiaca v smere pohybu,
 δs_j - virtuálne posunutie telesa,
 M_k^P - momenty (pracovných) silových dvojíc,
 $\delta \varphi_k$ - virtuálne pootočenie telesa.

Ak sú pracovné sily potenciálne, platí tiež

$$Q = - \frac{\partial E_p}{\partial q}$$

Zovšeobecnená sila odpovedá zápornej hodnote derivácie potenciálnej energie podľa zovšeobecnenej súradnice.

Poznámka: Ak má zovšeobecnená súradnica q rozmer dĺžky, zovšeobecnená sila má rozmer sily, ak je zovšeobecnená súradnica q vyjadrená uhlom, zovšeobecnená sila má rozmer momentu sily, tak aby súčin $Q \delta q$ mal rozmer práce.

 **Poznámka:** *Lagrangeové rovnice II druhu* umožňujú riešiť úlohy, kde je predpísaný pohyb a zisťujú sa potrebné sily alebo je predpísaná zrýchľujúca sila a zisťujeme pohyb sústavy. Pri riešení mechanických sústav s jedným stupňom voľnosti (zostavení ich pohybovej rovnice) použitím *Lagrangeových rovníc II druhu* postupujeme nasledovne:

1. Vychádzame zo **základného tvaru Lagrangeovej rovnice II. druhu** pre mechanickú sústavu s jedným stupňom voľnosti - rovnica (5.44).
2. Zvolíme **zovšeobecnenú súradnicu** (volíme súradnicu telesa, ktoré koná translačný alebo rotačný pohyb).
3. Vypočítame **kinetickú energiu sústavy**, pričom všetky kinematické veličiny musia byť vyjadrené ako funkcie zovšeobecnených súradníc a urobíme príslušné derivácie.
4. Z virtuálnej práce (alebo z okamžitého výkonu) pracovných síl vypočítame **zovšeobecnenú silu (moment)**, pričom všetky kinematické veličiny musia byť vyjadrené ako funkcie zovšeobecnených súradníc.
5. Odvodíme vlastnú pohybovú rovnicu riešenej mechanickej sústavy.
6. Kinematickými metódami určíme pohyb ostatných členov sústavy, ktorých polohu neurčujú zovšeobecnené súradnice priamo.

MECHANICKÉ SÚSTAVY S „n“ STUPŇAMI VOĽNOSTI

Rovnice (5.45) sú sústavou *Lagrangeových rovníc II. druhu* pre sústavu s „n“ stupňami voľnosti, kde *každej zovšeobecnenej súradnici odpovedá jedna pohybová rovnica, čiže počet pohybových rovníc sa rovná počtu stupňov voľnosti*.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial E_k}{\partial q_1} &= Q_1, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} + \frac{\partial E_k}{\partial q_2} &= Q_2, \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_n} + \frac{\partial E_k}{\partial q_n} &= Q_n. \end{aligned} \quad (5.45a)$$

resp. $\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = Q_i, \quad i=1,2,\dots,n \quad (5.45b)$

kde q_i - zovšeobecnená súradnica,
 $\dot{q}_i$ - zovšeobecnená rýchlosť,
 E_k - kinetická energia sústavy,
 Q_i - zovšeobecnená sila.