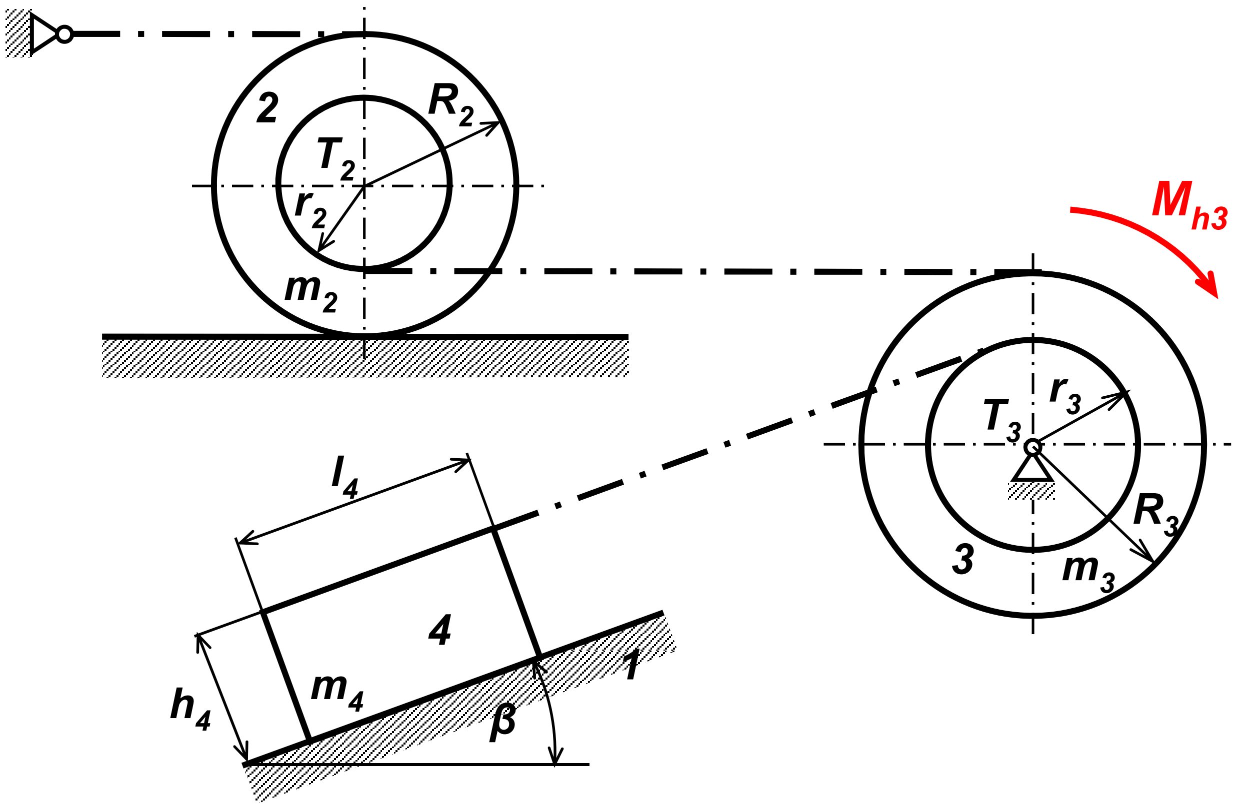
Príklad 2: Sústava telies sa pohybuje pod vplyvom pôsobenia hnacieho momentu M_{h3} a vlastných tiaží jednotlivých telies sústavy. Určte, koľkokrát sa otočí teleso *3* pri pohybe z pokoja za čas t_3. Predpokladajte, že sústava telies sa rozbieha s konštantným zrýchlením a laná sú dokonale ohybné. Dané sú hodnoty: M_{h3}, m_2, m_3, m_4, i_{T2}, i_{T3}, r_2, R_2, r_3, R_3, l_4, h_4, β, t_3, $\omega_{3(t_0=0)} = 0, \alpha_3 = konšt.$ Úlohu riešte s využitím princípu virtuálnych prác a pomocou Lagrangeových rovníc II. druhu bez uvažovania pasívnych odporov.

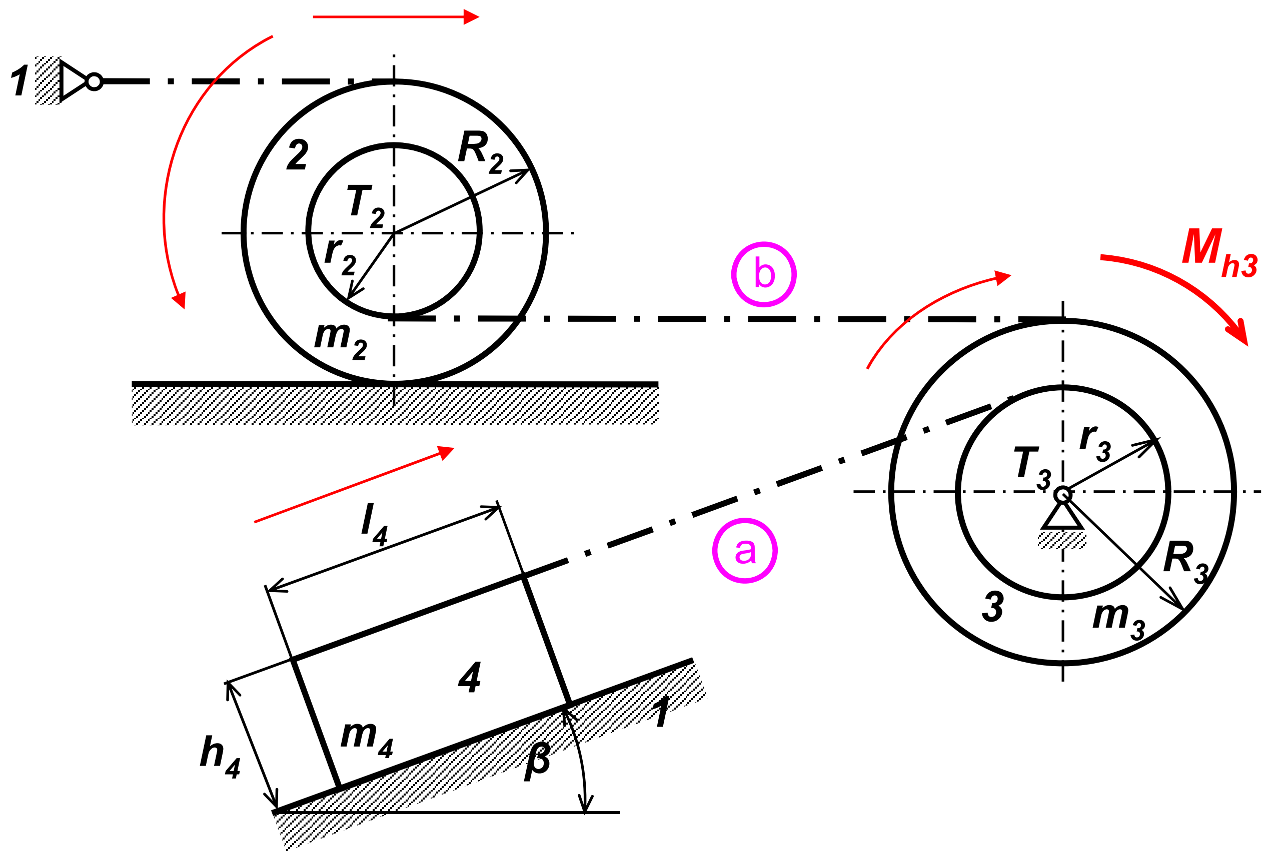


1. Kinematický rozbor:

2– všeobecný rovinný pohyb = posuv T_2 + rotácia telesa 2 okolo T_2

3 – rotačný pohyb

4 – posuvný pohyb

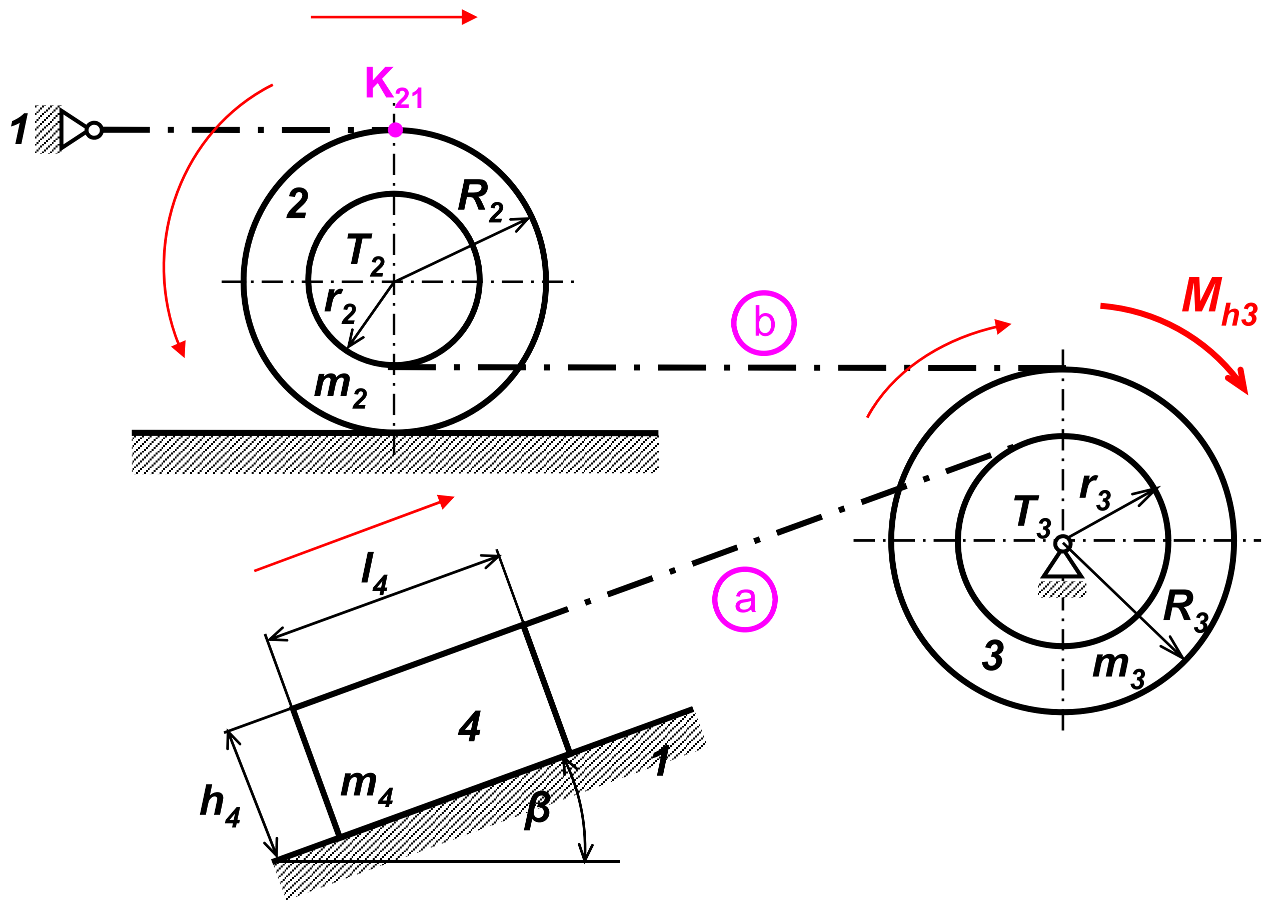


Poznámka: a b – vnútorné väzby lanom

1. Kinematický rozbor: 2– všeobecný rovinný pohyb = posuv T_2 + rotácia telesa 2 okolo T_2

3 – rotačný pohyb

4 – posuvný pohyb



Poznámka: a b – vnútorné väzby lanom

K_{21} - Okamžitý stred otáčania telesa 2 vzhľadom na rám 1

Voľba zovšeobecnených súradníc

2. Voľba zovšeobecnených súradníc:

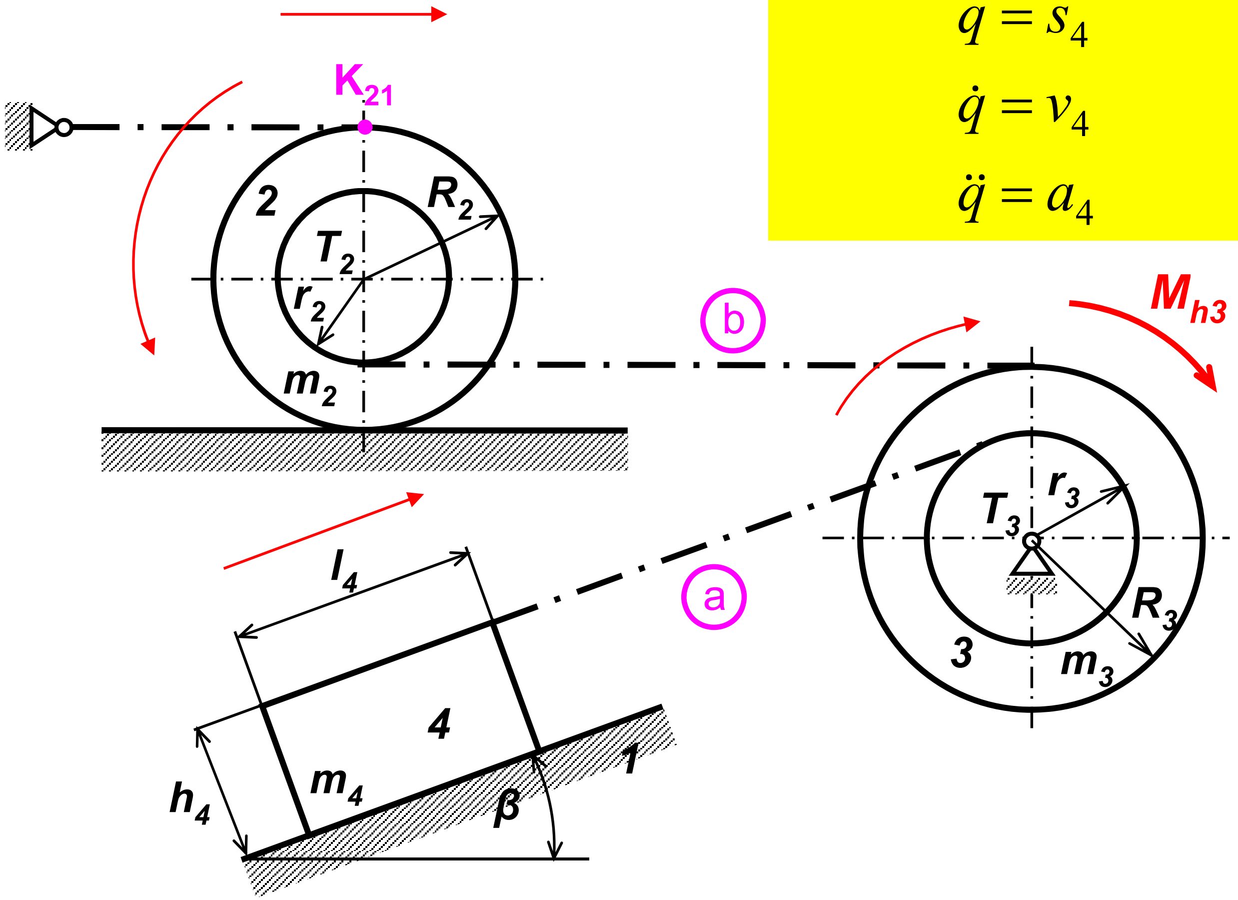
Teleso 4 - posuvný člen sústavy

Zovšeobecnené súradnice telesa 4

$$q = s_4$$

$$\dot{q} = v_4$$

$$\ddot{q} = a_4$$

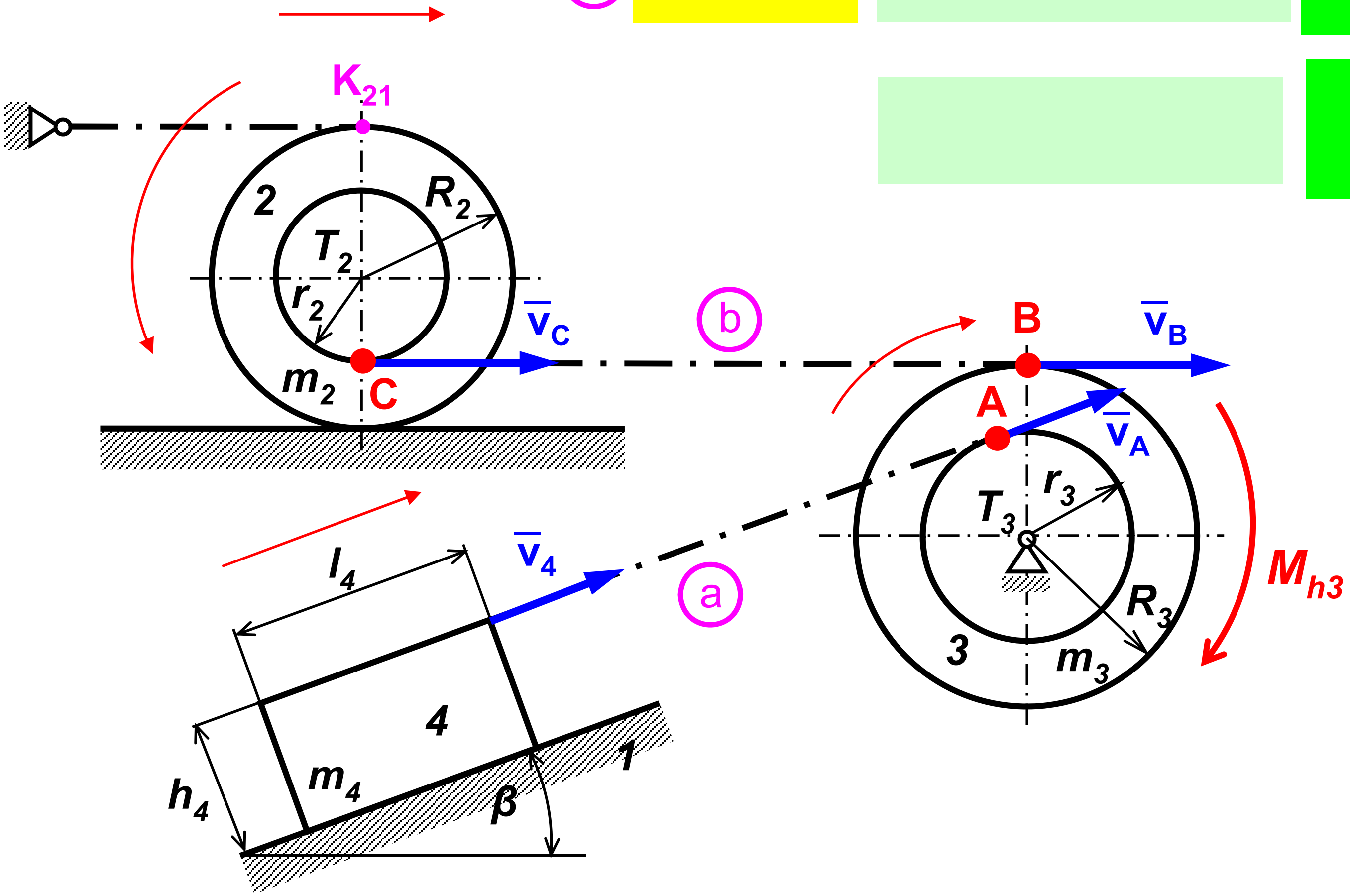


RIEŠENIE LAGRANGEOVÝMI ROVNICAMI II. DRUHU

3. Väzbové podmienky:

a $\bar{v}_4 = \bar{v}_A$

b $\bar{v}_C = \bar{v}_B$



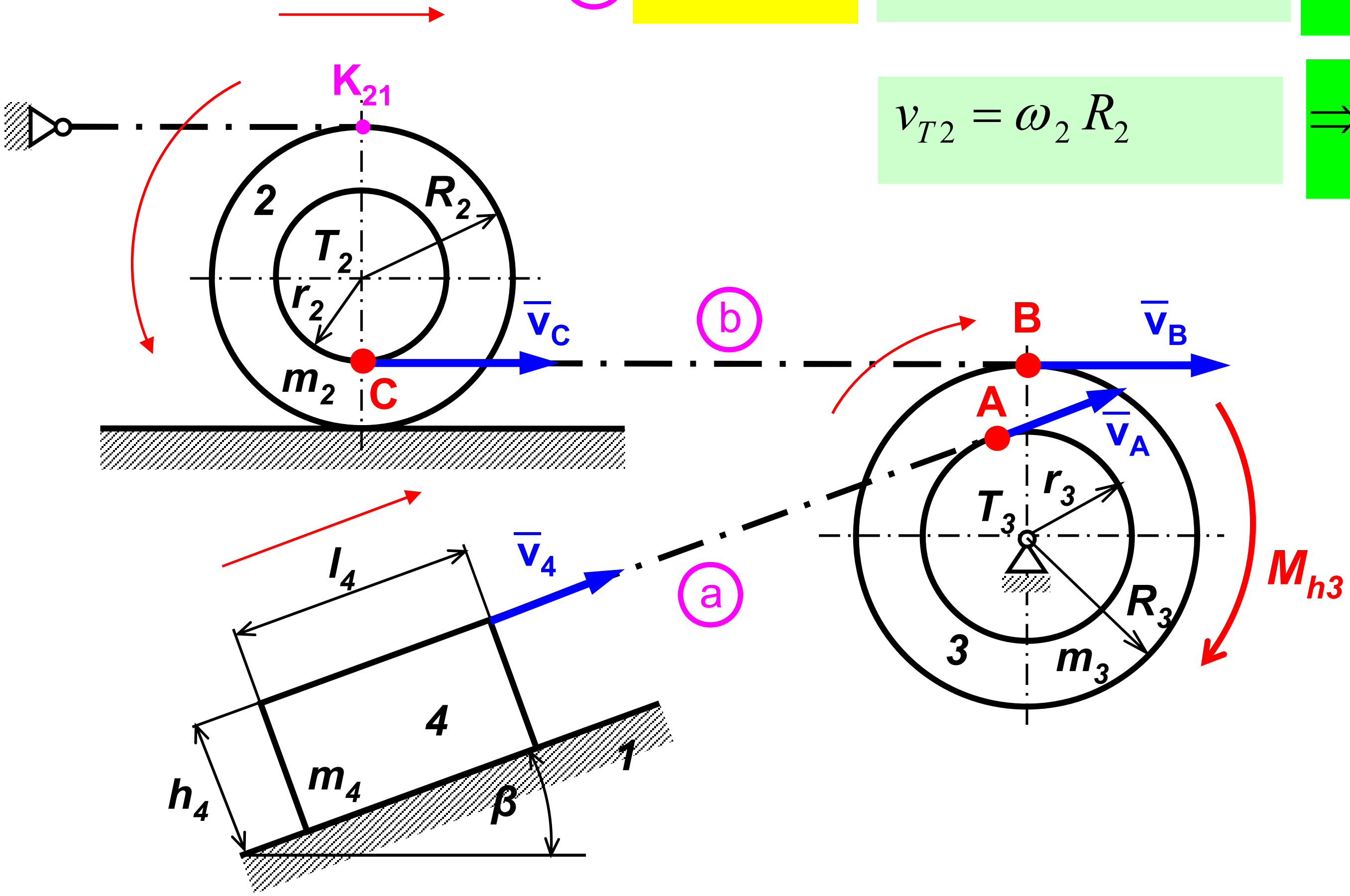
Väzbové podmienky

3. Väzbové podmienky:

a) $\bar{v}_4 = \bar{v}_A$ | $v_4 = \omega_3 r_3$ | $\Rightarrow \quad \omega_3 = v_4 \dfrac{1}{r_3}$

b) $\bar{v}_C = \bar{v}_B$ | $\omega_2 (R_2 + r_2) = \omega_3 R_3$ | $\Rightarrow \quad \omega_2 = v_4 \dfrac{R_3}{r_3 (R_2 + r_2)}$

$v_{T2} = \omega_2 R_2$ | $\Rightarrow \quad v_{T2} = v_4 \dfrac{R_3 R_2}{r_3 (R_2 + r_2)}$



Odvodené závislosti kinematických veličín

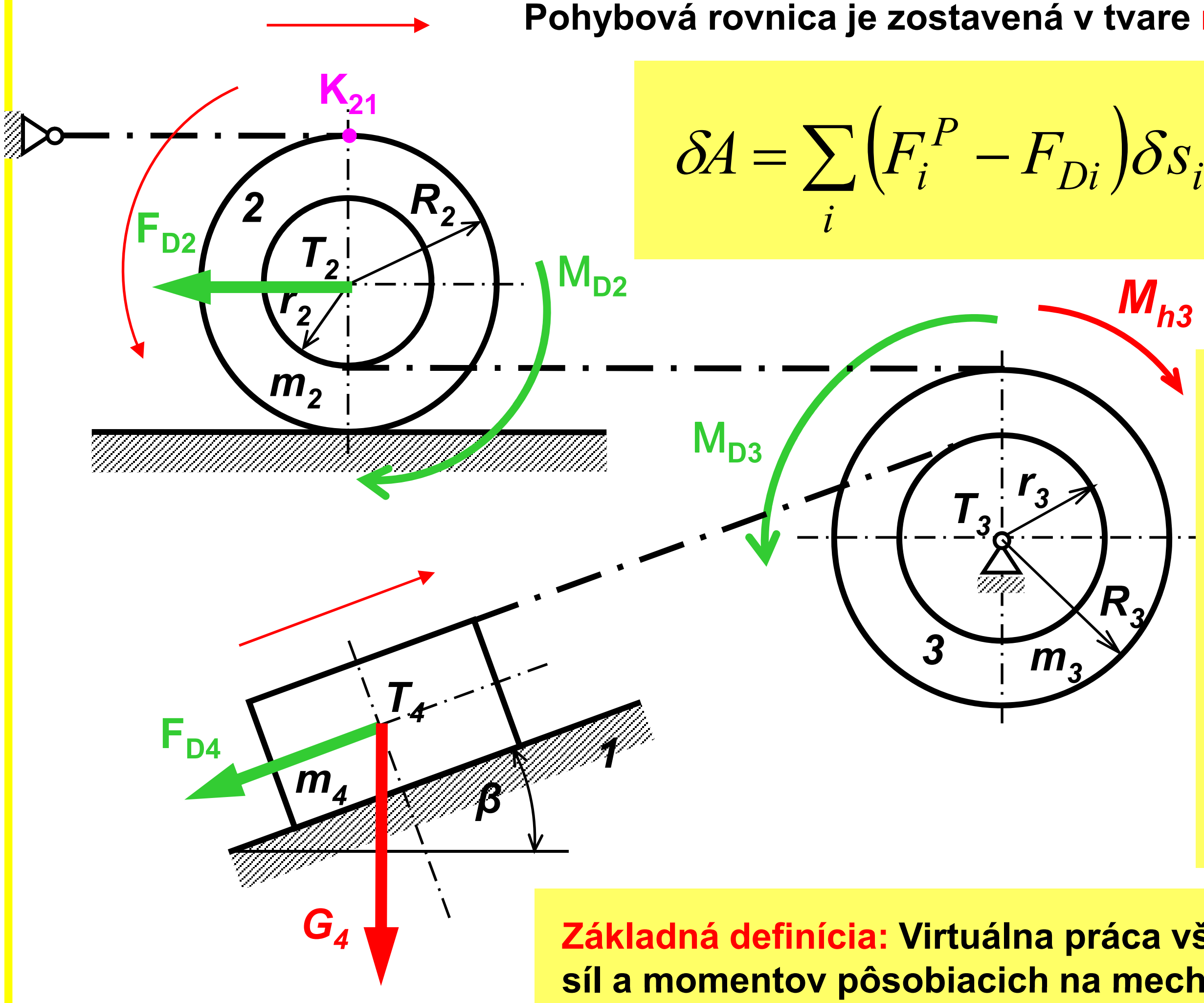
Tabuľka závislostí kinematických veličín telies 2 a 3 na kinematických veličinách telesa 4

$\delta\varphi,\ \delta s$	$\omega,\ v$	$\alpha,\ a$
$\delta\varphi_2 = \delta s_4 \dfrac{R_3}{r_3(R_2 + r_2)}$	$\omega_2 = v_4 \dfrac{R_3}{r_3(R_2 + r_2)}$	$\alpha_2 = a_4 \dfrac{R_3}{r_3(R_2 + r_2)}$
$\delta s_{T2} = \delta s_4 \dfrac{R_3 R_2}{r_3(R_2 + r_2)}$	$v_{T2} = v_4 \dfrac{R_3 R_2}{r_3(R_2 + r_2)}$	$a_{T2} = a_4 \dfrac{R_3 R_2}{r_3(R_2 + r_2)}$
$\delta\varphi_3 = \delta s_4 \dfrac{1}{r_3}$	$\omega_3 = v_4 \dfrac{1}{r_3}$	$\alpha_3 = a_4 \dfrac{1}{r_3}$

RIEŠENIE PRINCÍPOM VIRTUÁLNYCH PRÁC

4. Princíp virtuálnych prác – podmienka „DYNAMICKEJ ROVNOVÁHY“

Pohybová rovnica je zostavená v tvare rovnice „DYNAMICKEJ ROVNOVÁHY“



$$\delta A=\sum_i\left(F_i^P-F_{Di}\right)\delta s_i+\sum_i\left(M_i^P-M_{Di}\right)\delta\varphi_i=0$$

$F_i^P;\ M_i^P$ Pracovné sily a momenty

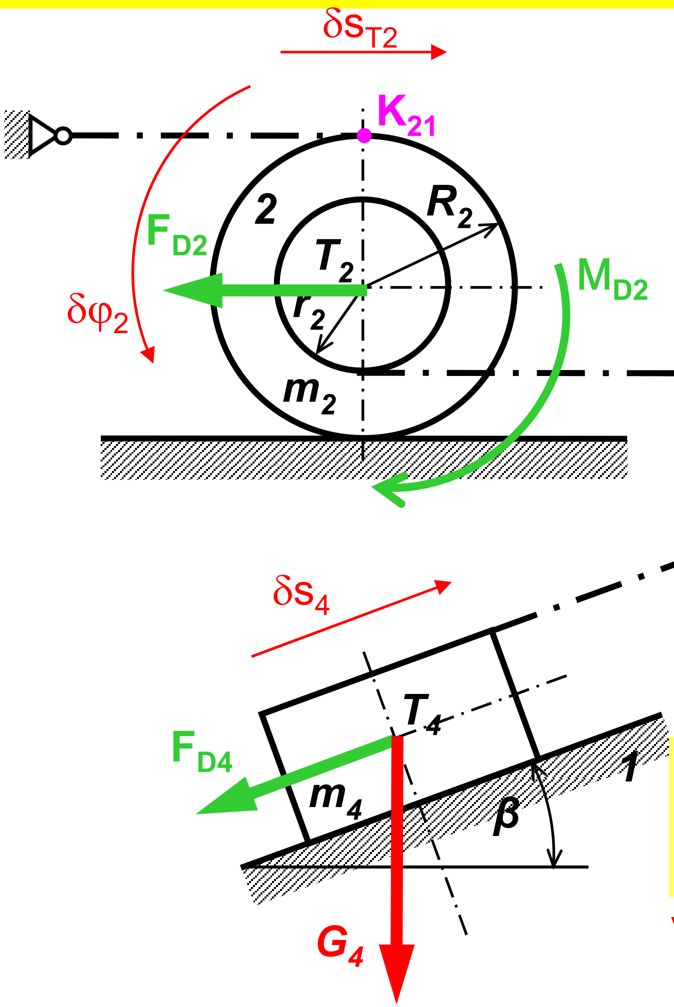
$F_{Di};\ M_{Di}$ Zotrvačné sily a momenty

$\delta s_i;\ \delta\varphi_i$ Virtuálne posunutie, resp. virtuálne pootočenie

Základná definícia: Virtuálna práca všetkých pracovných a zotrvačných síl a momentov pôsobiacich na mechanickú sústavu je rovná nule.

Poznámka: Metóda je vhodná, ak chceme určiť len jeden kinematický alebo silový parameter (vonkajšie silové účinky). Pomocou tejto metódy nie je možné určiť reakcie vo väzbách (vnútorné silové účinky).

RIEŠENIE PRINCÍPOM VIRTUÁLNYCH PRÁC



4.1 K sústave telies zobrazenej na obrázku doplníme zotrvačné účinky (sily a momenty) a virtuálne posunutia, resp. pootočenia.

$$\delta A = \sum_i \left(F_i^P - F_{Di}\right)\delta s_i + \sum_i \left(M_i^P - M_{Di}\right)\delta\varphi_i = 0$$

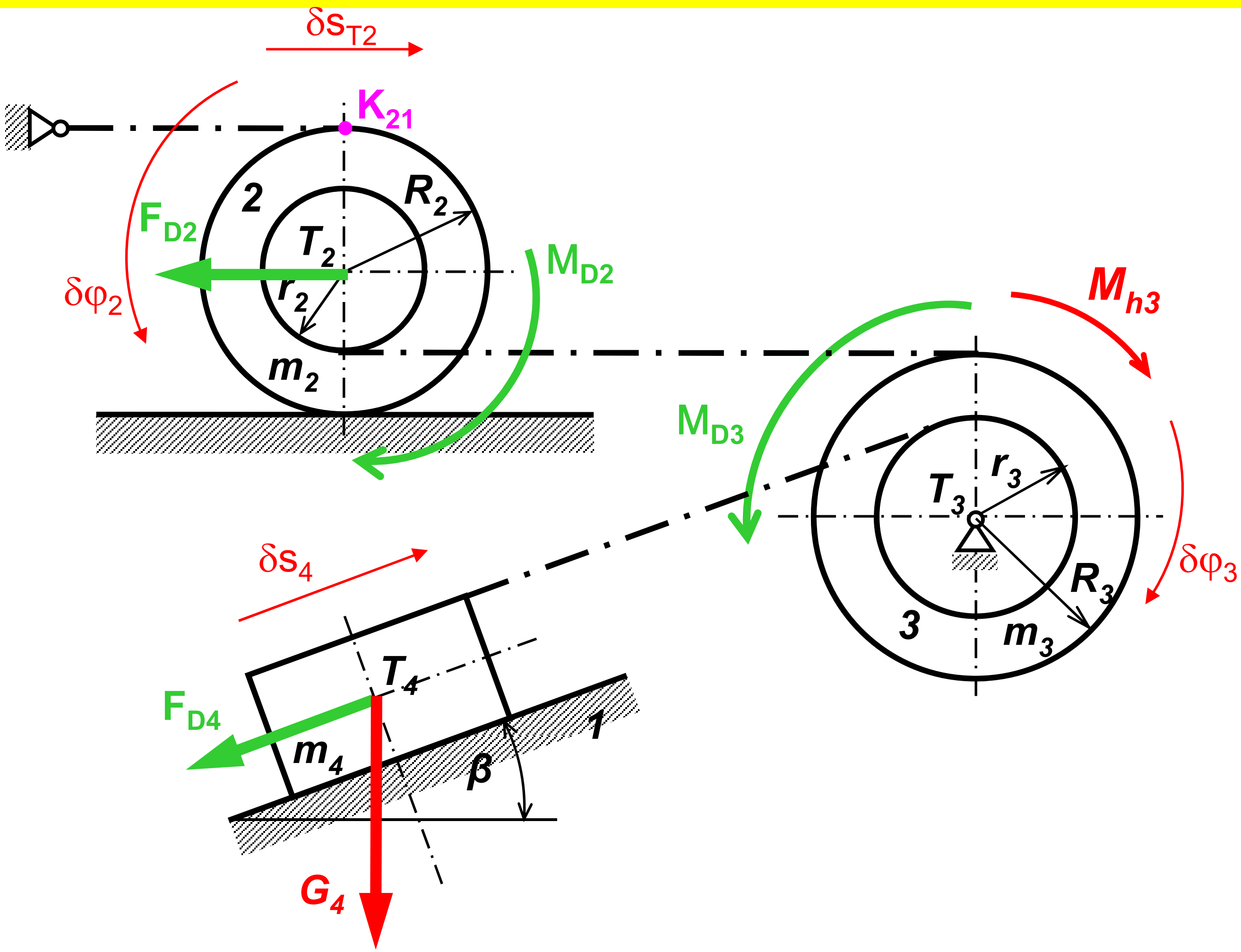
Virtuálna práca pracovných a zotrvačných síl a momentov telies 2,3,4

$$\delta A_4 = \left(-G_4 \sin\beta - F_{D4}\right)\delta s_4$$

$$\delta A_3 = \left(M_{h3} - M_{D3}\right)\delta\varphi_3$$

$$\delta A_2 = \left(0 - M_{D2}\right)\delta\varphi_2 + \left(0 - F_{D2}\right)\delta s_{T2}$$

RIEŠENIE PRINCÍPOM VIRTUÁLNYCH PRÁC



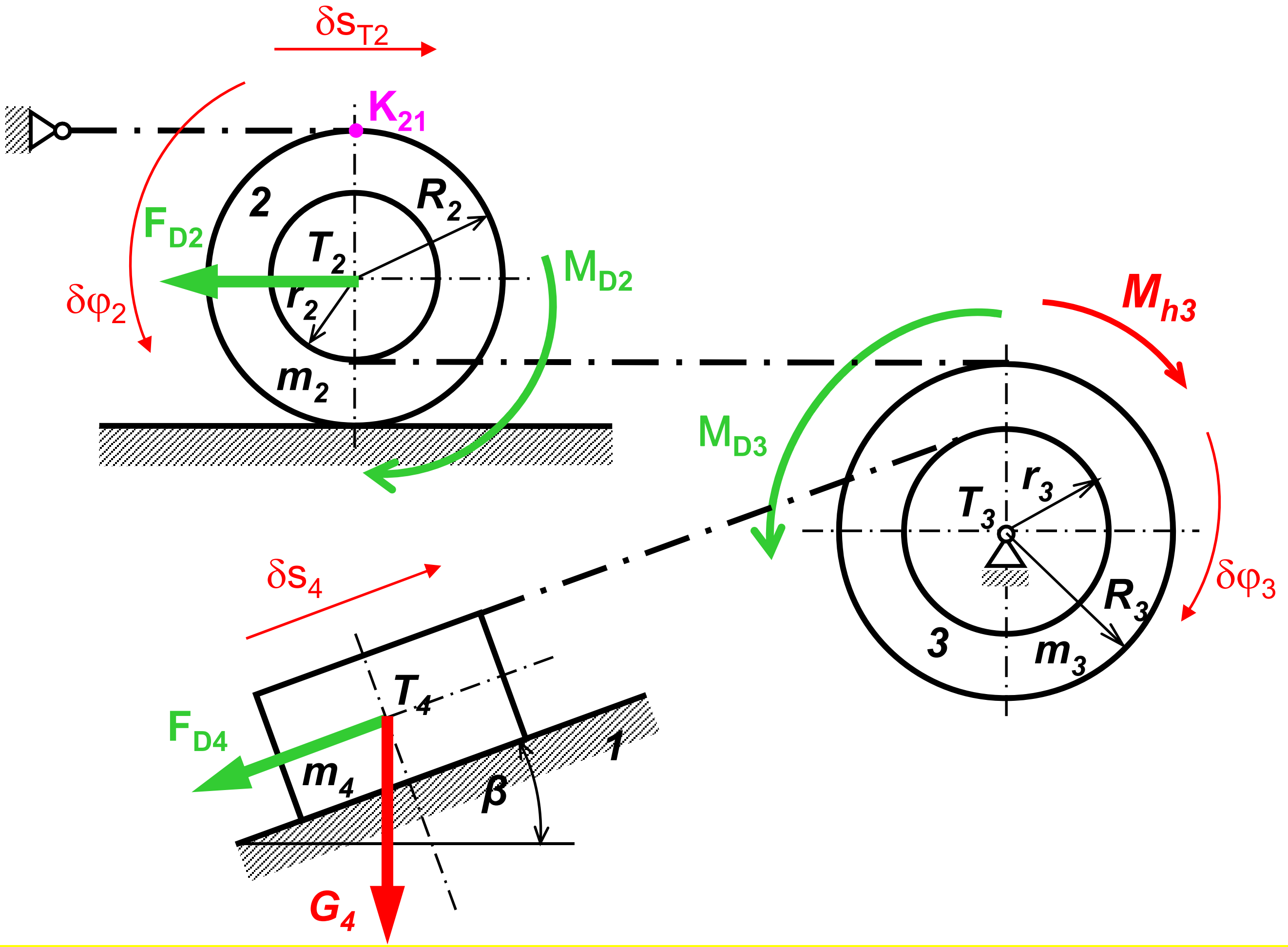
4.2 Zostavíme rovnicu „dynamickej rovnováhy“ danej sústavy telies

$$\delta A = \left(-G_4 \sin\beta - F_{D4}\right)\delta s_4 + \left(M_{h3} - M_{D3}\right)\delta\varphi_3 + \left(0 - M_{D2}\right)\delta\varphi_2 + \left(0 - F_{D2}\right)\delta s_{T2} = 0$$

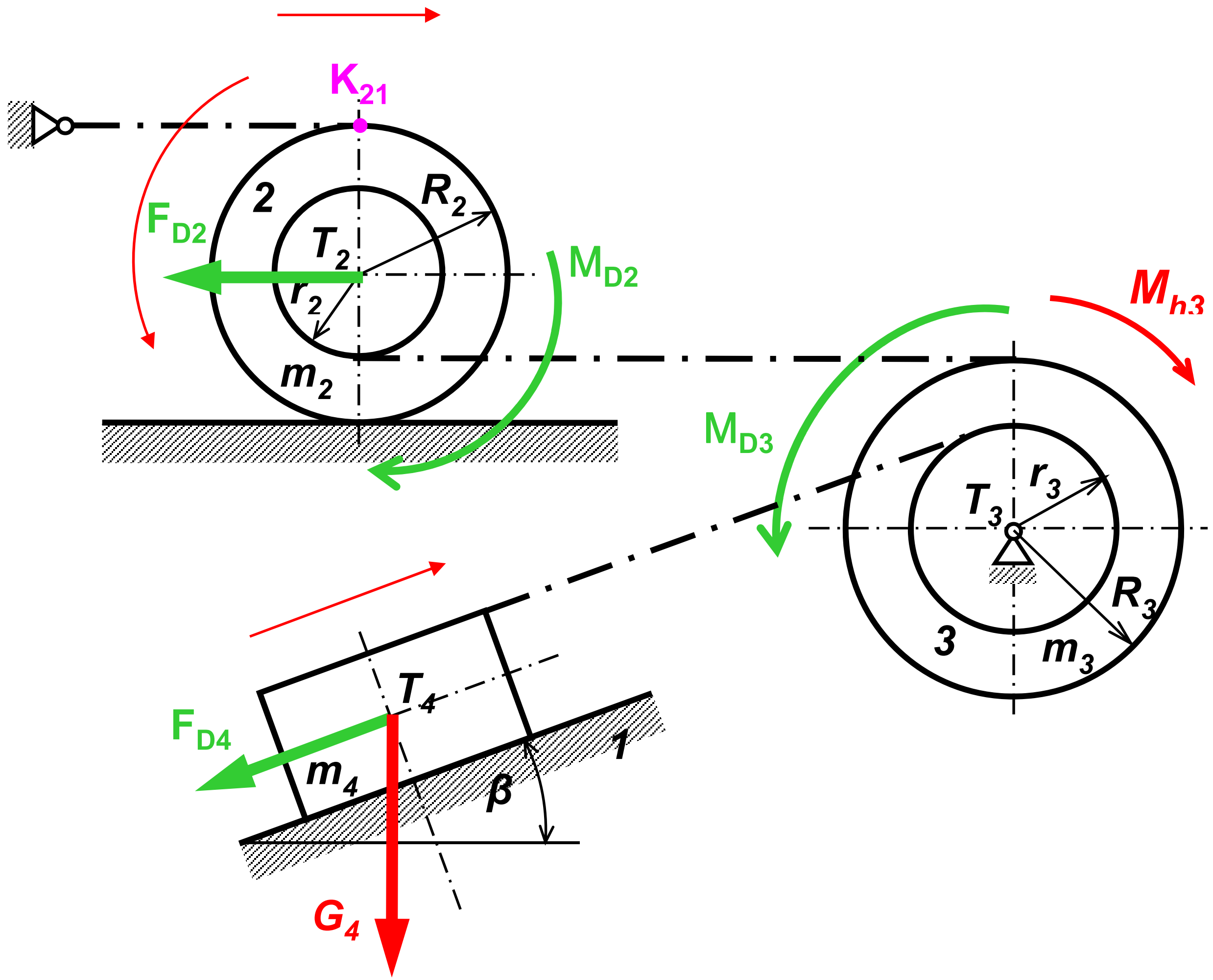
RIEŠENIE PRINCÍPOM VIRTUÁLNYCH PRÁC

$$\delta A = \left(-G_4 \sin\beta - F_{D4}\right)\delta s_4 + \left(M_{h3} - M_{D3}\right)\delta\varphi_3 + \left(0 - M_{D2}\right)\delta\varphi_2 + \left(0 - F_{D2}\right)\delta s_{T2} = 0$$

4.3 Do rovnice dynamickej rovnováhy dosadíme závislosti virtuálnych posunutí a zrýchlení telies 3 a 2 na virtuálnom posunutí a zrýchlení telesa 4, ktorým nahradíme pohyb celej sústavy telies. Rovnako je potrebné vyjadriť vzťahy pre výpočet zotrvačných účinkov jednotlivých telies.



RIEŠENIE PRINCÍPOM VIRTUÁLNYCH PRÁC



Zotrvačné sily a momenty

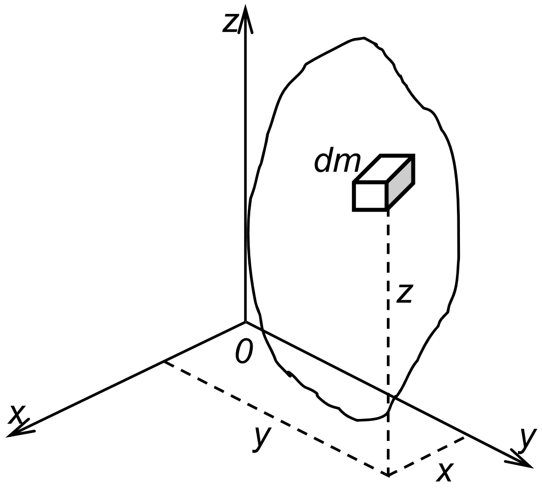
$$F_{D2} = m_2\, a_{T2}$$
$$M_{D2} = I_{T2}\, \alpha_2$$
$$F_{D4} = m_4\, a_4$$
$$M_{D3} = I_{T3}\, \alpha_3$$

Hmotné momenty zotrvačnosti

$$I_{T2} = m_2\, i_{T2}^2$$
$$I_{T3} = m_3\, i_{T3}^2$$

Polomer zotrvačnosti i_T

Výpočet momentov zotrvačnosti telies



Moment zotrvačnosti k osi *je definovaný ako súčin hmotnosti a druhej mocniny vzdialenosti od príslušnej osi.*

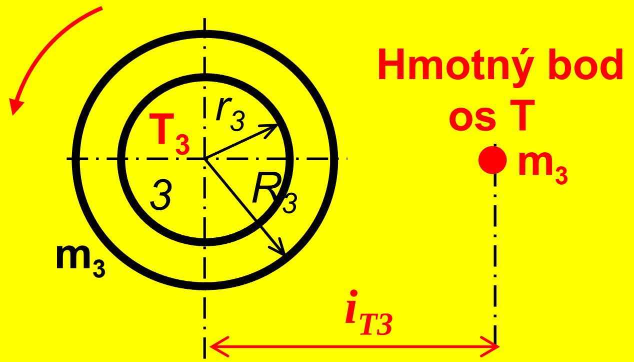
Napríklad k osi *x*

$$I_x = \int_m dm\,(y^2 + z^2)$$

Tvarovo zložité teleso môžeme **nahradiť hmotným bodom**, ktorý umiestnime vo vzdialenosti i_T od pôvodnej osi rotácie telesa tak, aby ich momenty zotrvačnosti k osi rotácie boli rovnaké!

Polomer zotrvačnosti (i_T) *je vzdialenosť k bodu, kde sústredená hmotnosť telesa má rovnaký hmotný moment zotrvačnosti ako hmotný moment zotrvačnosti telesa*.

Os T *prechádza „ťažiskom“ hmotného bodu, ktorým je nahradené pôvodné teleso 3. Hmotný moment zotrvačnosti hmotného bodu (bezrozmerný útvar)* $I_T = 0$



$$I_{T3} = \underbrace{I_T}_{=0} + m\, i_{T3}^2$$

Steinerova veta: *Moment zotrvačnosti sústavy hmotných bodov k určitej osi sa rovná súčtu jeho momentu zotrvačnosti k rovnobežnej osi prechádzajúcej ťažiskom sústavy a súčinu celkovej hmotnosti sústavy so štvorcom vzdialenosti medzi rovnobežnými osami.*

RIEŠENIE PRINCÍPOM VIRTUÁLNYCH PRÁC

$$\delta A = \left(-G_4 \sin\beta - F_{D4}\right)\delta s_4 + \left(M_{h3} - M_{D3}\right)\delta\varphi_3 + \left(0 - M_{D2}\right)\delta\varphi_2 + \left(0 - F_{D2}\right)\delta s_{T2} = 0$$

4.4 Výpočet zrýchlenia a_4 telesa 4 dosadením a úpravou rovnice „dynamickej rovnováhy“

Dosadíme vzťahy odvodené pre sily, momenty, hmotné momenty zotrvačnosti a posunutia, resp. pootočenia:

$$\delta A = \left(-m_4 g \sin\beta - m_4\, a_{T4}\right)\cancel{\delta s_4} + \left(M_{h3} - m_3\, i_{T3}^2\, \alpha_3\right)\cancel{\delta s_4}\frac{1}{r_3}$$

$$-m_2\, i_{T2}^2\, \alpha_2 \cancel{\delta s_4} \frac{R_3}{r_3\left(R_2 + r_2\right)} - m_2\, a_{T2} \cancel{\delta s_4} \frac{R_3 R_2}{r_3\left(R_2 + r_2\right)} = 0 \qquad /\cdot \frac{1}{\delta s_4}$$

RIEŠENIE PRINCÍPOM VIRTUÁLNYCH PRÁC

Dosadíme vzťahy odvodené pre zrýchlenia a uhlové zrýchlenia:

$$\delta A = \left(-m_4 g \sin\beta - m_4\, a_4\right) + \left(M_{h3} - m_3\, i_{T3}^2\, a_4 \frac{1}{r_3}\right)\frac{1}{r_3}$$

$$- m_2\, i_{T2}^2\, a_4 \frac{R_3}{r_3\left(R_2 + r_2\right)} \frac{R_3}{r_3\left(R_2 + r_2\right)} - m_2\, a_4 \frac{R_3 R_2}{r_3\left(R_2 + r_2\right)} \frac{R_3 R_2}{r_3\left(R_2 + r_2\right)} = 0$$

Úprava rovnice: • roznásobiť zátvorky

$$\delta A = -m_4 g \sin\beta - m_4\, a_4 + M_{h3} \frac{1}{r_3} - m_3\, i_{T3}^2\, a_4 \left(\frac{1}{r_3}\right)^2$$

$$- m_2\, i_{T2}^2\, a_4 \left(\frac{R_3}{r_3\left(R_2 + r_2\right)}\right)^2 - m_2\, a_4 \left(\frac{R_3 R_2}{r_3\left(R_2 + r_2\right)}\right)^2 = 0$$

RIEŠENIE PRINCÍPOM VIRTUÁLNYCH PRÁC

Úprava rovnice: • všetky výrazy s a_4 preniesť na druhú stranu rovnice,

$$-m_4 g\sin\beta + M_{h3}\frac{1}{r_3} = m_4\,a_4 + m_3\,i_{T3}^2\,a_4\left(\frac{1}{r_3}\right)^2 + m_2\,i_{T2}^2\,a_4\left(\frac{R_3}{r_3(R_2+r_2)}\right)^2 + m_2\,a_4\left(\frac{R_3 R_2}{r_3(R_2+r_2)}\right)^2$$

Úprava rovnice: • a_4 vybrať pred zátvorku.

$$-m_4 g\sin\beta + M_{h3}\frac{1}{r_3} = a_4\left[m_4 + m_3\,i_{T3}^2\left(\frac{1}{r_3}\right)^2 + m_2\,i_{T2}^2\left(\frac{R_3}{r_3(R_2+r_2)}\right)^2 + m_2\left(\frac{R_3 R_2}{r_3(R_2+r_2)}\right)^2\right]$$

Úprava vzťahu pre výpočet a_4

$$a_4 = \frac{M_{h3}\dfrac{1}{r_3} - m_4 g\sin\beta}{m_4 + m_3\,i_{T3}^2\left(\dfrac{1}{r_3}\right)^2 + m_2\,i_{T2}^2\left(\dfrac{R_3}{r_3(R_2+r_2)}\right)^2 + m_2\left(\dfrac{R_3 R_2}{r_3(R_2+r_2)}\right)^2}$$

RIEŠENIE PRINCÍPOM VIRTUÁLNYCH PRÁC

5 Výpočet počtu otočení N_3 (uhlová dráha φ_3) telesa *3*

$$\alpha_3 = \frac{d\omega}{dt} = konšt.$$

$$\alpha_3 \int_0^{t_3} dt = \int_0^{\omega_3} d\omega$$

$$\alpha_3 \, t_3 = \omega_3$$

$$\omega_3 = \frac{d\varphi}{dt} = \alpha_3 \, t_3$$

$$\alpha_3 \int_0^{t_3} t_3 dt = \int_0^{\varphi_3 = 2\pi N_3} d\varphi$$

$$\alpha_3 \frac{t_3^2}{2} = 2\pi N_3$$

$$\underline{\underline{N_3 = \frac{\alpha_3 \, t_3^2}{4\pi}}}$$

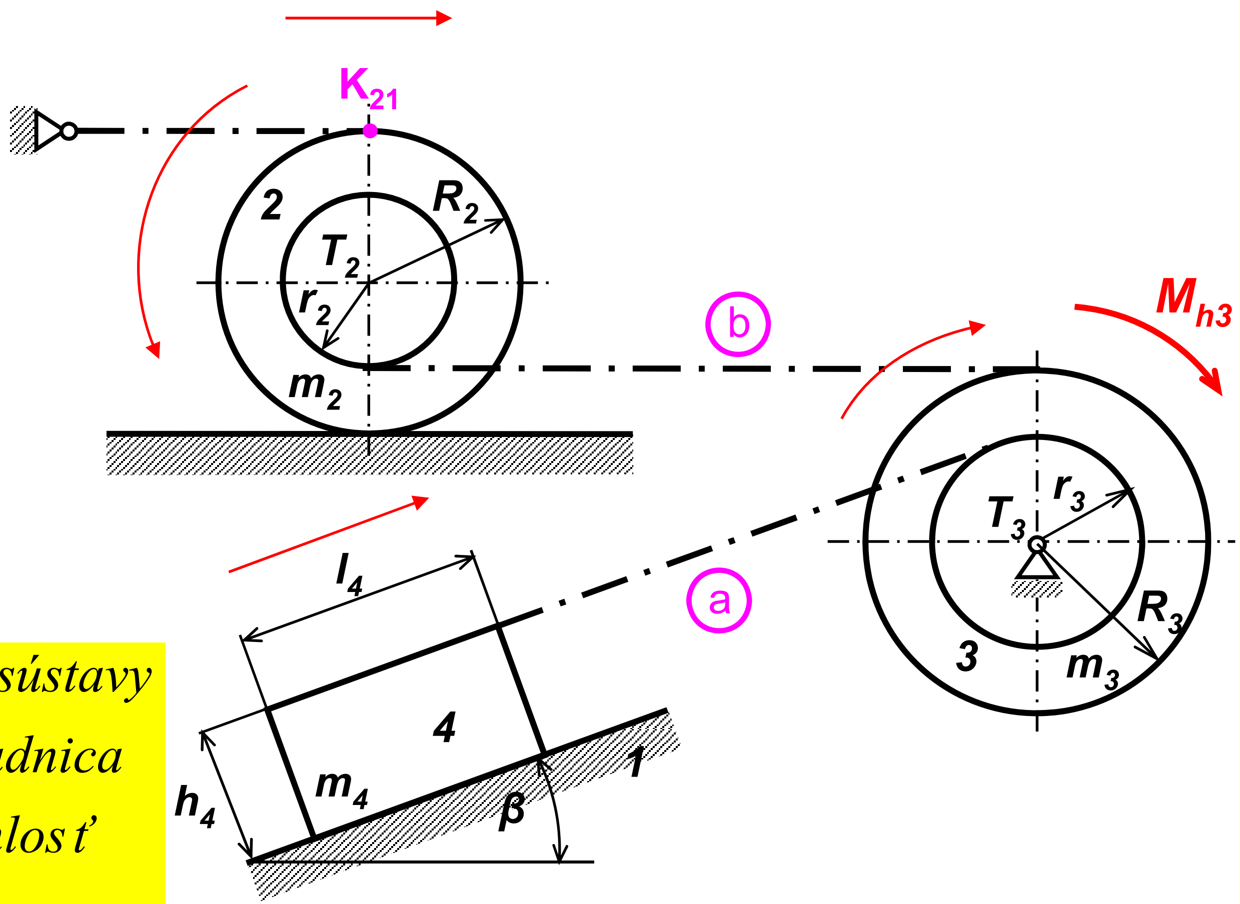
Dosadíme vzťah vyjadrujúci závislosť α_3 na zrýchlení a_4 vybraného „redukovaného“ telesa 4

$$N_3 = \frac{a_4 \frac{1}{r_3} t_3^2}{4\pi} = \underline{\underline{\frac{a_4 \, t_3^2}{4\pi r_3}}}$$

RIEŠENIE LAGRANGEOVÝMI ROVNICAMI II. DRUHU

4. Základný tvar Lagrangeovej rovnice II. druhu pre sústavu s 1° voľnosti

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial E_K}{\partial q}=Q}$$



E_K – *kinetická energia sústavy*

q – *zovšeobecnená súradnica*

$\dot{q}$ – *zovšeobecnená rýchlosť*

Q – *zovšeobecnená sila*

RIEŠENIE LAGRANGEOVÝMI ROVNICAMI II. DRUHU

5. Výpočet kinetickej energie sústavy telies

$$E_{K s\acute{u}st.} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_j \frac{1}{2} I_j \omega_j^2 + \sum_k \left(\frac{1}{2} m_k v_k^2 + \frac{1}{2} I_k \omega_k^2 \right)$$

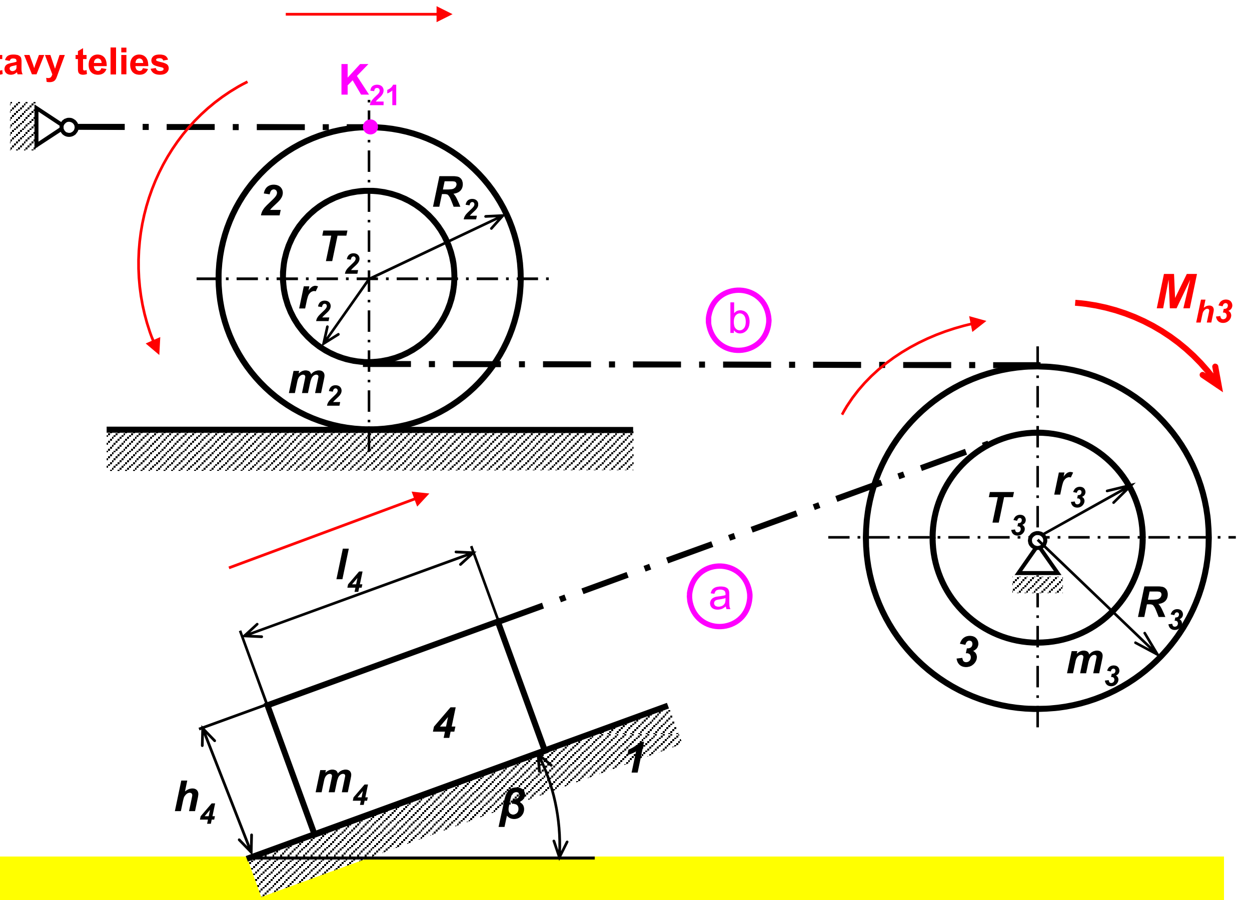
i – počet telies konajúcich posuvný pohyb

j – počet telies konajúcich rotačný pohyb

k – počet telies konajúcich všeobecný rovinný pohyb

RIEŠENIE LAGRANGEOVÝMI ROVNICAMI II. DRUHU

5. Výpočet kinetickej energie sústavy telies

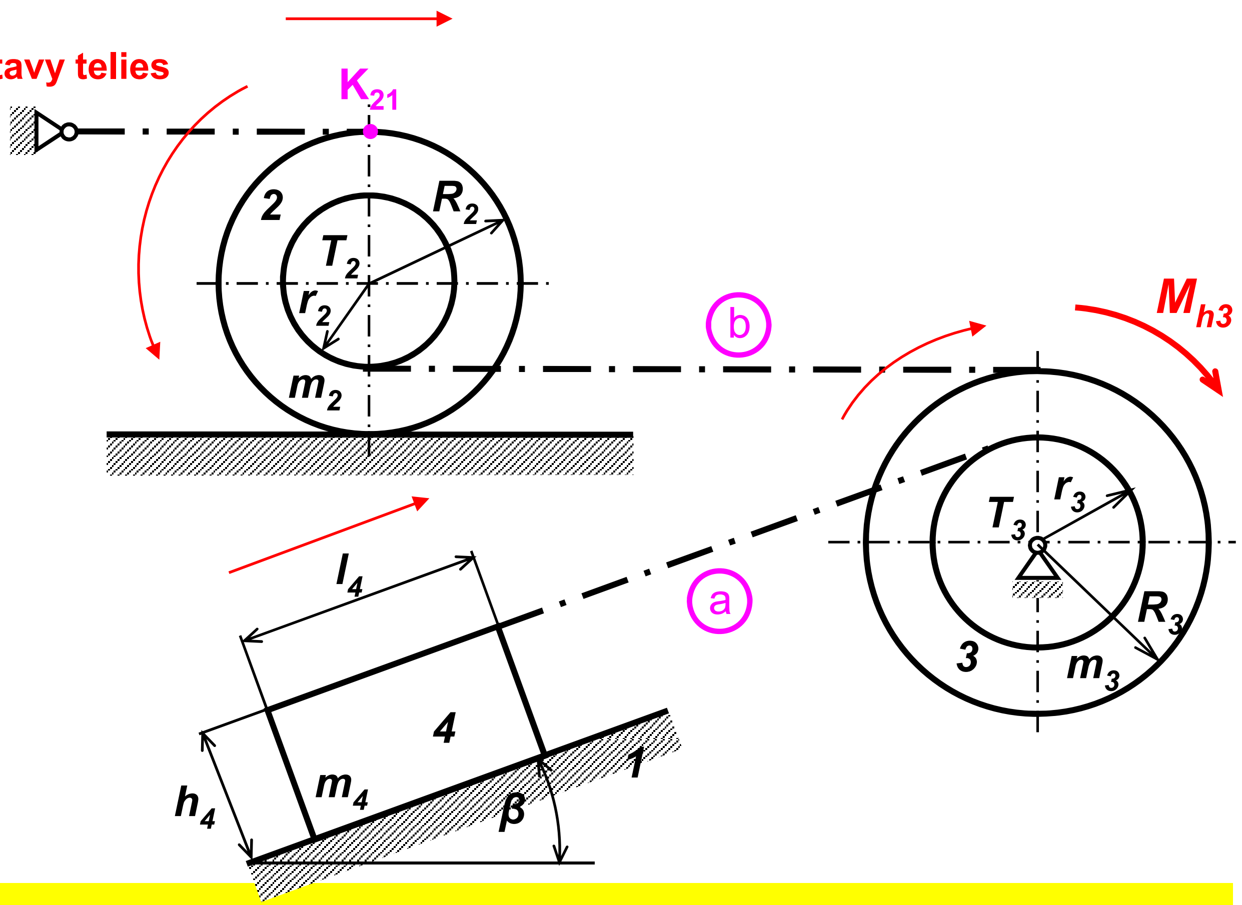


$$E_{K\,súst.} = E_{K\,2} + E_{K\,3} + E_{K\,4}$$

$$E_{Ksúst.} =$$

RIEŠENIE LAGRANGEOVÝMI ROVNICAMI II. DRUHU

5. Výpočet kinetickej energie sústavy telies



Hmotné momenty zotrvačnosti

$$I_{T2} = m_2\, i_{T2}^2$$

$$I_{T3} = m_3\, i_{T3}^2$$

$$E_{K\,súst.} = E_{K2} + E_{K3} + E_{K4}$$

$$E_{Ksúst.} = \frac{1}{2} m_2 v_{T2}^2 + \frac{1}{2} I_{T2} \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_{T3}\, \omega_3^2 + \frac{1}{2} m_4 v_4^2$$

RIEŠENIE LAGRANGEOVÝMI ROVNICAMI II. DRUHU

Do vzťahu pre $E_{ksúst}$ dosadíme závislosti okamžitých rýchlostí telies 2 a 3 na rýchlosti telesa 4 – Tabuľka

$$E_{Ksúst.} = \frac{1}{2} m_2 \left(v_4 \frac{R_3 R_2}{r_3 (R_2 + r_2)} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \, i_{T2}^2 \left(v_4 \frac{R_3}{r_3 (R_2 + r_2)} \right)^2 + \frac{1}{2} m_3 \, i_{T3}^2 \left(v_4 \frac{1}{r_3} \right)^2 + \frac{1}{2} m_4 v_4^2$$

$$E_{Ksúst.} = \frac{1}{2} v_4^2 \left[m_2 \left(\frac{R_3 R_2}{r_3 (R_2 + r_2)} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \, i_{T2}^2 \left(\frac{R_3}{r_3 (R_2 + r_2)} \right)^2 + \frac{1}{2} m_3 \, i_{T3}^2 \left(\frac{1}{r_3} \right)^2 + \frac{1}{2} m_4 \right]$$

$$E_{Ksúst.} = \frac{1}{2} v_4^2 \underbrace{\left[m_2 \left(\frac{R_3 R_2}{r_3 (R_2 + r_2)} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \, i_{T2}^2 \left(\frac{R_3}{r_3 (R_2 + r_2)} \right)^2 + \frac{1}{2} m_3 \, i_{T3}^2 \left(\frac{1}{r_3} \right)^2 + \frac{1}{2} m_4 \right]}_{K_2}$$

RIEŠENIE LAGRANGEOVÝMI ROVNICAMI II. DRUHU

Potom $E_{K\,súst.} = \frac{1}{2}\,K_2\,v_4^2$

6. Derivácie $E_{Ksúst.}$

$$\frac{\partial E_{K\,súst.}}{\partial v_4} = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}K_2 v_4^2\right)}{\partial v_4} = K_2\,v_4$$

$$\frac{d}{dt}\cdot\left(\frac{\partial E_{K\,súst.}}{\partial v_4}\right) = \frac{d\left(K_2 v_4\right)}{dt} = K_2 a_4$$

$$\frac{\partial E_{K\,súst.}}{\partial s_4} = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}K_2 v_4^2\right)}{\partial s_4} = 0$$

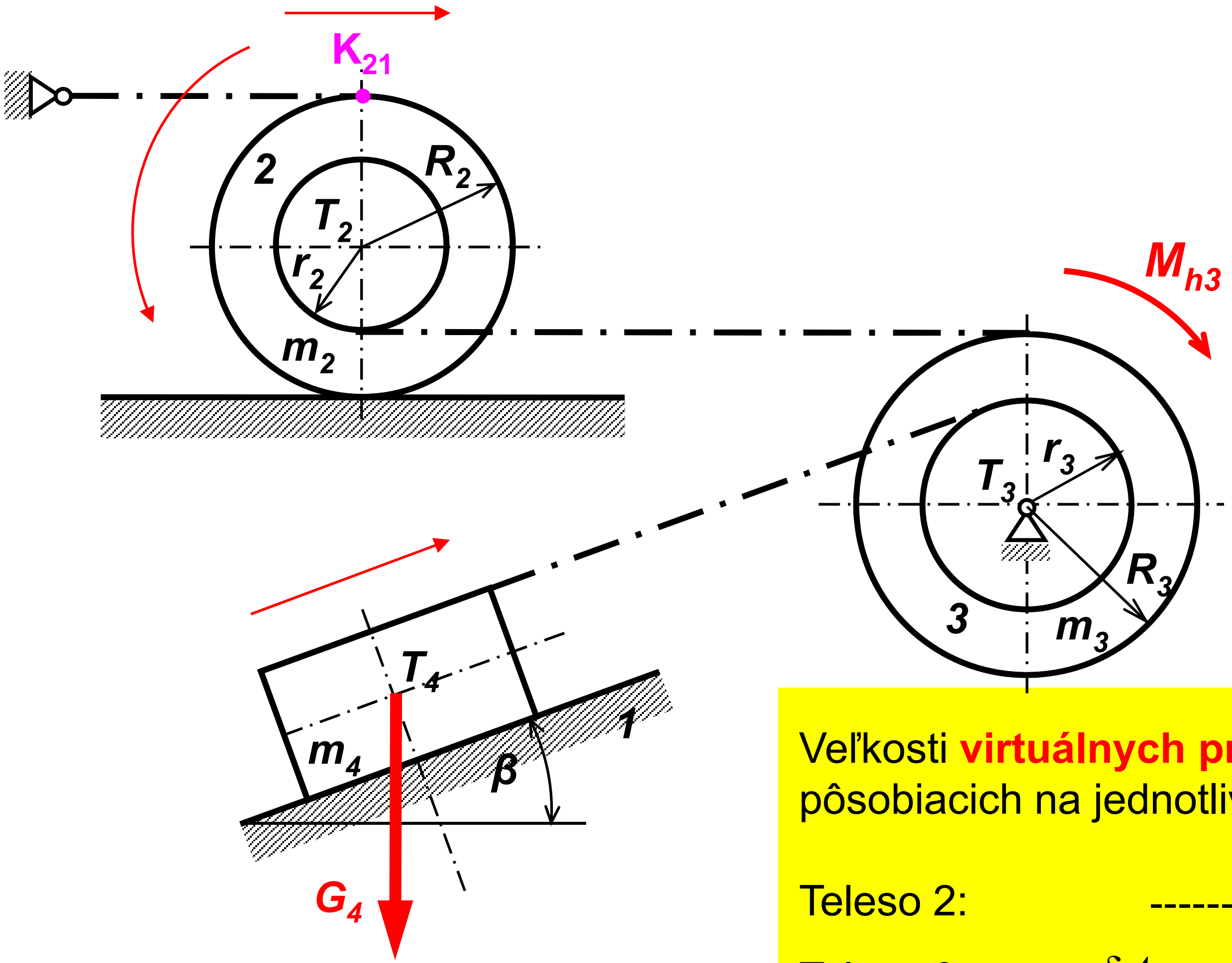
RIEŠENIE LAGRANGEOVÝMI ROVNICAMI II. DRUHU

7. Výpočet zovšeobecnenej sily, resp. momentu odvodením z virtuálnej práce pracovných síl a momentov

$$\delta A = Q\,\delta s_4 = \sum_i \left(F_i\,\delta s_i\right) + \sum_j \left(M_j\,\delta\varphi_j\right) + \sum_k \left(F_k\,\delta s_{Tk} + M_k\,\delta\varphi_k\right)$$

RIEŠENIE LAGRANGEOVÝMI ROVNICAMI II. DRUHU

Výpočet **zovšeobecneného momentu** odvodením z virtuálnej práce pracovných síl a momentov



Veľkosti **virtuálnych prác pracovných síl a momentov** pôsobiacich na jednotlivé telesá sústavy:

Teleso 2: -------------

Teleso 3: $\delta A_3 = + M_{h3}\, \delta\varphi_3$

Teleso 4: $\delta A_4 = - G_4 \sin\beta\, \delta s_4$

RIEŠENIE LAGRANGEOVÝMI ROVNICAMI II. DRUHU

7. Výpočet **zovšeobecneného momentu** odvodením z virtuálnej práce pracovných síl a momentov

$$Q\,\delta s_4 = +\,M_{h3}\,\delta\varphi_3 - G_4 \sin\beta\,\delta s_4$$

Dosadíme závislosti virtuálnych posunutí, resp. pootočení telies 2,3 na virtuálnom posunutí telesa 4 – Tabuľka

$$Q\,\delta s_4 = +\,M_{h3}\,\delta s_4 \frac{1}{r_3} - G_4 \sin\beta\,\delta s_4$$

$$Q = \underbrace{+\,M_{h3}\,\frac{1}{r_3} - G_4 \sin\beta}_{K_1}$$

RIEŠENIE LAGRANGEOVÝMI ROVNICAMI II. DRUHU

8. Pohybová rovnica „redukovaného telesa 4", resp. sústavy telies

$$K_2\, a_4 - 0 = K_1; \qquad resp. \qquad K_1 = K_2\, a_4 \qquad (11)$$

9. Určenie zrýchlenia a_4 telesa 4

$$a_4 = \frac{M_{h3}\dfrac{1}{r_3} - m_4 g \sin\beta}{m_4 + m_3\, i_{T3}^2\left(\dfrac{1}{r_3}\right)^2 + m_2\, i_{T2}^2\left(\dfrac{R_3}{r_3(R_2 + r_2)}\right)^2 + m_2\left(\dfrac{R_3 R_2}{r_3(R_2 + r_2)}\right)^2}$$

RIEŠENIE LAGRANGEOVÝMI ROVNICAMI II. DRUHU

10. Výpočet počtu otočení N_3 (uhlová dráha φ_3) telesa *3*

$$\alpha_3 = \frac{d\omega}{dt} = konšt.$$

$$\alpha_3 \int_0^{t_3} dt = \int_0^{\omega_3} d\omega$$

$$\alpha_3 t_3 = \omega_3$$

$$\omega_3 = \frac{d\varphi}{dt} = \alpha_3 t_3$$

$$\alpha_3 \int_0^{t_3} t_3 dt = \int_0^{\varphi_3 = 2\pi N_3} d\varphi$$

$$\alpha_3 \frac{t_3^2}{2} = 2\pi N_3$$

$$\underline{\underline{N_3 = \frac{\alpha_3 t_3^2}{4\pi}}}$$

Dosadíme vzťah vyjadrujúci závislosť α_3 na zrýchlení a_4 vybraného „redukovaného“ telesa 4

$$N_3 = \frac{a_4 \dfrac{1}{r_3} t_3^2}{4\pi} = \underline{\underline{\frac{a_4 t_3^2}{4\pi r_3}}}$$