PaP – blok č.3: 27.03.2020 (Externé štúdium)

Jednoduché krútenie, staticky určité úlohy: B1-B6

Poskytujem Vám podklady k výpočtu staticky určitých úloh pri jednoduchom krútení a príkladov B1-B6. V učebnici pozrite kapitolu 4.2 alebo nasledujúce príklady, ktoré sú z kapitoly 4.2, ale tu som pridala rozsiahlejší komentár.

Držte sa!

doc. Ing. Z. Murčinková, PhD.

27.03.2020.

4.2 Postup pri výpočte staticky určitých konštrukcií namáhaných jednoduchým krútením

Pri staticky určitých úlohách pri jednoduchom krútení zachovávame nasledujúci postup:

1. Podľa počtu nespojitosti prierezu a zaťaženia hriadeľa si zvolíme príslušný počet myslených rezov.
2. Do myslených rezov vložíme výslednice vnútorných síl, t.j. krútiace momenty $T(x_i)$ v kladnom smere podľa znamienkovej dohody.
3. Zo statických podmienok rovnováhy odrezanej časti hriadeľa určíme krútiace momenty $T(x_i)$ v jednotlivých myslených rezoch.
4. Vypočítame šmykové napätia $\tau(x_i)$ v krajných vláknach prierezu (na povrchu hriadeľa) v príslušných rezoch.

   $$\tau_{\max} = \frac{T}{I_P} r = \frac{T}{W_P}$$

   kde T je krútiaci moment (vnútorná sila), N.m, I_P je polárny kvadratický moment, m^4, r je polomer hriadeľa, m, W_P je modul prierezu v krútení, m^3.
5. Vypočítame uhly pootočenia $\varphi(x_i)$ jednotlivých prierezov.

   Ak $\frac{T}{G.I_P}$=konšt., potom uhly pootočenia počítame podľa:

   $$\varphi = \frac{T.l}{G.I_P}$$

   Ak $\frac{T}{G.I_P} \neq$ konšt.(napr. na úsekoch so spojitým krútiacim momentom, pri kužeľových hriadeľoch), potom uhly pootočenia počítame podľa:

   $$\varphi = \int_{(l)} \frac{T}{G.I_P} dx$$

kde l je dĺžka hriadeľa, resp. dĺžka rezu, m, G je modul pružnosti v šmyku, Pa.

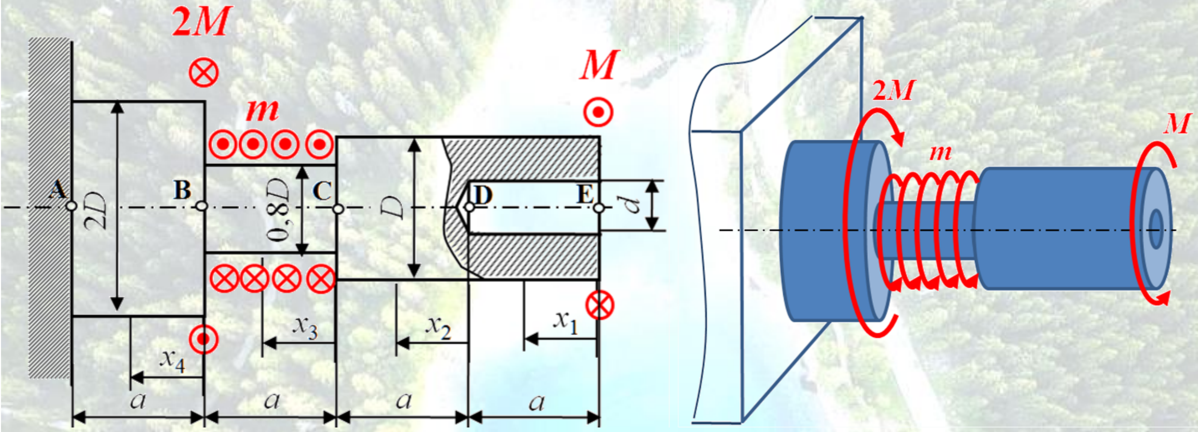
6. Vykreslíme priebehy „T“, „ τ“ a „ φ“ po celej dĺžke hriadeľa.

Príklad 4.1

Pre staticky určitý hriadeľ kruhového a medzikruhového prierezu s danými priemermi D, d zaťažený krútiacim momentom M, spojitým krútiacim momentom m podľa obr. 4.5. Určte priebeh krútiacich momentov „T“, šmykových napätí v krajných vláknach prierezov „τ“ a uhlov pootočenia jednotlivých prierezov „φ“. Daný je dĺžkový rozmer a a modul pružnosti v šmyku G.

D: M=2kNm, m=600Nm.m^{-1}, a=800mm, D=70mm, d=30mm, G=8.10^{4}MPa

H: „T“, „τ“, „φ“

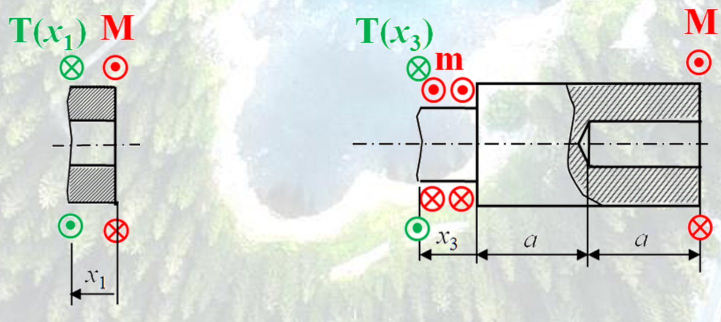


a) b)

Obr. 4.5

Na obr. 4.5a je hriadeľ zaťažený krútiacimi momentami zobrazený v rovine, na obr.4.5b je axonometrické zobrazenie. Zobrazenie ⊙ predstavuje „začiatok“ šípky, bodka – špic šípky, zobrazenie ⊗ predstavuje „koniec“ šípky.

Metódou mysleného rezu určíme vnútorné krútiace momenty na jednotlivých úsekoch. Obr. 4.6 znázorňuje rez x_1 a x_3. $T(x_1)$ a $T(x_3)$ sú kladne orientované vnútorné krútiace momenty pri rezoch sprava. Rez x_2 sme urobili len kvôli zmene priečneho prierezu (bez diery), veľkosť krútiaceho momentu v reze x_2 je rovnaká ako v reze x_1.



rez x_1 rez x_3

Obr. 4.6

Podmienky rovnováhy pre krútiace momenty T v myslenými rezmi oddelených častiach hriadeľa:

$T(x_1) = M = 2\,\mathrm{kNm}$

$T(x_1) = T(x_2) = M = 2\,\mathrm{kNm}$

$T(x_3) = M + m.x_3$

$$T(x_3 = 0) = M = 2\,\mathrm{kNm}$$

$$T(x_3 = a) = M + m.a = 2\,\mathrm{kNm} + 0{,}6\,\mathrm{kNm}.0{,}8\,\mathrm{m} = 2{,}48\,\mathrm{kNm}$$

$T(x_4) = M + m.a - 2M = -M + m.a = -2\,\mathrm{kNm} + 0{,}6\,\mathrm{kNm}.0{,}8\,\mathrm{m} = -1{,}52\,\mathrm{kNm}$

m je spojitý krútiaci moment, teda krútiaci moment pôsobiaci na určitej dĺžke. *m* musíme vynásobiť jeho dĺžkou, a to buď *m* krát *x* alebo *m* krát jeho celková dĺžka (tu *a*), podľa umiestnenia rezu.

Aby sme mohli vypočítať šmykové napätia τ a zároveň uhly pootočenia φ, potrebujeme vypočítať polárne kvadratické momenty I_p, ktoré sú vo vzťahoch pre τ aj φ.
V reze x_1 je diera, ide o medzikruhový prierez, preto použijeme vzťah:

$$I_{\mathrm{p}1} = \frac{\pi.(D^4 - d^4)}{32} = \frac{\pi.(0{,}07^4 - 0{,}03^4)\mathrm{m}^4}{32} = 22{,}77.10^{-7}\,\mathrm{m}^4$$

V rezoch x_2, x_3, x_4 má hriadeľ kruhový prierez, preto použijeme vzťah:

$$I_{\mathrm{p}2} = \frac{\pi.D^4}{32} = \frac{\pi.0{,}07^4\,\mathrm{m}^4}{32} = 23{,}57.10^{-7}\,\mathrm{m}^4$$

$$I_{\mathrm{p}3} = \frac{\pi.(0{,}8D)^4}{32} = \frac{\pi.(0{,}8.0{,}07)^4\,\mathrm{m}^4}{32} = 9{,}65.10^{-7}\,\mathrm{m}^4$$

$$I_{\mathrm{p}4} = \frac{\pi.(2D)^4}{32} = \frac{\pi.(2.0{,}07)^4\,\mathrm{m}^4}{32} = 377{,}14.10^{-7}\,\mathrm{m}^4$$

Výpočet šmykových napätí v krajných vláknach (maximálnych šmykových napätí – pozri teóriu, a to priebeh šmykového napätia v priečnom reze – maximálne šmykové napätia sú v krajných vláknach prierezu, t.j. na povrchu hriadeľa):

$$\tau(x_1) = \frac{T(x_1)}{I_{\mathrm{p}1}}.\frac{D}{2} = \frac{2.10^3\,\mathrm{Nm}}{22{,}77.10^{-7}\,\mathrm{m}^4}.\frac{0{,}07\,\mathrm{m}}{2} = 30\ 742\ 205\,\mathrm{Pa} = +30{,}7\,\mathrm{MPa}$$

$$\tau(x_2) = \frac{T(x_2)}{I_{\mathrm{p}2}}.\frac{D}{2} = \frac{2.10^3\,\mathrm{Nm}}{23{,}57.10^{-7}\,\mathrm{m}^4}.\frac{0{,}07\,\mathrm{m}}{2} = +29{,}7\,\mathrm{MPa}$$

$$\tau(x_3 = 0) = \frac{T(x_3 = 0)}{I_{\mathrm{p}3}}.\frac{0{,}8D}{2} = \frac{2.10^3\,\mathrm{Nm}}{9{,}65.10^{-7}\,\mathrm{m}^4}.\frac{0{,}8.0{,}07\,\mathrm{m}}{2} = +58\,\mathrm{MPa}$$

$$\tau(x_3 = a) = \frac{T(x_3 = a)}{I_{\mathrm{p}3}}.\frac{0{,}8D}{2} = \frac{2{,}48.10^3\,\mathrm{Nm}}{9{,}65.10^{-7}\,\mathrm{m}^4}.\frac{0{,}8.0{,}07\,\mathrm{m}}{2} = +72\,\mathrm{MPa}$$

$$\tau(x_4) = \frac{T(x_4)}{I_{\mathrm{p}4}}.D = \frac{-1{,}52.10^3\,\mathrm{Nm}}{377{,}14.10^{-7}\,\mathrm{m}^4}.0{,}07\,\mathrm{m} = -2{,}8\,\mathrm{MPa}$$

Výpočet uhlov pootočenia:

$\varphi_\mathrm{A} = 0$ (prierez prechádzajúci bodom A je votknutý)

$$\varphi_{\mathrm{B}} = \varphi_{\mathrm{A}} + \varphi_{\mathrm{AB}} = \varphi_{\mathrm{A}} + \frac{T(x_4).a}{G.I_{\mathrm{P}4}} = 0 - \frac{1{,}52.10^3\ \mathrm{Nm}.0{,}8\ \mathrm{m}}{8.10^{10}\ \mathrm{Pa}.377{,}14.10^{-7}\ \mathrm{m}^4} = -0{,}4.10^{-3}\ \mathrm{rad} = -0{,}023°$$

Keďže na úseku x_3 je spojitý krútiaci moment, $T(x_3)$ nie je konštantné po dĺžke rezu, potom:

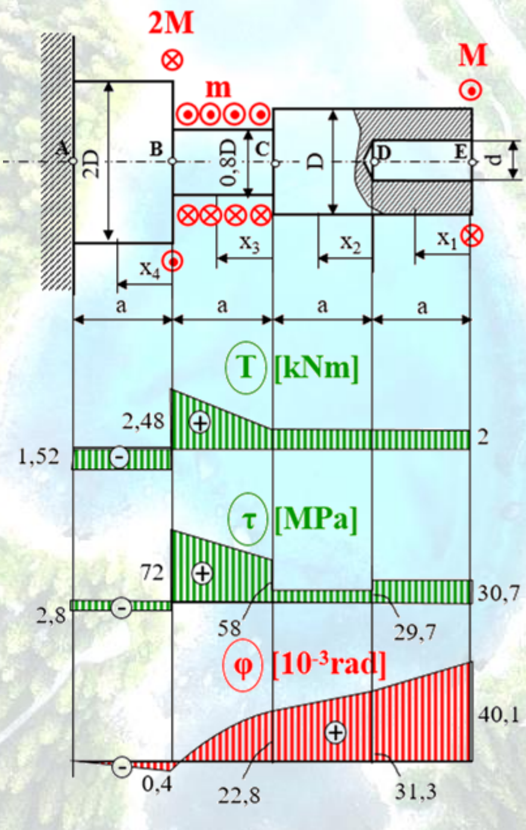
$$\varphi_{\mathrm{C}} = \varphi_{\mathrm{B}} + \varphi_{\mathrm{BC}} = \varphi_{\mathrm{B}} + \int_0^a \frac{T(x_3)}{G.I_{\mathrm{P}3}} dx_3 = \varphi_{\mathrm{B}} + \frac{1}{G.I_{\mathrm{P}3}} \int_0^a (M + m.x_3) dx_3 = \varphi_{\mathrm{B}} + \frac{1}{G.I_{\mathrm{P}3}} \left(Ma + \frac{ma^2}{2} \right) =$$

$$= -0{,}4.10^{-3}\ \mathrm{rad} + \frac{0{,}8\ \mathrm{m}}{8.10^{10}\ \mathrm{Pa}.9{,}65.10^{-7}\ \mathrm{m}^4} \left(2.10^3\ \mathrm{Nm} + \frac{600\ \mathrm{Nm.m^{-1}}.0{,}8\ \mathrm{m}}{2} \right) = +22{,}8.10^{-3}\ \mathrm{rad} = +1{,}302°$$

$$\varphi_{\mathrm{D}} = \varphi_{\mathrm{C}} + \varphi_{\mathrm{CD}} = \varphi_{\mathrm{C}} + \frac{T(x_2).a}{G.I_{\mathrm{P}2}} = 22{,}8.10^{-3}\ \mathrm{rad} + \frac{2.10^3\ \mathrm{Nm}.0{,}8\ \mathrm{m}}{8.10^{10}\ \mathrm{Pa}.23{,}57.10^{-7}\ \mathrm{m}^4} = 31{,}28.10^{-3}\ \mathrm{rad} = +1{,}792°$$

$$\varphi_{\mathrm{E}} = \varphi_D + \varphi_{\mathrm{DE}} = \varphi_D + \frac{T(x_1).a}{G.I_{\mathrm{P}1}} = 31{,}28.10^{-3}\ \mathrm{rad} + \frac{2.10^3\ \mathrm{Nm}.0{,}8\ \mathrm{m}}{8.10^{10}\ \mathrm{Pa}.22{,}77.10^{-7}\ \mathrm{m}^4} = 40{,}06.10^{-3}\ \mathrm{rad} = +2{,}295°$$

Vypočítané výsledky sú graficky zobrazené na obr. 4.7. Na úseku so spojitým krútiacim momentom *m* musí byť „šikmá čiara“ v priebehoch „*T*“ a „*τ*“, priebeh „*φ*“ je kvadratický.



Obr. 4.7

Poznámka 1: Ak porovnáme šmykové napätia $\tau(x_1)$ a $\tau(x_2)$, teda úsek s dierou a bez diery, potom možno povedať, že pomer plochy A_d s priemerom *d* a plochy A_D s priemerom D je A_d/A_D =0,184, pomer d/D=0,429, ale čo je dôležité, že pomer napätí $\tau(x_1)/\tau(x_2) = 0{,}967$. Úsek x_1 a x_2 majú rovnakú dĺžku, teda hmotnosť úseku x_1 je až o 18,4% menšia, pričom šmykové napätie $\tau(x_1)$ je len o 3,3% menšie ako $\tau(x_2)$.

Poznámka 2: Ak by sme mali vypočítať len šmykové napätia (bez uhlov pootočenia), potom je jednoduchšie vypočítať maximálne šmykové napätia v jednotlivých rezoch pomocou modulu prierezu v krútení W_p:

V reze x_1 je diera, ide o medzikruhový prierez, preto použijeme vzťah pre modul prierezu v krútení:

$$W_{p1}=\frac{\pi.\left(D^4-d^4\right)}{16D}=\frac{\pi.\left(0{,}07^4-0{,}03^4\right)\mathrm{m}^4}{16.0{,}07\mathrm{m}}=6{,}507.10^{-5}\,\mathrm{m}^3$$

V rezoch x_2, x_3, x_4 má hriadeľ kruhový prierez, preto použijeme vzťah pre modul prierezu v krútení:

$$W_{p2}=\frac{\pi.D^3}{16}=\frac{\pi.0{,}07^3\,\mathrm{m}^3}{16}=6{,}735.10^{-5}\,\mathrm{m}^3$$

$$W_{p3}=\frac{\pi.(0{,}8D)^3}{16}=\frac{\pi.(0{,}8.0{,}07)^3\,\mathrm{m}^3}{16}=3{,}448.10^{-5}\,\mathrm{m}^3$$

$$W_{p4}=\frac{\pi.(2D)^3}{16}=\frac{\pi.(2.0{,}07)^3\,\mathrm{m}^3}{16}=53{,}878.10^{-5}\,\mathrm{m}^3$$

Potom výpočet šmykových napätí v krajných vláknach:

$$\tau(x_1)=\frac{T(x_1)}{W_{p1}}=\frac{2.10^3\,\mathrm{Nm}}{6{,}507.10^{-5}\,\mathrm{m}^3}=+30{,}7\,\mathrm{MPa}$$

$$\tau(x_2)=\frac{T(x_2)}{W_{p2}}=\frac{2.10^3\,\mathrm{Nm}}{6{,}735.10^{-5}\,\mathrm{m}^3}=+29{,}7\,\mathrm{MPa}$$

$$\tau(x_3=0)=\frac{T(x_3=0)}{W_{p3}}=\frac{2.10^3\,\mathrm{Nm}}{3{,}448.10^{-5}\,\mathrm{m}^3}=+58\,\mathrm{MPa}$$

$$\tau(x_3=a)=\frac{T(x_3=a)}{W_{p3}}=\frac{2{,}48.10^3\,\mathrm{Nm}}{3{,}448.10^{-5}\,\mathrm{m}^3}=+72\,\mathrm{MPa}$$

$$\tau(x_4)=\frac{T(x_4)}{W_{p4}}=\frac{-1{,}52.10^3\,\mathrm{Nm}}{53{,}878.10^{-5}\,\mathrm{m}^3}=-2{,}8\,\mathrm{MPa}$$

Poznámka 3: Ak by sme dosadzovali výpočet modulov prierezu v krútení W_p v milimetroch, napríklad:

$$W_{p2}=\frac{\pi.D^3}{16}=\frac{\pi.70^3\,\mathrm{mm}^3}{16}=67\,348\,\mathrm{mm}^3$$

Potom výsledok dostávame priamo v mega-pascaloch:

$$\tau(x_2)=\frac{T(x_2)}{W_{p2}}=\frac{2.10^6\,\mathrm{N\,mm}}{67\,348\,\mathrm{mm}^3}=+29{,}7\,\mathrm{MPa}$$

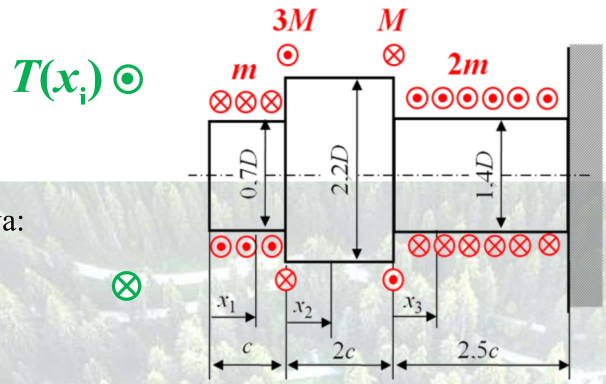
Príklad 4.2

Pre staticky určitý hriadeľ kruhového prierezu s daným priemerom D, dĺžkovým rozmerom c, zaťažený krútiacimi momentmi M a spojitými krútiacimi momentmi m podľa obr. 4.8 určte priebeh krútiacich momentov „T“ a vypočítajte šmykové napätie v krajnom vlákne vo votknutí.

D: M=2kNm, m=1kNm.m^{-1}, c=1m, D=90mm

H: „T“, $\tau_{max}^{votknutie}$

Kladná orientácia
$T(x_i)$ pri reze zľava:



Obr. 4.8

Výpočet krútiacich momentov:

$$T(x_1) = m.x_1$$

$$T(x_1 = 0) = 0$$

$$T(x_1 = c) = m.c = 1\,\text{kNm.m}^{-1}.1\,\text{m} = 1\,\text{kNm}$$

$$T(x_2) = m.c - 3.M = 1\,\text{kNm.m}^{-1}.1\,\text{m} - 3.2\,\text{kNm} = -5\,\text{kNm}$$

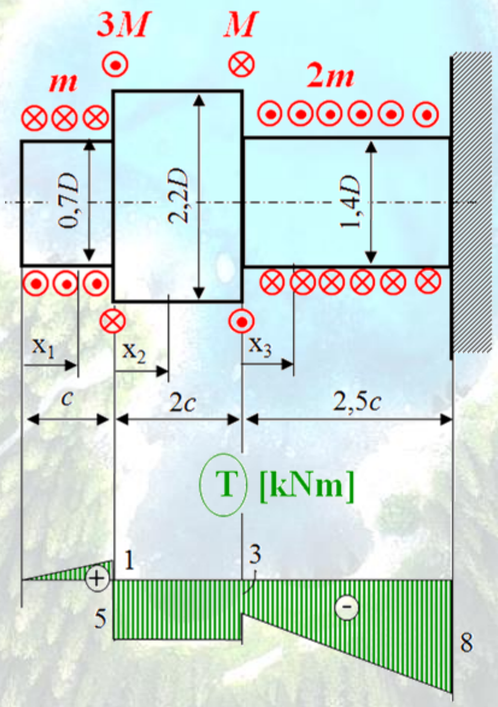
$$T(x_3) = m.c - 3.M + M - 2.m.x_3 = m.c - 2.M - 2.m.x_3$$

$$T(x_3 = 0) = m.c - 2M = 1\,\text{kNm.m}^{-1}.1\,\text{m} - 2.2\,\text{kNm} = -3\,\text{kNm}$$

$$T(x_3 = 2{,}5c) = m.c - 2M - 2.m.2{,}5c = m.c - 2M - 5m.c = -4.m.c - 2M =$$

$$= -4.1\,\text{kNm.m}^{-1}.1\,\text{m} - 2.2\,\text{kNm} = -8\,\text{kNm}$$

Priebeh krútiacich momentov T je vykreslený na obr. 4.9.



Obr. 4.9

Modul prierezu v krútení:

$$W_p = \frac{\pi.d^3}{16} = \frac{\pi.(1{,}4D)^3}{16} = \frac{\pi.(1{,}4.90\,\text{mm})^3}{16} = 392\,773\,\text{mm}^3$$

Šmykové napätie v krajnom vlákne vo votknutí:

$$\tau_{\max}^{votknutie} = \frac{T^{votknutie}}{W_{\mathrm{P}}} = \frac{T(x_3 = 2{,}5c)}{W_{\mathrm{P}}} = -\frac{8.10^6\ \mathrm{Nmm}}{392\ 773\mathrm{mm}^3} = -20{,}4\,\mathrm{MPa}$$