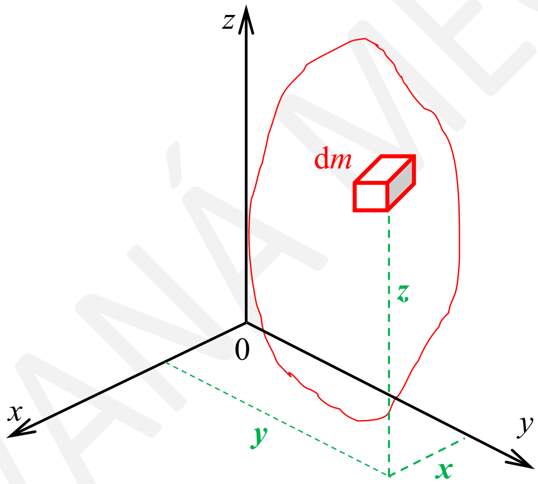
2 GEOMETRIA HMÔT

Tuhé teleso je sústava hmotných bodov, ktorých vzájomná poloha sa pri ľubovoľnom pohybe telesa nemení. Pri riešení pohybu telesa je preto možné použiť závery z dynamiky sústavy hmotných bodov. Pri skúmaní pohybu tuhého telesa potrebujeme poznať aj jeho rozmery, tvar a rozloženie hmoty v priestore a vhodne toto rozloženie charakterizovať. Rozloženie hmoty v telese charakterizujú *momenty zotrvačnosti* a *deviačné mome*nty. Ich rozmer je (kg.m^2).

2.1 MOMENTY ZOTRVAČNOSTI

Moment zotrvačnosti je možné chápať ako „mieru zotrvačnosti" telesa. Vo všeobecnosti rozlišujeme momenty zotrvačnosti telesa k osi, k rovine a k bodu. Nazývame ich osový, rovinný, resp. polárny moment zotrvačnosti. Momenty zotrvačnosti telesa predstavujú hmotnostné momenty 2. stupňa, pričom ich definujeme ako súčin hmotnosti telesa a štvorca jeho vzdialenosti od osi, roviny, bodu.

Nech je dané teleso, ktorého polohu vyjadríme v pravouhlej pravotočivej súradnicovej sústave 0*(x, y, z)* (*obr. 2.1*).



Obr. 2.1

Moment zotrvačnosti k osi je definovaný ako súčin hmotnosti a druhej mocniny vzdialenosti od príslušnej osi.

Ak teleso rozdelíme na hmotné elementy s hmotnosťou d*m*, potom moment zotrvačnosti hmotného elementu d*m* k osi *x* je

$$\mathrm{d}I_x = \mathrm{d}m(y^2 + z^2) \tag{2.1}$$

Výsledný moment zotrvačnosti telesa k osi *x* dostaneme sčítaním momentov zotrvačnosti jednotlivých hmotných elementov k osi *x*, čo vzhľadom na spojité rozloženie hmotnosti v telese vyjadrujeme integrovaním (2.1).

$$I_x = \int_m \mathrm{d}m(y^2 + z^2) \tag{2.2}$$

Podobne môžeme vyjadriť momenty zotrvačnosti k osiam *y* a *z*:

$$I_y = \int_m \mathrm{d}m (x^2 + z^2) \tag{2.3}$$

$$I_z = \int_m \mathrm{d}m (x^2 + y^2) \tag{2.4}$$

Moment zotrvačnosti k rovine je definovaný ako súčin hmotnosti a druhej mocniny vzdialenosti od príslušnej roviny.

Podobným postupom ako v predchádzajúcom prípade dostaneme výsledné momenty zotrvačnosti telesa k rovinám *(x, y)*; *(x, z)* a *(y, z)*:

$$I_{xy} = \int_m \mathrm{d}m\, z^2 \tag{2.5}$$

$$I_{xz} = \int_m \mathrm{d}m\, y^2 \tag{2.6}$$

$$I_{yz} = \int_m \mathrm{d}m\, x^2 \tag{2.7}$$

Polárny moment zotrvačnosti je definovaný ako súčin hmotnosti a druhej mocniny vzdialenosti od začiatku súradnicového systému 0.

Podobne ako v predchádzajúcich prípadoch je polárny moment zotrvačnosti telesa:

$$I_P = \int_m \mathrm{d}m (x^2 + y^2 + z^2) \tag{2.8}$$

V súvislosti s osovými momentmi zotrvačnosti zavádzame pojem *polomer zotrvačnosti „i“*. Každý moment zotrvačnosti telesa môžeme vyjadriť ako súčin hmotnosti telesa a druhej mocniny polomeru zotrvačnosti.

Polomer zotrvačnosti je vzdialenosť, kde sústredená hmotnosť telesa má rovnaký hmotný moment zotrvačnosti ako hmotný moment zotrvačnosti telesa.

Jednotlivé momenty zotrvačnosti môžeme vyjadriť takto:

- momenty zotrvačnosti k osiam:

  $$I_x = m\, i_x^2; \qquad I_y = m\, i_y^2; \qquad I_z = m\, i_z^2;$$

- momenty zotrvačnosti k rovinám:

  $$I_{xy} = m\, i_{xy}^2; \qquad I_{xz} = m\, i_{xz}^2; \qquad I_{yz} = m\, i_{yz}^2$$

- polárny moment zotrvačnosti telesa:

  $$I_P = m\, i_P^2$$

📖 *Poznámka*: Z fyzikálneho hľadiska vyjadruje moment zotrvačnosti k osi odpor telesa proti zmene jeho uhlovej rýchlosti.

2.2 DEVIAČNÉ MOMENTY

Deviačný moment telesa je definovaný ako súčin hmotnosti a súradníc v príslušnej rovine. Vyjadruje nerovnomernosť rozloženia hmotnosti telesa vzhľadom na príslušnú rovinu.

Tak ako pri výpočte momentov zotrvačnosti, teleso rozdelíme na hmotné elementy. Deviačný moment hmotného elementu dm k rovine *(x, y)* je:

$$\mathrm{d}D_{xy} = \mathrm{d}m\, x\, y \tag{2.9}$$

Potom deviačný moment telesa k rovine (x, y) je:

$$D_{xy} = \int_m \mathrm{d}m\, xy \tag{2.10}$$

Deviačné momenty k rovinám (x, z) a (y, z) sú:

$$D_{xz} = \int_m \mathrm{d}m\, xz\, ; \qquad D_{yz} = \int_m \mathrm{d}m\, yz \tag{2.11}$$

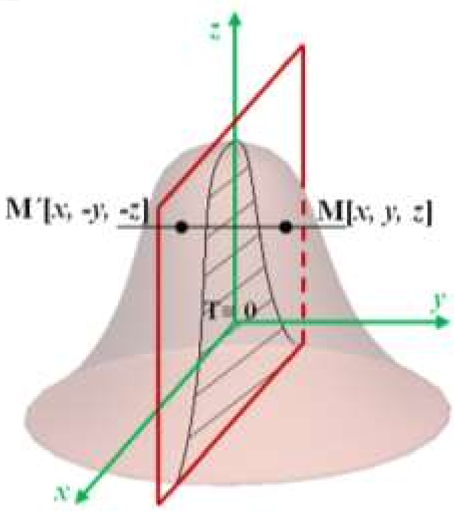
Na základe vzťahov (2.10) a (2.11) platí:

$$D_{xy} = D_{yx}\, ; \quad D_{xz} = D_{zx}\, ; \quad D_{yz} = D_{zy} \tag{2.12}$$

Ak sú deviačné momenty k osiam *x, y, z* nulové, potom osi *x, y, z* sú hlavné osi zotrvačnosti a momenty zotrvačnosti k nim sú hlavné momenty zotrvačnosti.

Ak hlavné osi prechádzajú ťažiskom sústavy, nazývame ich hlavné centrálne osi zotrvačnosti a momenty zotrvačnosti k nim sú *hlavné centrálne momenty* zotrvač*nosti.*

Využitie **hlavných osí zotrvačnosti** podstatne uľahčuje analýzu rotačného a sférického pohybu.



Obr. 2.2 Rovina súmernosti *xz*

Z definície momentov zotrvačnosti vyplýva, že momenty zotrvačnosti k osiam, rovinám a bodu môžu byť len kladné, ale deviačné momenty zotrvačnosti môžu byť kladné, nulové a záporné.

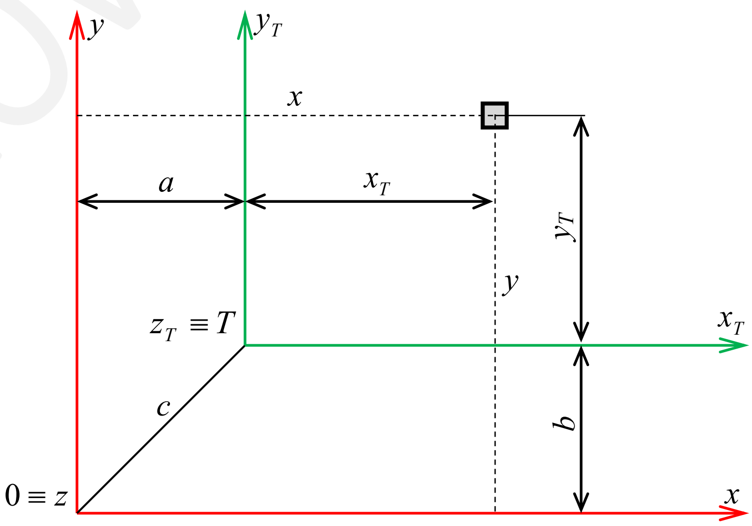
Nulové sú k hlavným osiam, ktoré môžeme pri symetrických telesách určiť takto:

- Ak má teleso jednu rovinu súmernosti (rovina xz), je každá priamka, ktorá je na ňu kolmá (os y) jednou z hlavných osí zotrvačnosti, lebo deviačný moment k tejto osi a k ľubovoľnej osi ležiacej v rovine súmernosti (os z), pričom obe osi prechádzajú tým istým bodom roviny súmernosti, je nulový. Rovina súmernosti je centrálnou rovinou. Uvedené tvrdenie vyplýva z toho, že každému bodu M s kladnou súradnicou y odpovedá bod M' s takou istou zápornou súradnicou. Potom integrály $\int_m xy\,\mathrm{d}m$ a $\int_m yz\,\mathrm{d}m$ sú nulové a os y je hlavnou osou (*obr. 2.2*).
- Ak má teleso dve (navzájom kolmé) roviny súmernosti, je ich priesečnica hlavnou centrálnou osou zotrvačnosti a zároveň osou súmernosti. Deviačné momenty zotrvačnosti k nej a k osiam ležiacim v rovinách súmernosti sú nulové. Tieto osi sú tiež hlavné osi. Veľkou skupinou telies s takýmito osami sú rotačné telesá.
- Ak má teleso tri roviny súmernosti, sú ich priesečnice hlavnými centrálnymi osami zotrvačnosti.

📖 *Poznámka:* Fyzikálny význam deviačného momentu telesa vyjadruje mieru nerovnomerného rozloženia hmoty telesa k rovine vytvorenej indexovanými osami.

2.3 MOMENTY ZOTRVAČNOSTI K ROVNOBEŽNÝM OSIAM STEINEROVA VETA

Často potrebujeme vypočítať momenty zotrvačnosti k rovnobežnej osi alebo rovine. Potom platí **Steinerova veta**, podobne ako pri výpočte kvadratického momentu prierezu.
Nech je daný moment zotrvačnosti telesa k osi z_T, ktorá prechádza ťažiskom a je potrebné určiť moment zotrvačnosti telesa k osi rovnobežnej s osou z_T (*obr. 2.3*).



Obr. 2.3

Na základe vzťahu (2.4) je:

$$I_z = \int_m \mathrm{d}m(x^2 + y^2) \tag{2.13}$$

Z *obr. 2.3* vyplýva:

$$x = a + x_T ; \qquad y = b + y_T \tag{2.14}$$

Po dosadení (2.14) do (2.13) je:

$$I_z = \int_m \mathrm{d}m\,[(a + x_T)^2 + (b + y_T)^2]$$

$$I_z = \int_m \mathrm{d}m(x_T^2 + y_T^2) + \int_m \mathrm{d}m\,(a^2 + b^2) + 2a\int_m \mathrm{d}m\, x_T + 2b\int_m \mathrm{d}m\, y_T \tag{2.15}$$

Zo statiky vieme, že výrazy $\int_m \mathrm{d}m\, x_T$, resp. $\int_m \mathrm{d}m\, y_T$ sú statické momenty k osiam, ktoré prechádzajú cez ťažisko a tieto sa rovnajú nule. Potom je:

$$\boxed{I_z = I_{z_T} + mc^2}, \tag{2.16}$$

kde

$$I_{z_T} = \int_m \mathrm{d}m(x_T^2 + y_T^2); \qquad c^2 = a^2 + b^2 .$$

Vzťah (2.16) je matematická formulácia *Steinerovej vety*: Moment zotrvačnosti k osi z, ktorá je rovnobežná s osou z_T sa rovná súčtu momentu zotrvačnosti k osi z_T a súčinu hmotnosti telesa a druhej mocniny vzdialenosti osí z a z_T.

Steinerova veta: Moment zotrvačnosti sústavy hmotných bodov k určitej osi sa rovná súčtu jeho momentu zotrvačnosti k rovnobežnej osi prechádzajúcej ťažiskom sústavy a súčinu celkovej hmotnosti sústavy so štvorcom vzdialenosti medzi rovnobežnými osami.

Podobne môžeme vyjadriť aj moment zotrvačnosti k rovnobežným rovinám:

$$I_{yz} = I_{y_T z_T} + ma^2 \tag{2.17}$$

$$I_{xz} = I_{x_T z_T} + mb^2 \tag{2.18}$$

Steinerova veta platí aj pri výpočte deviačných momentov telesa k rovnobežným rovinám. Potom na základe *obr. 2.3* je deviačný moment telesa k rovine 0(x,y) vyjadrený vzťahom (uvádzame bez odvodenia):

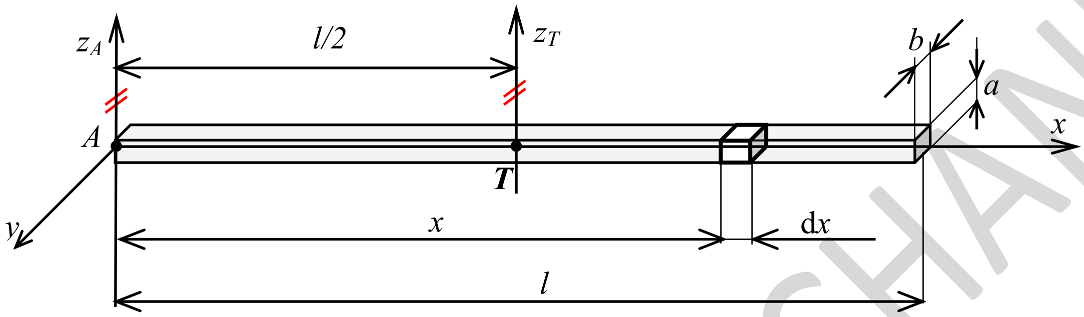
$$\boxed{D_{xy} = D_{x_T y_T} + mab} \tag{2.19}$$

MOMENT ZOTRVAČNOSTI TENKEJ HOMOGÉNNEJ TYČE

PRÍKLAD 2.1: Určte hmotný *moment zotrvačnosti tenkej homogénnej tyče* hmotnosti m, dĺžky l a rozmerov a, b (*obr. 2.4*).

a) k osi z_A prechádzajúcej jej krajným bodom A.
b) k osi z_T prechádzajúcej ťažiskom T

Dané: m, l.
Hľadané: I_{zT}, I_{zA}.



Obr. 2.4

RIEŠENIE: Rozmery prierezovej plochy tenkej tyče (a, b) sú v porovnaní s jej dĺžkou l veľmi malé. Moment zotrvačnosti pre tenkú tyč k osi z preto na základe (2.4) odvodíme zo vzťahu:

$$I_z = \int_m \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}m = \int_m x^2 \mathrm{d}m \qquad \text{(a)}$$

Vyberme hmotný element dm, ktorým je hmotnostný úsek o dĺžke dx vo vzdialenosti x od osi z_A idúcej krajným bodom A tyče.

Ak $\quad m = \rho V\,; \quad m = \rho\, a\, b\, l\,, \qquad$ (b)
potom $\quad \mathrm{d}m = \rho\, dV\,; \quad \mathrm{d}m = \rho\, a\, b\, \mathrm{d}x\,. \qquad$ (c)

Vzťah pre určenie hustoty ρ odvodíme z (b) a dosadíme do (c):

$$\rho = \frac{m}{a\,b\,l} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}m = \frac{m}{a\,b\,l}\, a\, b\, \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{d}m = \frac{m}{l}\,\mathrm{d}x} \qquad \text{(d)}$$

a) Moment zotrvačnosti tenkej homogénnej tyče k osi z_A prechádzajúcej jej krajným bodom A

$$I_{zA} = \int_m x^2 dm = \int_0^l x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{m}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l = \frac{m}{l}\frac{l^3}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_{zA} = \frac{1}{3} m\, l^2} \qquad \text{(e)}$$

b) Moment zotrvačnosti k osi z_T idúcej ťažiskom T a rovnobežnej s osou z_A určíme pomocou Steinerovej vety.

$$I_{zA} = I_{zT} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

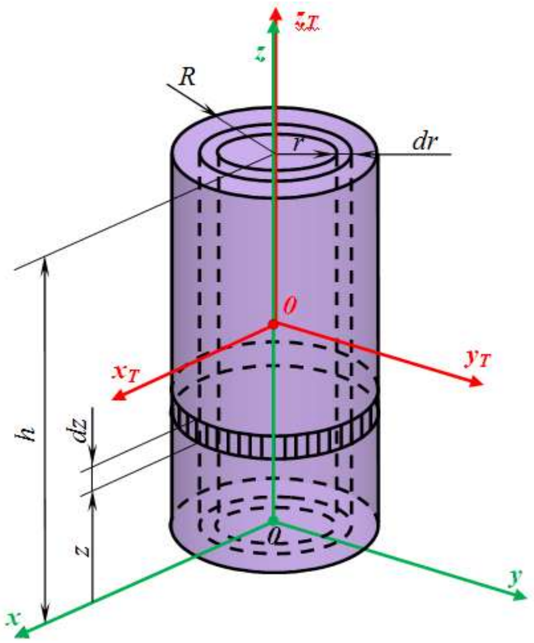
$$I_{zT} = I_{zA} - m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ml^2 - m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ml^2 - m\frac{l^2}{4} = \frac{4ml^2 - 3ml^2}{12}$$

$$\boxed{I_{zT} = \frac{1}{12} ml^2} \qquad \text{(f)}$$

MOMENT ZOTRVAČNOSTI HOMOGÉNNEHO VALCA

PRÍKLAD 2.2: Určte *moment zotrvačnosti homogénneho valca* (*obr. 2.5*) o hmotnosti m, polomere R, výške h a hustote ρ

a) k osi symetrie valca z,
b) k rovine xy.



Obr. 2.5

RIEŠENIE: Nech element $\mathrm{d}m = \rho\ \mathrm{d}V$ je vytvorený ako tenkostenný valec o hrúbke $\mathrm{d}r$ a polomere r. Potom $\mathrm{d}m = \rho\ \mathrm{d}V = \rho 2\pi r h\ \mathrm{d}r$. Moment zotrvačnosti tohto elementu k osi z je:

$$\mathrm{d}I_z = r^2\,\mathrm{d}m = \rho 2\pi h r^3\,\mathrm{d}r$$

a) Moment zotrvačnosti valca k jeho osi symetrie z

$$I_z = \int_{(m)} r^2\,\mathrm{d}m = 2\pi\rho h \int_0^R r^3\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\pi\rho h R^4 .$$

Ak $m = \rho V = \rho\pi R^2 h$, potom

$$\boxed{I_z = \frac{1}{2} m R^2}.$$

Moment zotrvačnosti valca I_z k osi rotácie z môžeme vyjadriť aj pomocou polomeru zotrvačnosti i_z:

$$I_z = m i_z^2 = \frac{1}{2} m R^2 \qquad \Rightarrow \qquad i_z = \frac{R}{\sqrt{2}} .$$

b) Moment zotrvačnosti valca k rovine *xy*

Ak chceme určiť *moment zotrvačnosti k rovine* 0*(xy),* vyberieme element d*m*, ktorý je vytvorený ako valec o polomere *R* a o výške d*z*, ktorý je od roviny 0(*xy*) vzdialený o *z*. Potom pre hmotnosť vybraného elementu platí:

$$\mathrm{d}m = \rho \,\mathrm{d}V = \rho \pi R^2 \,\mathrm{d}z\,.$$

Moment zotrvačnosti elementu d*m* k rovine 0(*xy*) bude:

$$\mathrm{d}I_{xy} = z^2 \,\mathrm{d}m = \rho \pi R^2 z^2 \,\mathrm{d}z$$

a moment zotrvačnosti celého valca k rovine 0(*xy*) je:

$$I_{xy} = \int_{(m)} z^2 \,\mathrm{d}z = \rho \pi R^2 \int_0^h z^2 \,\mathrm{d}z = \rho \pi R^2 \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} m h^2\,.$$

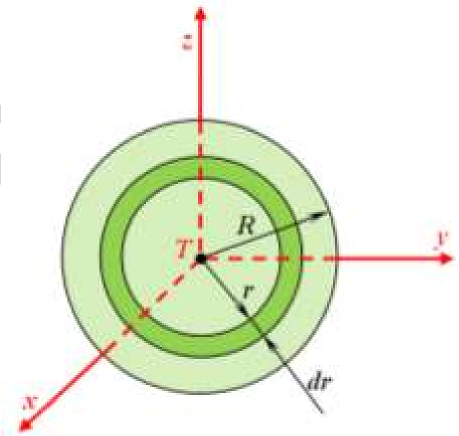
Ak $m = \rho V = \rho \pi R^2 h$, potom

$$\boxed{I_{xy} = \frac{1}{3} m h^2}.$$

MOMENT ZOTRVAČNOSTI HOMOGÉNNEJ GULE

PRÍKLAD 2.3: Pre homogénnu guľu o hmotnosti *m,* polomere *R* a hustote ρ (*obr. 2.6*) určte:

a) polárny moment zotrvačnosti k stredu gule, resp. k jej ťažisku *T*,
b) momenty zotrvačnosti k súradnicovým osiam *x*, *y*, *z*, prechádzajúcich stredom gule *T*.



Obr. 2.6

RIEŠENIE: Vyberme element d*m*, ktorý má tvar tenkostennej dutej gule o polomere *r* a hrúbke steny d*r* pre ktorý platí:

$$\mathrm{d}m = \rho 4\pi r^2 \,\mathrm{d}r\,,$$

kde

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}\,.$$

Polárny moment zotrvačnosti tohto elementu k ťažisku je:

$$\mathrm{d}I_p = r^2\,\mathrm{d}m = \rho 4\pi r^4\,\mathrm{d}r$$

a) Polárny moment zotrvačnosti homogénnej gule:

$$I_p = \int\limits_{(m)} \mathrm{d}I_p = 4\pi\rho\int\limits_0^R r^4\,\mathrm{d}r = 4\pi\rho\frac{R^5}{5}.$$

Ak $\rho = \frac{3}{4}\frac{m}{\pi R^3}$, potom $\boxed{I_p = \frac{3}{5}mR^2}$.

b) Momenty zotrvačnosti k osiam *x,y,z,* ktoré prechádzajú stredom gule (ťažisko *T*).

Pretože guľa je symetrická ku všetkým osiam, platí:

$$I_x = I_y = I_z; \qquad I_{xy} = I_{xz} = I_{yz}.$$

Na základe vzájomných vzťahov ktoré platia medzi jednotlivými momentmi zotrvačnosti môžeme povedať, že platí:

$$2I_p = 3I_x; \qquad I_p = 3I_{xy};$$

z ktorých dostávame:

$$\boxed{I_x = \frac{2}{3}I_p = \frac{2}{5}mR^2}; \qquad \boxed{I_{xy} = \frac{1}{3}I_p = \frac{1}{5}mR^2}.$$

LITERATÚRA

[1] MONKOVÁ, K.- ŠMERINGAIOVÁ, A.: *Vybrané kapitoly z dynamiky I.* Praha: Asociace RISE, 2013, 192 s. ISBN 978-80-87670-11-8

[2] MONKOVÁ, K.- ŠMERINGAIOVÁ, A.: *Vybrané kapitoly z dynamiky II.* Praha: Apeiron, 2013, 202 s. ISBN 978-80-87670-12-5

[3] PAŠKO, Ján – URAM, V. - ŠMERINGAIOVÁ, A.: *Vybrané kapitoly z Technickej mechaniky II*, Prešov: FVT TU, 2006. 95 s. ISBN 80-8073-547-6

[4] ŠMERINGAIOVÁ, A.- GAŠPÁR, Š.: *Technická mechanika II*. Návody na cvičenia. Prešov: FVT TU, 2013. 175 s. ISBN 978-80-553-1583-6