1 DYNAMIKA HMOTNÉHO BODU

1.1 RIEŠENIE ÚLOH POMOCOU POHYBOVÝCH ROVNÍC

Pohybová rovnica je matematickým zápisom fyzikálneho vzťahu medzi *zmenou pohybu* uvažovaného bodu (zmena je charakterizovaná zrýchlením bodu) a *silami*, ktoré tento pohyb ovplyvňujú. Základnú pohybovú rovnicu je možné zostaviť dvoma spôsobmi. Prvý vychádza z druhého Newtonovho zákona a druhý využíva d´Alembertov princíp.

1.1.1 Zostavenie pohybovej rovnice Newtonovým spôsobom.

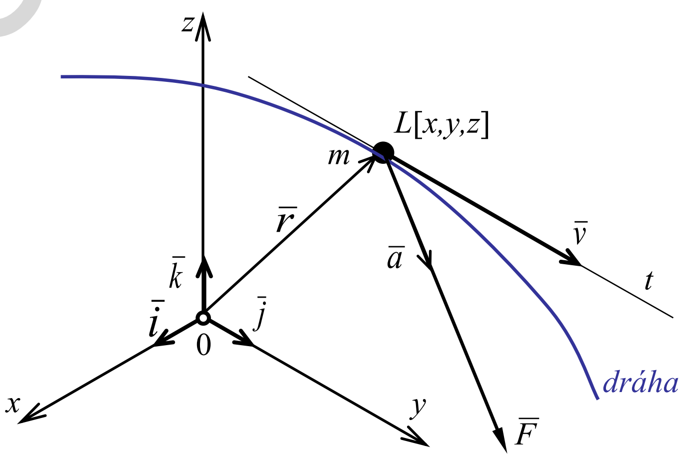
Pohybovú rovnicu zostavujeme vo všeobecnom stave (polohe) uvoľneného hmotného bodu, pričom uvažujeme všetky sily, ktoré na hmotný bod pôsobia. V prípade viazaného pohybu bodu, ktorého pohyblivosť je obmedzená kinematickými väzbami, musíme zohľadniť tiež reakcie vo väzbách.

$$m\,\bar{a} = \sum_i \bar{F}_i = \bar{F} \qquad (1.1)$$

kde $\bar{F} = \sum_i \bar{F}_i$ je výslednicou všetkých síl (akčných aj reakčných), ktoré na uvoľnený hmotný bod pôsobia. Rovnica (1.1) je *základnou rovnicou dynamiky hmotného bodu* vo vektorovom tvare. Pri konkrétnom riešení rozpíšeme *vektorovú rovnicu* (1.1) do niekoľkých *zložkových (skalárnych) rovníc*. Ich počet je daný typom silovej sústavy pôsobiacej na hmotný bod. Pri priestorovej silovej sústave sú to tri zložkové rovnice, pri rovinnej dve a pri priamkovej silovej sústave jedna skalárna rovnica.

a) Pohybová rovnica hmotného bodu v kartézskej pravouhlej súradnicovej sústave

$$\begin{aligned} m\,a_x &= F_x \\ m\,a_y &= F_y \\ m\,a_z &= F_z \end{aligned}, \qquad \text{resp.} \qquad \begin{aligned} m\,\ddot{x} &= \sum F_{ix} \\ m\,\ddot{y} &= \sum F_{iy} \\ m\,\ddot{z} &= \sum F_{iz} \end{aligned} \qquad (1.2)$$



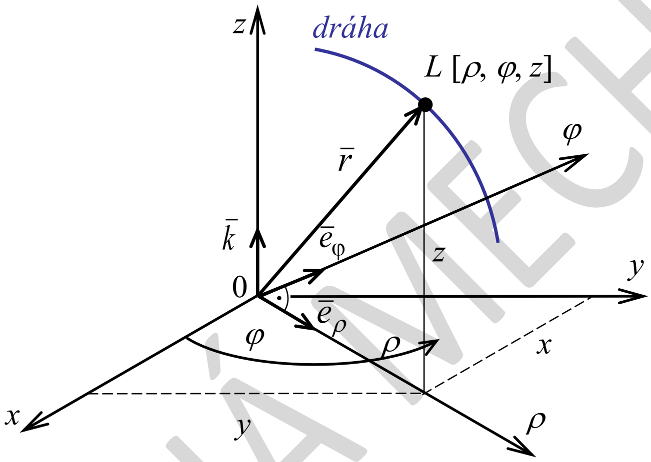
Obr. 1.1

b) Pohybová rovnica hmotného bodu vo valcovej (polárnej) súradnicovej sústave

$$\begin{aligned} m\,a_\rho &= F_\rho \\ m\,a_\varphi &= F_\varphi \\ m\,a_z &= F_z \end{aligned}, \qquad \text{resp.} \qquad \begin{aligned} m\left(\ddot\rho - \rho\,\dot\varphi^2\right) &= F_\rho \\ m\left(\rho\,\ddot\varphi + 2\,\dot\rho\,\dot\varphi\right) &= F_\varphi \\ m\,\ddot z &= F_z \end{aligned} \qquad (1.3)$$

Zvláštnym prípadom tejto súradnicovej sústavy sú polárne súradnice pri vyšetrovaní rovinného pohybu v rovine kolmej na os *z*. Sústava rovníc (1.3) sa potom redukuje na dve rovnice:

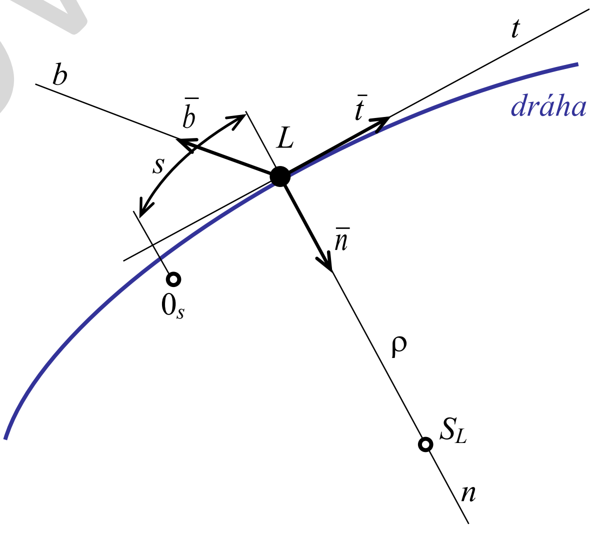
$$\begin{aligned} m\,a_\rho &= F_\rho \\ m\,a_\varphi &= F_\varphi \end{aligned}, \qquad \text{resp.} \qquad \begin{aligned} m\left(\ddot\rho - \rho\,\dot\varphi^2\right) &= F_\rho \\ m\left(\rho\,\ddot\varphi + 2\,\dot\rho\,\dot\varphi\right) &= F_\varphi \end{aligned} \qquad (1.4)$$



Obr. 1.2

c) Pohybová rovnica hmotného bodu v prirodzenej súradnicovej sústave

Túto súradnicovú sústavu tvorí *sprievodný trojhran* dráhy bodu, t. j. *tangenta* (dotyčnica k dráhe hmotného bodu), hlavná *normála* (kolmá na tangentu) a *binormála* so začiatkom v okamžitej polohe hmotného bodu *L* (*Obr. 1.3*).



Obr. 1.3

Vyšetrovanie pohybu hmotného bodu v súradnicovej sústave *0*(t,n,b) má praktický význam v prípade, ak poznáme vopred tvar trajektórie vyšetrovaného bodu (veľmi vhodné pri pohybe bodu po kružnici). Poznáme tak smery t, n, b. Pretože vektor zrýchlenia leží v *oskulačnej rovine 0*(t,n), jeho priemet do smeru *binormály* má nulovú hodnotu. Zložkové pohybové rovnice v smeroch osí prirodzenej súradnicovej sústavy zapíšeme v tvare:

$$\begin{aligned} m\,a_t &= F_t \\ m\,a_n &= F_n \\ 0 &= F_b \end{aligned} \qquad (1.5)$$

Zložky zrýchlení v smere tangenty a normály určíme

$$a_t = \dot{v} = \ddot{s} = \frac{v\,dv}{ds}; \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}$$

kde s je krivočiara súradnica hmotného bodu,
$v = \dot{s}$ je rýchlosť hmotného bodu,
ρ je polomer krivosti dráhy hmotného bodu.

1.1.2 Zostavenie pohybovej rovnice d′Alembertovým spôsobom.

Pohybovú rovnicu $m\,\bar{a} = \bar{F}$ môžeme formálne zapísať v tvare:

$$\bar{F} + \left(-m\,\bar{a}\right) = \bar{0} \qquad (1.6)$$

Ak $\bar{F} = \sum_i \bar{F}_i$ a výraz $\bar{F}_D = -m\,\bar{a}$ označíme ako tzv. *zotrvačnú d'Alembertovu silu*, potom rovnica (1.6) má tvar:

$$\bar{F} + \bar{F}_D = \bar{0} \qquad (1.7)$$

Vektorová rovnica (1.7) vyjadruje rovnováhu medzi vonkajšími a zotrvačnými silami. Hovoríme o tzv. *dynamickej rovnováhe*, čo je podstatou *d' Alembertovho princípu.*

1.2 ZÁKLADNÉ VETY DYNAMIKY HMOTNÉHO BODU

- **Veta o zmene hybnosti**

Zmena hybnosti v určitom časovom intervale je daná impulzom síl pôsobiacich na hmotný bod v tom istom časovom intervale.

$$m\,\bar{v} - m\,\bar{v}_0 = \int_0^t \bar{F}\,\mathrm{d}t\,; \qquad (1.8a)$$

alebo $\bar{H} - \bar{H}_0 = \bar{I}$ (1.8b)

kde $\bar{H}$ je hybnosť hmotného bodu v čase t,
$\bar{H}_0$ - hybnosť hmotného bodu v čase $t = 0$,
$\bar{I}$ - impulz sily na intervale $< 0, t >$.

Veta o zmene hybnosti má však praktický význam len vtedy, ak integrál na pravej strane rovnice (1.8a) sa dá priamo vypočítať, t. j. ak sú pôsobiace sily konštantné, alebo sú funkciou času.

V prípade, ak impulz výslednej sily $\bar{F}$ je nulový, t. j. $\bar{I} = \bar{0}$, potom $\bar{H} - \bar{H}_0 = \bar{0}$, z čoho vyplýva, že vektor hybnosti sa v priebehu času nemení.

$$\bar{H} = \bar{H}_0 = konšt. \qquad (1.9)$$

Vzťah (1.9) vyjadruje *vetu o zachovaní hybnosti.*

- **Veta o zmene momentu hybnosti**

Časová zmena momentu hybnosti k určitému bodu je daná momentom všetkých pôsobiacich síl k tomu istému bodu.

$$\frac{\mathrm{d}\bar{L}}{\mathrm{d}t} = \bar{M} \qquad (1.10)$$

resp. úpravou a integrovaním vzťahu dostaneme

$$\bar{L} - \bar{L}_0 = \int_0^t \bar{M}\,\mathrm{d}t = \bar{I}_M\,, \qquad (1.11)$$

resp. $\bar{L} - \bar{L}_0 = \bar{I}_M$,

kde $\bar{I}_M = \int_0^t \bar{M}\,\mathrm{d}t$ *je* časový impulz momentu hybnosti $\bar{M}$,

$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{H}$ - moment hybnosti hmotného bodu v čase *t*.

Veta o zmene hybnosti má praktický význam v prípade, ak moment síl je funkciou času alebo je konštantný. Špeciálny prípad, kedy je výsledný moment pôsobiacich síl k danému bodu rovný nule, popisuje *veta o zachovaní momentu hybnosti* vyjadrená vzťahom

$$\bar{L} - \bar{L}_0 = \bar{0} \qquad (1.12)$$

- **Veta o zmene kinetickej energie**

Zmena kinetickej energie hmotného bodu medzi jeho dvoma polohami je daná prácou všetkých pracovných síl pôsobiacich medzi týmito polohami.

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \sum_i \int_{r_0}^{r} \bar{F}_i^P\,\mathrm{d}\bar{r} \qquad (1.13a)$$

alebo

$$E_k - E_{k0} = A^P \qquad (1.13b)$$

kde E_k je kinetická energia hmotného bodu na konci vyšetrovaného pohybu,

E_{k0} - kinetická energia hmotného bodu na začiatku vyšetrovaného pohybu,

A^P - práca pracovných síl.

📖 *Poznámka:* Vetu o zmene kinetickej energie s výhodou použijeme vtedy, keď výpočet práce je jednoduchý, t. j. pôsobiace pracovné sily sú konštantné alebo sú funkciou času.

Obvykle túto vetu používame v prípade, ak neuvažujeme pasívne odpory. Ak je potrebné zohľadniť aj vplyv trenia, treciu silu odvodíme pomocou pohybových rovníc.

- **Veta o zachovaní mechanickej energie**

Súčet kinetickej a potenciálnej energie hmotného bodu pohybujúceho sa v potenciálnom silovom poli pri pôsobení konzervatívnych síl je konštantný.

$$E_k + E_p = \text{konšt.} \tag{1.14}$$

Zákon o zachovaní mechanickej energie je možné použiť pre voľný hmotný bod ako aj pre body viazané k dokonale hladkým plochám, resp. *v prípade, ak vplyv pasívnych odporov proti pohybu môžeme zanedbať.*

1.3 METODIKA RIEŠENIA ÚLOH V DYNAMIKE

Pri riešení úloh v dynamike pomocou pohybových rovníc je vhodné dodržať tento postup:

1. Pohybujúci sa hmotný objekt (hmotný bod, teleso, sústava hmotných bodov a telies) uvoľníme z väzieb vo všeobecnom časovom okamihu skúmaného intervalu a nakreslíme tzv. „obrázok uvoľnenia hmotného objektu“.
2. Vhodne zvolíme súradnicovú sústavu tak, aby následné riešenie sústavy rovníc bolo čo najjednoduchšie. Napríklad v prípade priamočiareho pohybu hmotného bodu je vhodné smer a zmysel jednej zo súradnicových osí voliť v smere a zmysle pohybu. Počiatok súradnicovej sústavy zvolíme v mieste počiatočnej polohy skúmaného objektu.
3. K uvoľnenému hmotnému objektu nakreslíme naň pôsobiace vonkajšie sily (akčné – zaťažujúce sily) a reakcie vo väzbách.
4. Zostavíme základnú pohybovú rovnicu vo vektorovom tvare.
5. Základnú vektorovú pohybovú rovnicu premietneme do osí zvolenej súradnicovej sústavy, t. j. napíšeme zložkové pohybové rovnice.
6. K zložkovým pohybovým rovniciam pridáme potrebné vzťahy pre vyskytujúce sa pasívne odpory a vzťahy medzi kinematickými veličinami.
7. Riešením takto vytvorenej sústavy rovníc určíme (podľa typu úlohy) hľadané silové, alebo kinematické veličiny a reakcie vo väzbách.

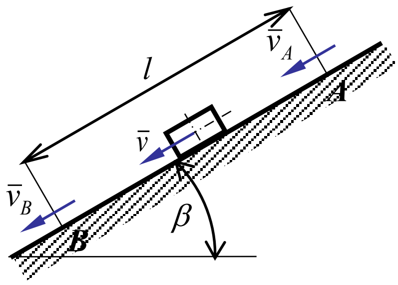
🕮 *Poznámka:* Postup riešenia s využitím pohybových rovníc je možné v určitých prípadoch urýchliť riešením pomocou základných viet dynamiky. V *príklade 1.1* sú uvedené viaceré možnosti riešenia danej úlohy. Pri riešení ďalších úloh bol podľa možností zvolený rýchlejší postup riešenia pomocou základných viet dynamiky, príp. sú hľadané veličiny určené viacerými metódami riešenia. V situáciách, v ktorých je potrebné zohľadniť vplyv pasívnych odporov, je nutné vychádzať z riešenia pomocou pohybových rovníc. V uvedených riešených úlohách je možné vzťah pre treciu silu odvodiť len pomocou pohybových rovníc.

RIEŠENÉ PRÍKLADY

PRÍKLAD 1.1: Hmotný bod o hmotnosti m sa pohybuje smerom dolu po naklonenej rovine s uhlom sklonu β (*obr. 1.4*). V mieste A má rýchlosť v_A. Súčiniteľ šmykového trenia medzi hmotným bodom a podložkou je f. Určte rýchlosť v_B, ktorú hmotný bod nadobudne v mieste B po prejdení vzdialenosti l a čas t_{AB}, za ktorý hmotný bod túto vzdialenosť prejde.

Dané: m, v_A, f, l, β

Hľadané: v_B, t_{AB}



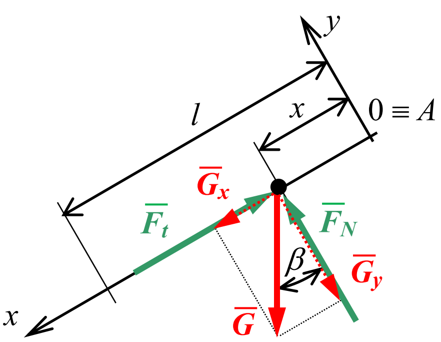
Obr. 1.4

RIEŠENIE: Úlohu je možné riešiť viacerými spôsobmi:
- pomocou *pohybových rovníc* zostavených *Newtonovým spôsobom*,
- pomocou *podmienok dynamickej rovnováhy* využitím *d´Alembertovho princípu*,
- pomocou *základných viet dynamiky*.

1. Riešenie pomocou pohybových rovníc - na základe **Newtonových zákonov**

Pohybovú rovnicu zostavujeme vo všeobecnom stave (polohe) uvoľneného hmotného bodu, pričom uvažujeme všetky sily, ktoré na hmotný bod pôsobia (*obr. 1.5*). V prípade viazaného pohybu bodu, ktorého pohyblivosť je obmedzená väzbami, musíme zohľadniť aj reakcie vo väzbách. Vonkajšou zaťažujúcou silou pôsobiacou na hmotný bod je jeho tiaž G, reakciou od podložky sú normálová sila F_N a trecia sila F_t.

Hmotný bod vykonáva priamočiary pohyb dolu naklonenou rovinou. Pri voľbe súradnicovej sústavy výhodne zvolíme smer a zmysel osi x totožne s dráhou a zmyslom pohybu hmotného bodu. Začiatok súradnicovej sústavy zvolíme v bode A.



Obr. 1.5

Vektorová pohybová rovnica:

$$m\,\bar{a} = \bar{G} + \bar{F}_N + \bar{F}_t \qquad \text{(a)}$$

Zložky pohybovej rovnice v skalárnom tvare v smere súradnicových osí zvolenej súradnicovej sústavy:

$$x: \quad m a_x = G \sin\beta - F_t \qquad \text{(b)}$$

$$y: \quad 0 = F_N - G \cos\beta \qquad \text{(c)}$$

Doplnkové rovnice:

$$G = m g$$

Potom z (c) $\Rightarrow$

$$F_N = G\cos\beta = m g \cos\beta$$

$$F_t = f\, F_N = f m g \cos\beta$$

Pohybová rovnica vyjadruje závislosť kinematických veličín a silových účinkov, ktoré sú príčinou zmeny stavu hmotného objektu. V našom prípade sa hmotný bod pohybuje rovnomerne zrýchlene v smere osi x pod vplyvom vlastnej tiaže. Pretože hľadáme kinematické veličiny (rýchlosť v_B a čas t_{AB}), z *vlastnej pohybovej rovnice* (b) (popisujúcej zmenu stavu) odvodíme rovnicu zrýchlenia:

$$x: \quad m a_x = mg\sin\beta - f mg\cos\beta \qquad /:m$$

$$x: \quad a_x = g\left(\sin\beta - f\cos\beta\right)$$

Ak pre zrýchlenie hmotného bodu a jeho zložky v zvolenej súradnicovej sústave platí

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}; \qquad a_x = a; \qquad a_y = 0,$$

potom rovnica zrýchlenia vyšetrovaného hmotného bodu má tvar

$$a = g\left(\sin\beta - f\cos\beta\right)$$

Veľkosť okamžitej rýchlosti v_B na konci známej dráhy l určíme z rovnice závislosti rýchlosti na dráhe. Pre jej odvodenie použijeme tzv. *rozšírenú definíciu zrýchlenia* $a = \dfrac{v\,\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$.

$$a = g\left(\sin\beta - f\cos\beta\right) = \frac{v\,\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$g\left(\sin\beta - f\cos\beta\right)\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}v$$

$$g\left(\sin\beta - f\cos\beta\right)\int_0^l \mathrm{d}x = \int_{v_A}^{v_B} v\,\mathrm{d}v$$

$$g\left(\sin\beta - f\cos\beta\right) l = \frac{v_B^2}{2} - \frac{v_A^2}{2}$$

Po separácii premenných, integrácii a úprave dostaneme vzťah pre výpočet rýchlosti, ktorú hmotný bod dosiahne za daných nezmenených podmienok v mieste B:

$$\underline{\underline{v_B = \sqrt{2g\left(\sin\beta - f\cos\beta\right) l + v_A^2}}}$$

Čas t_{AB} vypočítame z rovnice rýchlosti ako funkcie času, ktorú odvodíme z rovnice zrýchlenia pomocou tzv. *základnej definície zrýchlenia*.

$$a = g\left(\sin\beta - f\cos\beta\right) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$g\left(\sin\beta - f\cos\beta\right)\int_0^{t_{AB}}\mathrm{d}t = \int_{v_A}^{v_B}\mathrm{d}v$$

$$g\left(\sin\beta - f\cos\beta\right)t_{AB} = v_B - v_A$$

$$\underline{\underline{t_{AB} = \frac{v_B - v_A}{g\left(\sin\beta - f\cos\beta\right)}}}$$

2. **Metóda zotrvačných síl (dynamická rovnováha) -** riešenie pomocou **podmienok dynamickej rovnováhy** zostavených využitím **d´Alembertovho princípu.**

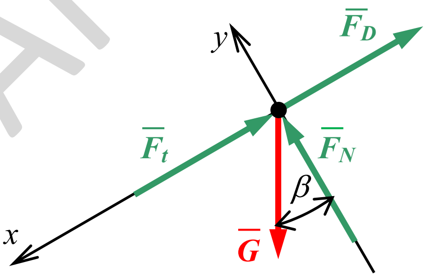
Vektorová podmienka dynamickej rovnováhy (d) vyjadruje rovnováhu medzi vonkajšími a zotrvačnými účinkami pôsobiacimi na hmotný objekt. Zotrvačný účinok je vyjadrený zotrvačnou silou F_D, ktorá pôsobí v smere pohybu (v smere osi x) a je orientovaná v opačnom zmysle, ako je skutočný zmysel pohybu (*obr. 1.6*).

$$\overline{0} = \overline{G} + \overline{F}_N + \overline{F}_t + \overline{F}_D \qquad \text{(d)}$$

Rozpísaním vektorovej rovnice (d) do zložiek dostávame:

$$x: \quad 0 = G\sin\beta - F_t - F_D \qquad \text{(e)}$$

$$y: \quad 0 = F_N - G\cos\beta \qquad \text{(f)}$$



Obr. 1.6

Pre zrýchlenie hmotného bodu a jeho zložky platí:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}; \qquad a_x = a; \qquad a_y = 0$$

Potom doplnkové rovnice sú:

$$G = mg$$

$$\text{z (f)} \quad \Rightarrow \quad F_N = G\cos\beta = mg\cos\beta$$

$$F_t = fF_N = fmg\cos\beta$$

$$F_D = ma$$

Odvodíme rovnicu zrýchlenia:

$$x: \qquad 0 = mg\sin\beta - f\,mg\cos\beta - ma$$
$$x: \qquad ma = mg\sin\beta - f\,mg\cos\beta \qquad\qquad /:m$$
$$a = g\left(\sin\beta - f\cos\beta\right)$$

Čas t_{AB} a veľkosť okamžitej rýchlosti v_B vypočítame rovnako ako v bode **1.**.

3. Veta o zmene kinetickej energie

Zmena kinetickej energie hmotného bodu pri jeho pohybe z bodu A do bodu B je daná *prácou všetkých pracovných síl* pôsobiacich na hmotný bod medzi týmito polohami.

Pojmom „*Pracovné sily*“ označujeme sily, ktoré na hmotný bod pôsobia v smere jeho pohybu.

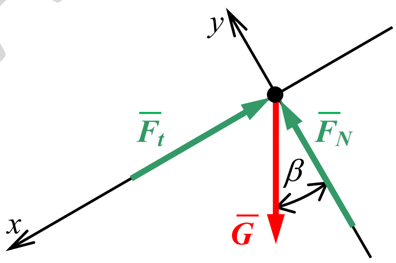
Pracovnými silami, ktoré pôsobia na vyšetrovaný hmotný bod pohybujúci sa v smere osi x sú príslušná zložka tiažovej sily $G_x = G\sin\beta$ a trecia sila F_t. Vzťah pre treciu silu F_t odvodíme rovnako ako v bode **1.**, pomocou pohybových rovníc a obrázka uvoľnenia (*obr. 1.7*).

$$m\bar{a} = \bar{G} + \bar{F}_N + \bar{F}_t \qquad \text{(a)}$$

$$x: \qquad ma_x = G\sin\beta - F_t \qquad \text{(b)}$$
$$y: \qquad 0 = F_N - G\cos\beta \qquad \text{(c)}$$

Doplnkové rovnice:

$$G = mg$$
$$F_N = G\cos\beta = mg\cos\beta$$
$$F_t = f\,F_N = f\,mg\cos\beta$$



Obr. 1.7

Okamžitú rýchlosť v bode B vypočítame pomocou *vety o zmene kinetickej energie* vyjadrenej v skalárnom tvare

$$\boxed{\Delta E_k = A^P}$$

$$E_{kB} - E_{kA} = \int_0^l \left(G\sin\beta - F_t\right)\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}m\,v_B^2-\frac{1}{2}m\,v_A^2=\left(G\sin\beta-F_t\right)l$$

$$\frac{1}{2}m\,v_B^2-\frac{1}{2}m\,v_A^2=\left(mg\sin\beta-fmg\cos\beta\right)l \qquad /:m$$

$$\frac{v_B^2}{2}-\frac{v_A^2}{2}=g\left(\sin\beta-f\cos\beta\right)l$$

$$\underline{\underline{v_B=\sqrt{2gl(\sin\beta-f\cos\beta)+v_A^2}}}$$

Poznámka: Riešenie pomocou vety o zmene kinetickej energie je alternatívou k riešeniu pomocou rozšírenej definície zrýchlenia $a=\dfrac{v\,\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$. Je vhodné ju použiť v prípade, ak hľadáme, resp. poznáme dráhu hmotného bodu v danom riešenom intervale.

4. Veta o zmene hybnosti

Zmena hybnosti hmotného bodu v časovom intervale t_{AB} je daná impulzom pracovných síl pôsobiacich na hmotný bod v tom istom časovom intervale.

Vzťahy pre výpočet veľkostí pracovných síl odvodíme z obrázku uvoľnenia (*obr. 1.7*), resp. pomocou pohybovej rovnice hmotného bodu. Čas t_{AB}, za ktorý sa hmotný bod presunie z bodu A do bodu B vypočítame *z vety o zmene hybnosti*.

$$\boxed{\Delta H=I^P}$$

$$H_B-H_A=\int_0^{t_{AB}}\left(G\sin\beta-F_t\right)\mathrm{d}t$$

$$m\,v_B-m\,v_A=\left(m\,g\sin\beta-f\,m\,g\cos\,\beta\right)t_{AB} \qquad /:m$$

$$v_B-v_A=g\left(\sin\beta-f\cos\,\beta\right)t_{AB}$$

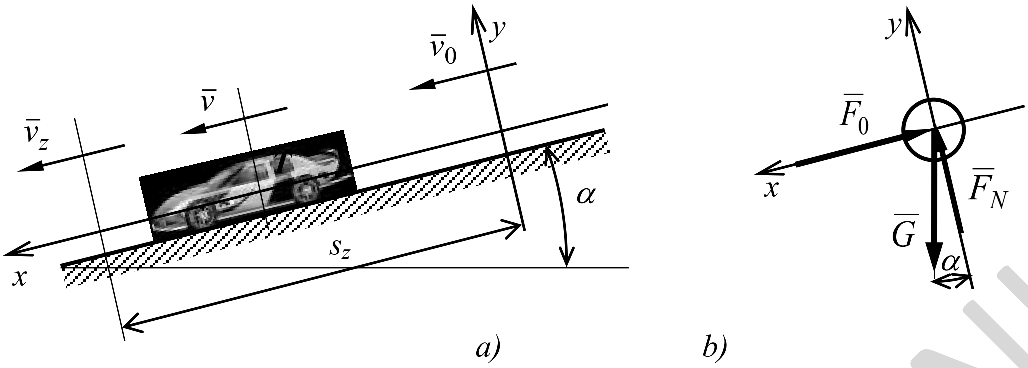
$$\underline{\underline{t_{AB}=\frac{v_B-v_A}{g(\sin\beta-f\cos\beta)}}}$$

Poznámka: Riešenie pomocou vety o zmene hybnosti je alternatívou k riešeniu pomocou základnej definície zrýchlenia $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. Tento postup riešenia je vhodné použiť v prípade, ak poznáme alebo hľadáme čas pohybu v riešenom intervale.

PRÍKLAD 1.2: Automobil ide dole kopcom s uhlom sklonu α (*obr. 1.8a*). V čase t_0 = 0 s začne brzdiť, pričom brzdný odpor sa rovná jednej desatine tiaže auta. Určte brzdnú dráhu a čas, za ktorý automobil v daných podmienkach zastaví.

Dané hodnoty: G, $F_0=\dfrac{1}{10}G$, $t_0=0$, $v_0=\text{konšt}$, α

Hľadané hodnoty: t_z, s_z



a) *b)*

Obr. 1.8

RIEŠENIE: Automobil koná priamočiary posuvný pohyb, počas ktorého nemá priestorové rozloženie síl vplyv na brzdnú dráhu. Automobil budeme preto považovať za hmotný bod. Pri voľbe súradnicovej sústavy volíme os x v smere a zmysle pohybu (*obr. 1.8b*). Jej začiatok 0 zvolíme v mieste, v ktorom automobil začne brzdiť. Sily pôsobiace v smere pohybu (pracovné sily) poznáme. Úlohu budeme riešiť pomocou základných viet dynamiky.

- Brzdnú dráhu vypočítame z *vety o zmene kinetickej energie* vyjadrenej v skalárnom tvare

$$\boxed{\Delta E_k = A^P}$$

$$E_{kz} - E_{k0} = \int_0^{s_z} (-F_0 + G\sin\alpha)\,\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{2} m v_0^2 = (-F_0 + G\sin\alpha) s_z$$

$$-\frac{1}{2}\frac{G}{g} v_0^2 = \left(-\frac{1}{10} G + G\sin\alpha\right) s_z$$

$$s_z = \frac{v_0^2}{2g(0{,}1 - \sin\alpha)}$$

- Čas potrebný na ubrzdenie auta vypočítame z *vety o zmene hybnosti.*

$$\Delta H = I^P$$

$$H_z - H_0 = \int_0^{t_z} (-F_0 + G\sin\alpha)\,\mathrm{d}t$$

$$-m v_0 = (-F_0 + G\sin\alpha) t_z$$

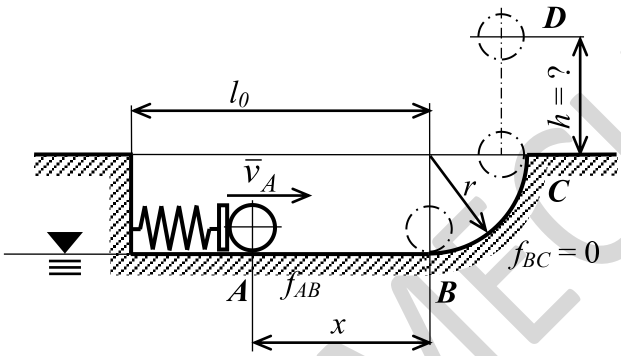
$$t_z = \frac{-m v_0}{-\frac{1}{10} G + G\sin\alpha}$$

$$t_z = \frac{m v_0}{G(0{,}1 - \sin\alpha)}$$

PRÍKLAD 1.3: Hmotný bod hmotnosti m je vymrštený pružinou voľnej dĺžky l_0 z miesta A (*obr. 1.9*). Na začiatku pohybu bol hmotný bod v pokoji ($v_A = 0$). Na úseku AB sa bod pohybuje po drsnej vodorovnej podložke. V mieste B sa hmotný bod odpúta od pružiny a pohybuje sa po dokonale hladkej valcovej ploche. V bode C vyletí smerom hore. Určte, do akej výšky h hmotný bod vyletí, ak odpor vzduchu zanedbáme. Stlačenie (maximálna deformácia) pružiny v bode A je x.

Dané: m, $v_A = 0$, x, f_{AB}, $f_{BC} = 0$, g, r.
Hľadané: h

RIEŠENIE: Pohyb hmotného bodu z bodu A do bodu D je ovplyvňovaný rôznymi podmienkami. Rozdelíme ho preto na úseky, v rámci ktorých sa hmotný bod pohybuje za rovnakých podmienok. Existuje viacero možností riešenia danej úlohy.



Obr. 1.9

RIEŠENIE „A“: Pohyb hmotného bodu rozdelíme na úseky A-B, B-C a C-D. Na každom úseku riešime úlohu pomocou pohybových rovníc.

Úsek A - B

Hmotný bod sa pohybuje po vodorovnej drsnej podložke so začiatočnou rýchlosťou $v_A = 0$. Na úseku AB konajú prácu sila trecia F_t a sila v pružine F_p. Veľkosť trecej sily určíme pomocou normálovej reakcie, ktorá vyplýva z priemetu vektorovej pohybovej rovnice do osi y zvolenej súradnicovej sústavy (*obr. 1.10*). Vektorový zápis pohybovej rovnice má tvar:

$$m\overline{a} = \overline{G} + \overline{F}_N + \overline{F}_t + \overline{F}_p \qquad (a)$$

$$x: \quad m\,a = -F_t + F_P \qquad (b)$$

$$y: \quad 0 = F_N - G \qquad (c)$$

Doplnkové rovnice:

z (c) $\Rightarrow$ $F_N = G = mg$ (d)

Pre veľkosť trecej sily platí

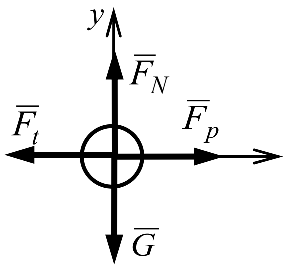
$$F_t = f_{AB}\, F_N$$

Potom

$$F_t = f_{AB}\, G = f_{AB}\, m\, g, \quad \text{t. j. } F_t \text{ - je konštanta} \qquad (e)$$

Pre veľkosť sily v pružine platí

$$F_p = kx \qquad (f)$$



Obr. 1.10

Po dosadení do (b) a úprave

$$ma = -f_{AB}\, m g + k x$$

$$a = -f_{AB}\, g + \frac{k}{m} x = \frac{v\,\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

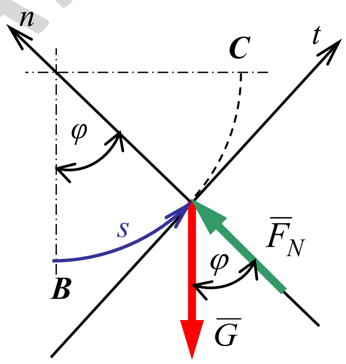
$$-g\, f_{AB} \int_0^x \mathrm{d}x + \frac{k}{m} \int_0^x x\,\mathrm{d}x = \int_{v_A=0}^{v_B} v\,\mathrm{d}v$$

$$-g\, f_{AB}\, x + \frac{k}{m} \frac{x^2}{2} = \frac{v_B^2}{2}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{k}{m} x^2 - 2 g x f_{AB}}$$

Úsek *B – C*

Je potrebné určiť rýchlosť v_C na konci úseku *BC*. Hmotný bod sa na tomto úseku pohybuje po dokonale hladkej valcovej podložke. Zavedieme prirodzenú súradnicovú sústavu tvorenú tangentou *t* a normálou *n* (kladná orientácia tangenty je v zmysle pohybu, normála je orientovaná do stredu krivosti trajektórie – *obr. 1.11*).



Obr. 1.11

Pracovnou silou je len zložka tiažovej sily pôsobiaca v smere pohybu, v tomto prípade v smere tangenty $-G\sin\varphi$. Dráhová súradnica s je vyjadrením dĺžky oblúka, ktorú prejde hmotný bod na úseku *BC*. Pre pohyb po kružnici je možné použiť vzťah:

$$s = r\,\varphi$$

Deriváciou dostaneme

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}\,(r\,\varphi)$$

$$\mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}\varphi$$

Vektorová pohybová rovnica a jej priemety do smeru osí t a n

$$m\bar{a} = \bar{G} + \bar{F}_N \qquad \text{(g)}$$

$$t: \quad m a_t = -G\sin\varphi \qquad \text{(h)}$$

$$n: \quad m a_n = F_N - G\cos\varphi \qquad \text{(i)}$$

Dosadíme (d) do (h) a upravíme

$$m a_t = -m g \sin\varphi$$

$$a_t = -g\sin\varphi = \frac{v\,\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$$

$$-g\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, r\,\mathrm{d}\varphi = \int_{v_B}^{v_C} v\,\mathrm{d}v$$

$$\frac{v_C^2}{2} - \frac{v_B^2}{2} = -g\,r\left[-\cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{v_C^2}{2} - \frac{v_B^2}{2} = g\,r\left[0-1\right]$$

$$v_C^2 - v_B^2 = -2g\,r$$

$$v_C = \sqrt{{v_B}^2 - 2gr} \quad \sqrt{\frac{k}{m}x^2 - 2g\,x\,f_{AB} - 2gr}$$

Úsek *C* - *D*

Na úseku *CD* sa hmotný bod pohybuje zvislo nahor (*obr. 1.12*). Ak zanedbáme odpor prostredia, pohybová rovnica bude mať tvar

$$m\bar{a} = \bar{G} \qquad \text{(j)}$$

$$x: \quad - \qquad \text{(k)}$$

$$y: \quad m a = -G \qquad \text{(l)}$$

Dosadíme (d) do (l) a upravíme

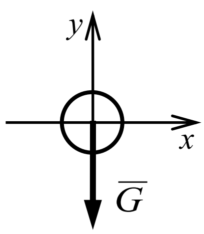
$$m a = -\,mg$$

$$a = -\,g = \frac{v\,\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$$

$$-\,g\int_0^h \mathrm{d}y = \int_{v_C}^{v_D=0} v\,\mathrm{d}v$$

$$-\,g\,h = -\frac{v_C^2}{2}$$

$$h = \frac{v_C^2}{2g} = \frac{\frac{k}{m}x^2 - 2g\,x\,f_{AB} - 2gr}{2g}$$



Obr. 1.12

RIEŠENIE „B“: Pohyb rozdelíme do troch úsekov. Úlohu riešime pomocou *Vety o zmene kinetickej energie*. Na úseku *A- B* je potrebné zohľadniť šmykové trenie. Vzťah pre výpočet veľkosti trecej sily odvodíme pomocou pohybových rovníc (pozri riešenie „A“- rovnica (e)).

Úsek *A - B*

Hmotný bod uvoľníme – *obr. 1.10*. Dosadíme do *Vety o zmene kinetickej energie:*

$$\Delta E_k = A^P$$

$$E_{kB} - E_{kA} = \int_0^x (-F_t + F_p)\,\mathrm{d}x$$

$$E_{kB} - E_{kA} = (-F_t)\int_0^x \mathrm{d}x + \int_0^x F_p\,\mathrm{d}x$$

$$E_{kB} - E_{kA} = (-f_{AB} mg)\int_0^x \mathrm{d}x + \int_0^x k\,x\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2} m {v_B}^2 - \frac{1}{2} m {v_A}^2 = -f_{AB} m g x + k\frac{x^2}{2} \qquad /.\frac{2}{m}$$

$${v_B}^2 - {v_A}^2 = \frac{k}{m}x^2 + \frac{-2 f_{AB} m g x}{m}$$

$$v_B = \sqrt{{v_A}^2 + \frac{k}{m}x^2 - 2 f_{AB} g x}\,;$$

ak $v_A = 0$, potom $v_B = \sqrt{\frac{k}{m}x^2 - 2 g x f_{AB}}$

Úsek *B - C*

Hmotný bod uvoľníme – *obr. 1.11* a dosadíme do *Vety o zmene kinetickej energie*

$$\Delta E_k = A^P$$

$$E_{kC} - E_{kB} = \int_0^s (-G\sin\varphi)\,\mathrm{d}s$$

$$E_{kC} - E_{kB} = \int_0^\varphi (-G\sin\varphi)\,r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\frac{1}{2} m v_C^2 - \frac{1}{2} m v_B^2 = \int_0^\varphi (-G\sin\varphi)\,r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\frac{1}{2} m v_C^2 - \frac{1}{2} m v_B^2 = -m g r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\frac{1}{2} m v_C^2 - \frac{1}{2} m v_B^2 = -m g r\,[-\cos\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{1}{2} m v_C^2 - \frac{1}{2} m v_B^2 = m g r\,[0-1]$$

$$\frac{1}{2} m v_C^2 - \frac{1}{2} m v_B^2 = -m g r \qquad /.\frac{2}{m}$$

$$v_C^2 - v_B^2 = -2gr$$

$$v_C = \sqrt{{v_B}^2 - 2gr} = \sqrt{\frac{k}{m}x^2 - 2gxf_{AB} - 2gr}$$

Úsek *C - D*

Na úseku *CD* sa hmotný bod pohybuje zvislo nahor (*obr. 1.12*). Ak zanedbáme odpor prostredia, pre určenie výšky *h* je možné použiť *Zákon zachovania mechanickej energie,* Zároveň je však možné použiť i *Vetu o zmene kinetickej energie*:

$$\Delta E_k = A^P$$

$$E_{kD} - E_{kC} = \int_0^h (-G)\mathrm{d}y$$

$$0 - \frac{1}{2}mv_C^2 = \int_0^h (-mg)\mathrm{d}\,y$$

$$-\frac{1}{2}mv_C^2 = -mgh \qquad /.(-\frac{2}{\mathrm{m}})$$

$${v_C}^2 = 2gh$$

$$h = \frac{{v_C}^2}{2g}$$

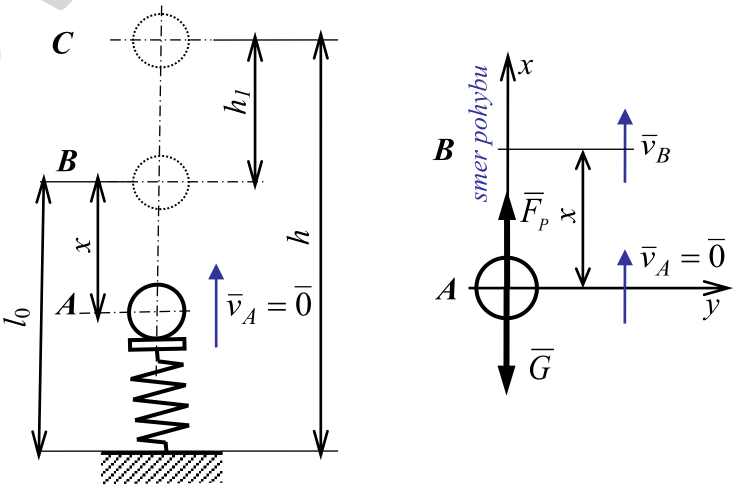
Dosadením vzťahov odvodených pre výpočet rýchlosti v_B a v_C dostaneme vzťah pre výpočet výšky *h*

$$h = \frac{\frac{k}{m}x^2 - 2gxf_{AB} - 2gr}{2g}$$

PRÍKLAD 1.4: Do akej výšky *h* vyletí guľôčka hmotnosti *m,* ak je vymrštená smerom hore z pokoja (začiatočná rýchlosť $v_A = 0$) pomocou pružiny voľnej dĺžky l_0 a tuhosti *k.* Maximálne predĺženie (stlačenie) pružiny je *x* (*obr. 1.13a*). Odpor vzduchu zanedbajte.

Dané: *m*, *x*, l_0, $\bar{v}_A = \bar{0}$.

Hľadané: *h*



a) *b)*

Obr. 1.13

RIEŠENIE „A“: V prípade riešenia danej úlohy pomocou *pohybových rovníc* rozdelíme pohyb hmotného bodu do dvoch úsekov: úsek *AB*, kde na hmotný bod okrem jeho vlastnej tiaže *G* pôsobí tiež sila v pružine F_p a úsek *BC,* na ktorom je pohyb guľôčky ovplyvnený len tiažou *G*. Odpor vzduchu zanedbáme. Uvoľníme hmotný bod. Súradnicovú sústavu zvolíme pootočenú vzhľadom na pohyb guľôčky a smer predlžovania (skracovania) pružiny, ktorý je v zadaní označený *x*.

Úsek *A* - *B*

Vektorová pohybová rovnica hmotného bodu má tvar:

$$m\,\bar{a}_{AB} = \bar{F}_p + \bar{G} \qquad \text{(a)}$$

$$y: \quad 0 = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$x: \quad m\,a_{AB} = F_p - G \qquad \text{(c)}$$

Doplnkové rovnice:

$$F_p = k\,x\,; \quad G = m\,g$$

Úpravou vlastnej pohybovej rovnice (c) odvodíme rovnicu zrýchlenia a_{AB} .

$$m\,a_{AB} = kx - mg \qquad / \cdot \frac{1}{m}$$

Poznáme celkovú dráhu *x* hmotného bodu na danom úseku a rýchlosť v bode *A*. Hľadáme rýchlosť v mieste *B*. Potom

$$a_{AB} = \frac{vdv}{dx} = \frac{k}{m}x - g \qquad / \cdot dx$$

Separáciou premenných a integráciou určíme veľkosť v_B.

$$\int_0^x \left(\frac{k}{m}x - g\right) \mathrm{d}\,x = \int_{v_0}^{v_B} v\,\mathrm{d}\,v$$

$$\frac{k}{m}\int_0^x x\;\mathrm{d}\,x - g\int_0^x \mathrm{d}\,x = \int_{v_A}^{v_B} v\,\mathrm{d}\,v$$

$$\frac{k}{m}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x - g[x]_0^x = \left[\frac{v_B^2}{2}\right]_{v_A}^{v_B}$$

$$\frac{\mathrm{k}}{2\mathrm{m}}(x^2 - 0) - g\,(x - 0) = \frac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2)$$

$$\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}x^2 - 2g\,x = v_B^2 - v_A^2 \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{v_B = \sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}x^2 - 2gx}}}$$

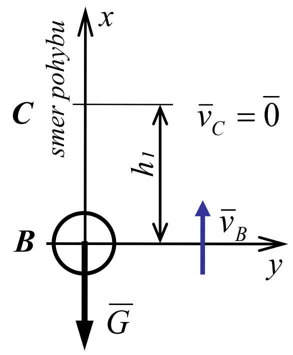
Úsek *B* - *C* (*obr. 1.14*)

$$m\bar{a}_{BC} = \bar{G} \qquad \text{(d)}$$

$$y: \quad 0 = 0 \qquad \text{(e)}$$

$$x: \quad m\,a_{BC} = -G \qquad \text{(f)}$$

Doplnková rovnica: $G = m\,g$



Obr. 1.14

Úpravou rovnice (f) odvodíme rovnicu zrýchlenia a_{BC}.

$$m\,a_{BC} = -m\,g \qquad / \cdot \frac{1}{m}$$

$$a_{BC} = \frac{v\,\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -g \qquad /.\,\mathrm{d}x$$

$$v\,\mathrm{d}v = (-g)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{v_B}^{0} v\,\mathrm{d}v = \int_{0}^{h_1} (-g)\,\mathrm{d}x$$

$$\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_B}^{0} = -g\,[x]_0^{h_1}$$

$$-g(h_1 - 0) = \frac{1}{2}(0 - v_B^2)$$

$$g\,h_1 = \frac{v_B^2}{2} \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{v_B^2}{2g}$$

Po dosadení za v_B

$$h_1 = \frac{\frac{k}{m}x^2 - 2g\,x}{2g}$$

RIEŠENIE „B“: Ak neuvažujeme odpor vzduchu, resp. nie je nutné zohľadniť pri výpočte vplyv pasívnych odporov, môžeme úlohu riešiť pomocou *Zákona o zachovaní mechanickej energie*. Pri tomto postupe riešenia porovnávame celkovú mechanickú energiu hmotného bodu v jeho dvoch rôznych (výškových) polohách. Pohyb skúmaného hmotného bodu môžeme znovu rozdeliť na úseky a postupne porovnať mechanickú energiu v krajných polohách *AB* a *BC*. V tomto prípade je možné riešenie urýchliť porovnaním mechanickej energie hmotného bodu v jeho krajných polohách *A* a *C*.

Ak zvolíme v mieste *B* nulovú hladinu pre potenciálnu energiu (*obr. 1.15*), potom pre krajné polohy *A* a *C* platí:

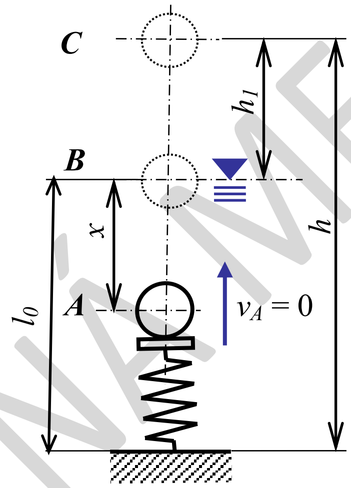
$$E_{kA} = \frac{1}{2} m v_A^2 = 0; \qquad v_A = 0$$

$$E_{pA} = -m\,g\,x + \frac{1}{2} k x^2;$$

kde $E_p = \frac{1}{2} k x^2$ je potenciálna energia pružiny.

$$E_{kC} = \frac{1}{2} m v_C^2 = 0; \quad v_C = 0$$

$$E_{pC} = m\,g\,h_1$$



Obr. 1.15

Dosadíme do vzťahu vyjadrujúceho *Zákon o zachovaní mechanickej energie*:

$$\boxed{E_{kA} + E_{pA} = E_{kC} + E_{pC}}$$

$$0 - mgx + \frac{1}{2} k x^2 = 0 + mg\,h_1 \qquad /\cdot \frac{2}{m}$$

$$-2gx + \frac{k}{m} x^2 = 2g\,h_1$$

$$h_1 = \frac{\frac{k}{m} x^2 - 2g\,x}{2g}$$

Guľôčka vyletí do výšky:

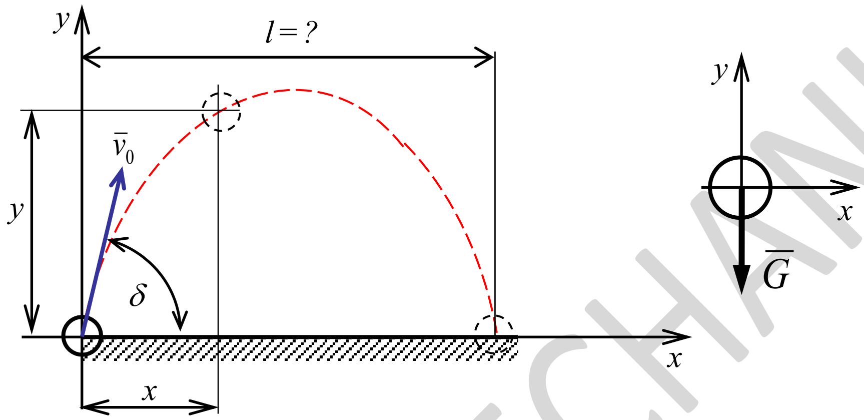
$$h = h_1 + l_0$$

📖 *Poznámka:* Úlohu je možné riešiť aj pomocou Vety o zmene kinetickej energie.

PRÍKLAD 1.5: Hmotný bod o hmotnosti m je vrhnutý s počiatočnou rýchlosťou $\bar{v}_0$ pod uhlom δ. Určte dráhu pohybu hmotného bodu (*obr. 1.16*), ak naň pôsobí len sila jeho tiaže. Určte tiež čas a miesto dopadu hmotného bodu na vodorovnú rovinu.

Dané: m, $\bar{v}_0$, δ

Hľadané: $\bar{v}_B$, t_{AB}



Obr. 1.16

RIEŠENIE: Úlohu riešime pomocou pohybových rovníc. Základná pohybová rovnica má tvar

$$m\bar{a} = \bar{G}$$

Ak zvolíme súradnicovú sústavu 0(x, y, z) tak, aby os z bola kolmá na rovinu vektorov $\bar{G}$ a $\bar{v}_0$ (*obr. 1.16*), potom v smere osi z bude splnená podmienka

$$\sum_i \bar{F}_{iz} = 0; \qquad v_{0z} = 0$$

Pohyb je potom rovinný a dráha bodu leží v rovine xy. S výhodou zvolíme os y v smere pôsobenia tiažovej sily $\bar{G}$. Vyjadríme *zložky pohybovej rovnice v skalárnom tvare* v smere súradnicových osí zvolenej súradnicovej sústavy 0(x,y):

$$x: \quad m a_x = 0 \qquad (1)$$

$$y: \quad m a_y = -G \qquad (2)$$

Doplnková rovnica: $G = mg$

Z vlastných pohybových rovníc (1) a (2) odvodíme parametrické rovnice dráhy.

z (1): $m a_x = 0$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 \cos\delta$$

$$a_x = 0 \;\Rightarrow\; v_x = konšt.$$

$$\int_0^x \mathrm{d}x = -v_0 \cos\delta \int_0^t \mathrm{d}t$$

$$\boxed{v_x = v_0 \cos\delta} \qquad (4)$$

$$(3) \qquad \boxed{x = v_0\, t \cos\delta}$$

z (2): $m a_y = -mg \qquad / \cdot \dfrac{1}{m}$

$$a_y = -g$$

$$\int_{v_{0y}}^{v_y} dv_y = -g\int_0^t dt$$

$$v_y - v_{0y} = -g\,t$$

$$v_y = v_{0y} - g\,t$$

$$\boxed{v_y = v_0 \sin\delta - g\,t}$$

$$\frac{\mathrm{d}_y}{\mathrm{d}t} = v_0 \sin\delta - g\,t$$

$$\int_0^y \mathrm{d}\,y = \int_0^t (v_0 \sin\delta - gt)\mathrm{d}\,t$$

$$(5)\ \boxed{y = v_0\,t \sin\delta - \frac{g\,t^2}{2}}$$

(6)

Rovnice (4) a (6) sú *parametrické rovnice dráhy* hmotného bodu. Vylúčením času t z rovníc (4) a (6) a dosadením vzťahu $h = \dfrac{v_0^2}{2g}$ (tzv. rýchlostná výška) dostaneme rovnicu dráhy, po ktorej sa hmotný bod pohybuje.

$$\boxed{y = x\,tg\,\delta - \frac{1}{4h\cos^2\delta}x^2} \qquad (7)$$

Hmotný bod sa pohybuje po parabole so zvislou osou.

Pri určení času dopadu vychádzame z predpokladu, že v okamihu dopadu HB na podložku platí:

$x_D = l;\quad y_D = 0\quad$ a $\quad$ čas $t = t_D$.

Dosadíme do (6)

$$0 = v_0\,t_D \sin\delta - \frac{g\,t_D^2}{2}$$

$$2v_0 \sin\delta = g \cdot t_D$$

$$t_D = \frac{2v_0 \sin\delta}{g} \qquad (8)$$

Miesto dopadu určíme dosadením (8) do parametrickej rovnice (4)

$$x_D = l = v_0\,t_D \cos\delta$$

$$x_D = l = v_0 \frac{2v_0 \sin\delta}{g}\cos\delta$$

$$x_D = l = \frac{v_0^2 \sin 2\delta}{g}, \qquad (9)$$

kde x_D je vzdialenosť dopadu hmotného bodu od počiatočnej polohy meraná v smere osi x

LITERATÚRA

[1] MONKOVÁ, K.- ŠMERINGAIOVÁ, A.: *Vybrané kapitoly z dynamiky I.* Praha: Asociace RISE, 2013, 192 s. ISBN 978-80-87670-11-8

[2] MONKOVÁ, K.- ŠMERINGAIOVÁ, A.: *Vybrané kapitoly z dynamiky II.* Praha: Apeiron, 2013, 202 s. ISBN 978-80-87670-12-5

[3] PAŠKO, Ján – URAM, V. - ŠMERINGAIOVÁ, A.: *Vybrané kapitoly z Technickej mechaniky II*, Prešov: FVT TU, 2006. 95 s. ISBN 80-8073-547-6

[4] ŠMERINGAIOVÁ, A.- GAŠPÁR, Š.: *Technická mechanika II*. Návody na cvičenia. Prešov: FVT TU, 2013. 175 s. ISBN 978-80-553-1583-6